Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Черников, Н. С. Шавохина, Релятивистская теория гравитации Логунова
в свете геометрии аффинной связности, *ТМФ*, 2002, том 132, номер 3, 469–474

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf374>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 18:25:44

© 2002 г.

Н. А. Черников*, Н. С. Шавохина*

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ ЛОГУНОВА В СВЕТЕ ГЕОМЕТРИИ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

Теория гравитации Логунова рассмотрена с точки зрения геометрии аффинной связности. Применение вариационного метода Лагранжа–Гильберта приводит к следующему выводу: если возможно эффективное введение фоновой метрики, то масса гравитона не должна равняться нулю, а если она равняется нулю, то от фоновой метрики эффективно остается только связность Кристоффеля.

Ключевые слова: релятивистская теория гравитации, фоновая метрика, гравитон.

Релятивистская теория гравитации (РТГ) Логунова изложена в книге [1]. Она хорошо укладывается в рамки созданной в минувшем веке геометрии аффинной связности. В РТГ решен вопрос об интегральных законах сохранения 4-импульса и 6-момента количества движения. Для решения этого вопроса наряду с гравитационной метрикой в РТГ введена фоновая метрика Минковского.

Интересна история рассматриваемого предмета. Геометрия аффинной связности сформировалась на основе римановой геометрии. Ключевым объектом в пределах новой ветви геометрии является аффинная связность. Соответственно в римановой геометрии ключевым объектом является метрическое тензорное поле. В настоящей статье мы опираемся на превосходный курс геометрии аффинной связности [2].

В 10-е годы прошлого века Эйнштейн, Гроссман и независимо от них Гильберт на основе римановой геометрии построили общую теорию относительности (ОТО). В ОТО значительных проблем не возникало до тех пор, пока введенный в работе [3] “псевдотензор энергии” (термин взят в кавычки не нами, а самим Эйнштейном!) гравитационного поля не стал предметом дискуссии. Споры о “псевдотензоре энергии” продолжались долгие годы, поскольку для его удовлетворительного описания не находилось подходящего объекта в римановой геометрии. Такой объект нашелся в геометрии аффинной связности – это тензор аффинной деформации.

Борн и Инфельд [4] написали нелинейные уравнения для электромагнитного поля в пространстве-времени Минковского. Похожим образом Розен [5] записал нелинейные уравнения для гравитационного поля в пространстве-времени Минковского. Казалось,

*Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия

что тем самым он ввел в теорию гравитации Эйнштейна метрику Минковского в качестве фонового объекта. Но на самом деле оказалось, что в качестве фонового объекта он ввел не саму метрику Минковского, а лишь только связность Кристоффеля, которая в данном случае примитивна. Иначе говоря, Розен рассмотрел теорию Эйнштейна не в пространстве-времени Минковского, а в четырехмерном аффинном пространстве. В таком случае удастся сформулировать закон сохранения 4-импульса, но закон сохранения 6-момента количества движения сформулировать не удастся.

Чтобы можно было сформулировать все десять законов сохранения, необходимо дополнить фоновую аффинную геометрию до фоновой геометрии Минковского, но однозначно сделать это в теории Эйнштейна–Розена невозможно.

Действительно, если считать, что координаты x^a , в которых задана гравитационная метрика $g_{mn} dx^m dx^n$, по отношению к фоновой аффинной геометрии являются аффинными координатами, то, например, две разные метрики

$$dx^1 dx^1 + dx^2 dx^2 + dx^3 dx^3 - dx^4 dx^4$$

и

$$dx^1 dx^1 + dx^2 dx^2 + dx^3 dx^4$$

задают одну и ту же аффинную геометрию. Произвол в выборе фоновой метрики представляется в теории Эйнштейна–Розена в виде симметричной матрицы порядка 4 и сигнатуры $(1, 1, 1, -1)$ с вещественными элементами.

Не только примитивную связность, но и метрику Минковского в качестве фоновых объектов однозначно ввел в теорию гравитации Логунов в работах, подытоженных в книге [1], так что в этих работах уравнения гравитационного поля больше, чем в работе Розена, похожи на уравнения Борна–Инфельда.

Чтобы ввести в РТГ фоновую метрику, пришлось ввести и массу гравитона, которой нет места в ОТО. Напротив, если не вводить в теорию гравитации массу гравитона, то в конечном счете от любой фоновой метрики остается лишь связность Кристоффеля.

Введение фоновых объектов объясняется не только желанием определить понятие гравитационной энергии. Так, начиная с работы [3] интегральную теорему Гаусса в теории гравитации стали применять к псевдовекторным полям, что недопустимо. Ведь прежде чем позволить себе применить теорему Гаусса к какому-либо геометрическому объекту, нужно объявить его векторным полем, а чтобы иметь основания для такого объявления по отношению к псевдовекторным полям, необходимо и достаточно ввести в теорию гравитации фоновую связность $\tilde{\Gamma}_{mn}^a$.

Добавим, что как из уравнений Эйнштейна, так и из выражения для “псевдотензора энергии” можно узнать о фоновых объектах только то, что их там нет. Напротив, как в уравнения Эйнштейна, так и в “псевдотензор энергии” входят все гравитационные объекты: и связность Кристоффеля Γ_{mn}^a , и метрика Гаусса g_{mn} , и тензор Римана R_{klm}^a .

Отметим, что введение “псевдотензора энергии” в теорию гравитации наделило тензорный анализ псевдотензорной субкультурой. Фоновая связность является надежным лекарством от этой беды. Рецепт простой: компоненту Γ_{mn}^a надо заменить на разность компонент $\Gamma_{mn}^a - \tilde{\Gamma}_{mn}^a$. В результате такой замены, например, “псевдотензор энергии” превращается в тензор энергии гравитационного поля.

Тем не менее коварный вопрос остается без ответа. Он задается теперь в следующем виде: какую именно связность надо выбрать в качестве фоновой? В теории Логунова (впрочем, и в теории Розена) на этот вопрос готов ответ: надо выбрать ту связность, которая в качестве фонового объекта входит в состав функционала действия Лагранжа–Гильберта рассматриваемой системы.

Вариационный принцип Лагранжа–Гильберта принят в РТГ за основу. Функционал действия (LH) представляется в виде следующей суммы:

$$(LH) = (LH)_M + \frac{1}{16\pi} \int g^{mn} (P_{mn}^s P_{sa}^a - P_{mb}^a P_{an}^b) d\Omega + \frac{\mu^2}{16\pi} \int \left(d\Omega + d\check{\Omega} - \frac{1}{2} \check{g}_{mn} g^{mn} d\Omega \right), \quad (1)$$

где

$$d\Omega = \sqrt{|g|} dx^1 dx^2 dx^3 dx^4, \quad d\check{\Omega} = \sqrt{|\check{g}|} dx^1 dx^2 dx^3 dx^4, \quad (2)$$

через P_{mn}^a обозначен тензор аффинной деформации

$$P_{mn}^a = \check{\Gamma}_{mn}^a - \Gamma_{mn}^a. \quad (3)$$

Константа μ^2 имеет смысл квадрата массы гравитона. Через $(LH)_M$ обозначен функционал действия вещества в пространстве-времени с гравитационной метрикой g_{ab} . От фоновых объектов он не зависит. Как и в книге [1], здесь принята система единиц, в которой $G = c = \hbar = 1$.

Вариационные производные от (LH) по лагранжевым переменным надо приравнять нулю, а вариационная производная по фоновой метрике $\check{g}_{mn}$ определяет тензор T^{mn} энергии-импульса всей рассматриваемой системы в пространстве-времени с метрикой $\check{g}_{mn}$. Вариационная производная от $(LH)_M$ по гравитационной метрике g_{mn} определяет тензор M^{mn} энергии-импульса вещества в пространстве-времени с метрикой g_{mn} . Соответствующие частные вариации представимы в виде интегралов:

$$\delta(LH) = -\frac{1}{2} \int T^{mn} \delta\check{g}_{mn} d\check{\Omega}, \quad (4)$$

$$\delta(LH)_M = \frac{1}{2} \int M_{mn} \delta g^{mn} d\Omega = -\frac{1}{2} \int M^{mn} \delta g_{mn} d\Omega. \quad (5)$$

Согласно работе [6] следующие дивергенции равны нулю:

$$\check{\nabla}_m T^{mn} = 0, \quad \nabla_m M^{mn} = 0. \quad (6)$$

Возьмем вариацию (4) и получим тензор T^{mn} . В соответствии с (1) вариацию (4) представим в виде

$$-16\pi\delta(LH) = \frac{1}{2} \int J^{mn} (\delta\check{g}_{mn}) d\Omega + \frac{\mu^2}{2} \int (\delta\check{g}_{mn}) (\check{g}^{mn} d\check{\Omega} - g^{mn} d\Omega), \quad (7)$$

где

$$\frac{1}{2} \int J^{mn} (\delta\check{g}_{mn}) d\Omega = \delta \int g^{mn} (P_{mb}^a P_{an}^b - P_{mn}^s P_{sa}^a) d\Omega. \quad (8)$$

Следовательно,

$$16\pi T^{mn} = -\Pi^{mn} + \mu^2 \Psi^{mn}, \quad (9)$$

где

$$\Pi^{mn} = \omega J^{mn}, \quad \Psi^{mn} = \omega g^{mn} - \check{g}^{mn}, \quad (10)$$

через ω обозначена скалярная функция $\omega = \sqrt{g/\check{g}}$. Для лучшего понимания физического смысла тензорных полей Ψ^{mn} и T^{mn} мы рекомендуем книгу [1], где гравитационное поле описывается тензорной плотностью $\check{\phi}^{mn} = \sqrt{-\check{g}} \Psi^{mn}$, а источник гравитационного поля – тензорной плотностью $t^{mn} = \sqrt{-\check{g}} T^{mn}$.

Вариация (8) взята и тензор J^{mn} получен в работе [7]:

$$J^{mn} = (\check{\nabla}_l - P_l)(\check{\nabla}_k - P_k)J^{klmn}, \quad (11)$$

где

$$J^{klmn} = \check{g}^{mk}g^{ln} + \check{g}^{nk}g^{lm} - \check{g}^{kl}g^{mn} - \check{g}^{mn}g^{kl}, \quad (12)$$

а через P_k обозначен ковектор аффинной деформации

$$P_k = P_{ka}^a = -\partial_k \ln \omega. \quad (13)$$

Согласно (13) для всякого тензорного поля T

$$\omega(\check{\nabla}_k - P_k)T = \check{\nabla}_k \omega T.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \omega(\check{\nabla}_l - P_l)(\check{\nabla}_k - P_k)J^{klmn} &= \check{\nabla}_l \omega(\check{\nabla}_k - P_k)J^{klmn}, \\ \omega(\check{\nabla}_k - P_k)J^{klmn} &= \check{\nabla}_k \omega J^{klmn}, \end{aligned}$$

так что

$$\Pi^{mn} = \omega(\check{\nabla}_l - P_l)(\check{\nabla}_k - P_k)J^{klmn} = \check{\nabla}_l \check{\nabla}_k \omega J^{klmn}. \quad (14)$$

Теперь обозначим

$$\check{\nabla}_k \Psi^{mn} = \Psi_k^{mn}, \quad \Psi^n = \Psi_k^{kn}, \quad \check{\nabla}_n \Psi^n = \Psi, \quad \check{\nabla}_l \check{\nabla}_k \Psi^{mn} = \Psi_{lk}^{mn} \quad (15)$$

и заметим, что

$$\check{\nabla}_k(\omega J^{klmn}) = \check{g}^{mk}\Psi_k^{ln} + \check{g}^{nk}\Psi_k^{lm} - \check{g}^{lk}\Psi_k^{mn} - \check{g}^{mn}\Psi^l. \quad (16)$$

Следовательно,

$$\Pi^{mn} = \check{g}^{mk}\Psi_{lk}^{ln} + \check{g}^{nk}\Psi_{lk}^{lm} - \check{g}^{lk}\Psi_{lk}^{mn} - \check{g}^{mn}\Psi. \quad (17)$$

Подставив это выражение в (9), получим формулу связи гравитационного поля Ψ^{mn} с источником T^{mn} :

$$16\pi T^{mn} = \check{g}^{lk}\Psi_{lk}^{mn} + \check{g}^{mn}\Psi - \check{g}^{mk}\Psi_{lk}^{ln} - \check{g}^{nk}\Psi_{lk}^{lm} + \mu^2 \Psi^{mn}. \quad (18)$$

Гравитационная метрика выступает в функционале (LH) в качестве одной из лагранжевых переменных. Приравнявая нулю вариационную производную от функционала (LH) по гравитационной метрике g^{mn} , мы получаем следующие уравнения тяготения:

$$S_{mn} - \check{S}_{mn} - \frac{1}{2}g^{ab}(S_{ab} - \check{S}_{ab})g_{mn} = 8\pi M_{mn}, \quad (19)$$

где

$$S_{mn} = R_{mn} - \frac{\mu^2}{2}g_{mn}, \quad \check{S}_{mn} = \check{R}_{mn} - \frac{\mu^2}{2}\check{g}_{mn} \quad (20)$$

суть характеристические тензоры Риччи для метрических тензоров g_{mn} и $\check{g}_{mn}$ с характеристическими числами $\Lambda = \check{\Lambda} = \mu^2/2$.

Из (19) следует, что

$$g^{ab}(S_{ab} - \check{S}_{ab} + 8\pi M_{ab}) = 0. \quad (21)$$

Поэтому уравнения (19) приводятся к следующему виду:

$$S_{mn} - \check{S}_{mn} = 8\pi \left(M_{mn} - \frac{1}{2}g^{ab}M_{ab}g_{mn} \right). \quad (22)$$

Так как

$$\nabla_s g^{sm} \left[S_{mn} - \frac{1}{2}(g^{ab}S_{ab})g_{mn} \right] = 0, \quad (23)$$

то из уравнений (19) мы имеем следствие

$$\nabla_s g^{sm} \left[\check{S}_{mn} - \frac{1}{2}(g^{ab}\check{S}_{ab})g_{mn} \right] = -8\pi \nabla_s g^{sm} M_{mn}. \quad (24)$$

В силу второго из равенств (6) правая часть (24) равняется нулю, так что

$$\nabla_s g^{sm} \left[\check{S}_{mn} - \frac{1}{2}(g^{ab}\check{S}_{ab})g_{mn} \right] = 0. \quad (25)$$

Рассмотрим выражение (25) для произвольно взятого симметричного тензорного поля N_{mn} . Так как $\nabla_s g^{ab} = 0$, то

$$\nabla_s g^{sm} \left[N_{mn} - \frac{1}{2}(g^{ab}N_{ab})g_{mn} \right] = \frac{1}{2}g^{sm}[\nabla_s N_{mn} + \nabla_m N_{sn} - \nabla_n N_{sm}], \quad (26)$$

а так как

$$\nabla_n N_{sm} = \check{\nabla}_n N_{sm} + P_{ns}^r N_{rm} + P_{nm}^r N_{sr},$$

то

$$[\nabla_s N_{mn} + \nabla_m N_{sn} - \nabla_n N_{sm}] = [\check{\nabla}_s N_{mn} + \check{\nabla}_m N_{sn} - \check{\nabla}_n N_{sm}] + 2P_{sm}^r N_{rn}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \omega \nabla_s g^{sm} \left[N_{mn} - \frac{1}{2}(g^{ab}N_{ab})g_{mn} \right] &= \\ &= \Psi^r N_{rn} + \frac{1}{2}(\Psi^{sm} + \check{g}^{mn})(\check{\nabla}_s N_{mn} + \check{\nabla}_m N_{sn} - \check{\nabla}_n N_{sm}). \end{aligned} \quad (27)$$

При этом мы учли, что

$$\omega g^{sm} P_{sm}^r = \omega \Phi^r = \omega (\nabla_s - P_s) g^{sr} = \check{\nabla}_s (\omega g^{sr}) = \check{\nabla}_s \Psi^{sr} = \Psi^r.$$

Полагая в тождестве (27)

$$N_{mn} = \check{R}_{mn} - \frac{\mu^2}{2} \check{g}_{mn} = \check{S}_{mn}, \quad (28)$$

получаем

$$\begin{aligned} \nabla_s g^{sm} \left[\check{S}_{mn} - \frac{1}{2} (g^{ab} \check{S}_{ab}) g_{mn} \right] = \\ = \Psi^m \left(\check{R}_{mn} - \frac{\mu^2}{2} \check{g}_{mn} \right) + \Psi^{am} \left(\check{\nabla}_a \check{R}_{mn} - \frac{1}{2} \check{\nabla}_n \check{R}_{am} \right). \end{aligned} \quad (29)$$

Отсюда и из (25) следует, что для всякого решения уравнений (19) справедливо равенство

$$\Psi^m \left(\check{R}_{mn} - \frac{\mu^2}{2} \check{g}_{mn} \right) + \Psi^{am} \left(\check{\nabla}_a \check{R}_{mn} - \frac{1}{2} \check{\nabla}_n \check{R}_{am} \right) = 0. \quad (30)$$

Так как в РТГ согласно [1] фоновая связность примитивна, то после того как вычислены вариационные производные, надо положить $\check{R}_{klm}^a = 0$, а чтобы интегральные законы сохранения получались в привычном виде, надо положить

$$\check{g}_{mn} dx^m dx^n = dx^4 dx^4 - dx^1 dx^1 - dx^2 dx^2 - dx^3 dx^3. \quad (31)$$

Применив вариационный принцип Лагранжа–Гильберта к электродинамике Борна–Инфельда, мы рассмотрели [8]–[10] поведение электромагнитного поля на фоне произвольно заданной метрики $\check{g}_{mn}$ пространства-времени. Приобретенный нами опыт помог нам здесь рассмотреть гравитационное поле на таком же фоне.

Список литературы

- [1] А. А. Логунов. Теория гравитационного поля. М.: Наука, 2000.
- [2] А. П. Норден. Пространства аффинной связности. М.: Наука, 1976.
- [3] А. Эйнштейн. Геометрия и опыт. В сб.: Собрание научных трудов. Т. II. М.: Наука, 1966. С. 83.
- [4] M. Born, L. Infeld. Proc. Roy. Soc. A. 1934. V. 144. P. 425.
- [5] N. Rosen. Phys. Rev. 1940. V. 57. P. 147.
- [6] D. Hilbert. Grundlagen der Physik. Nachr. Göttingen. 1915. P. 395.
- [7] Н. А. Черников. Сообщ. ОИЯИ Р2-87-683. Дубна, 1987.
- [8] Н. А. Черников. Изв. вузов. Математика. 1976. № 5. С. 114.
- [9] Н. А. Черников, Н. С. Шавохина. Сообщ. ОИЯИ Р2-81-434. Дубна, 1981.
- [10] Н. А. Черников, Н. С. Шавохина. Изв. вузов. Математика. 1986. № 4. С. 62.

Поступила в редакцию 1.III.2002 г.,
после доработки 30.IV.2002 г.