Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Чугреев, О принципе причинности для рейсснер-нордстремовского поля в РТГ. Случай малых зарядов $q^2 \leq m^2$, *ТМФ*, 2002, том 132, номер 3, 475–483

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf375>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 16:54:31

© 2002 г.

Ю.В. Чугреев*

О ПРИНЦИПЕ ПРИЧИННОСТИ ДЛЯ РЕЙССНЕР-НОРДСТРЕМОВСКОГО ПОЛЯ В РТГ. СЛУЧАЙ МАЛЫХ ЗАРЯДОВ $q^2 \leq m^2$

Проведен анализ соблюдения принципа причинности для внешнего электровакуумного решения, создаваемого статическим сферически-симметричным электрически заряженным телом в релятивистской теории гравитации с нулевой массой гравитона (рейсснер-нордстремовское решение). Показано, что этот принцип ограничивает значения константы, содержащейся во внешнем решении, а также устанавливает нижний предел для радиуса источника. Установлено, что внешнее поле сверхплотных звездных конфигураций удовлетворяет принципу причинности.

Ключевые слова: релятивистская теория гравитации, принцип причинности, решение Рейсснера-Нордстрема.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рейсснер-нордстремовское решение в релятивистской теории гравитации (РТГ) (с нулевой массой гравитона) описывает точное внешнее электровакуумное поле статического сферически-симметричного электрически заряженного источника. Это решение впервые было получено Выблым [1] и позднее независимо Шошем (E. Soos) и Ионеску (D. Ionescu):

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2}} - r^2 d\Omega^2,$$

$$d\sigma^2 = \gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dt^2 - R'^2 dr^2 - R^2 d\Omega^2,$$

где

$$R(r) = r - m + C_1 \left(1 + \frac{r-m}{2p} \ln \left| \frac{r-m-p}{r-m+p} \right| \right), \quad m^2 > q^2, \quad (1)$$

$$R(r) = r - m - \frac{C_2}{(r-m)^2}, \quad m^2 = q^2. \quad (2)$$

*Московский государственный университет, Москва, Россия

Здесь

$$R' \equiv \frac{dR(r)}{dr}, \quad d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\varphi^2, \quad p \equiv \sqrt{m^2 - q^2}, \quad (3)$$

$\gamma_{\mu\nu}$ – метрический тензор пространства Минковского, $g_{\mu\nu}$ – метрика эффективного риманова пространства, R – радиальная координата в пространстве Минковского, r – шварцшильдова радиальная переменная, C_1, C_2 – произвольные постоянные. Отметим также, что простейший случай рейсснер-нордстремовского решения, соответствующий выбору $C_1 = 0$ ($m^2 > q^2$), рассматривался в статье [2], а в работе [3] было показано, что это решение удовлетворяет принципу причинности. Целью настоящей работы является проведение анализа соблюдения принципа причинности для рейсснер-нордстремовского решения РТГ общего вида (1), (2). Случай больших зарядов $m^2 < q^2$ более сложен. Он будет рассмотрен отдельно.

Впервые принцип причинности для сферически-симметричного решения РТГ был рассмотрен в работе [4] при $q^2 = 0$. Примененная методика включала в себя поиск ограничений на константу C_1 , при которых все возможные геодезические линии риманова пространства удовлетворяли принципу причинности во всей области допустимых значений, определяемой константой C_1 . Этот метод был довольно громоздким, так как варьированию подвергались параметры геодезических линий. В данной работе применяется более простая процедура проверки принципа причинности, впервые использованная для керр-ньюменовского решения РТГ [5]. А именно, варьируются не параметры геодезических линий, а компоненты самого изотропного вектора, входящего в определение принципа причинности. При этом не возникает необходимости решать уравнения геодезических.

Выведем соответствующие условия в общем сферически-симметричном случае. Согласно принципу причинности любой изотропный в римановом пространстве-времени вектор u^μ должен быть времениподобным в пространстве Минковского:

$$g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = 0, \quad (4)$$

$$\gamma_{\mu\nu} u^\mu u^\nu > 0. \quad (5)$$

Вводя компоненты $u^\mu = \{u^t, u^r, u^\theta, u^\varphi\}$, из уравнения (4) получаем

$$g_{tt}(u^t)^2 + g_{rr}(u^r)^2 + g_{\theta\theta}[(u^\theta)^2 + \sin^2(\theta)(u^\varphi)^2] = 0. \quad (6)$$

Отсюда следует, что

$$\left(\frac{u^r}{u^t}\right)^2 + \sin^2\theta \left(\frac{u^\varphi}{u^t}\right)^2 = -\frac{g_{tt}}{g_{\theta\theta}} - \frac{g_{rr}}{g_{\theta\theta}} \left(\frac{u^r}{u^t}\right)^2. \quad (7)$$

Подставляя левую часть в неравенство (5) и обозначая $u^r/u^t \equiv e^r$, находим

$$\gamma_{tt} - g_{tt} \frac{\gamma_{\theta\theta}}{g_{\theta\theta}} + (e^r)^2 \left(\gamma_{rr} - g_{rr} \frac{\gamma_{\theta\theta}}{g_{\theta\theta}} \right) \geq 0.$$

Это неравенство должно выполняться при любом допустимом значении e^r . Поскольку функция зависит от $(e^r)^2$ монотонно, то согласно принципу максимума она достигает экстремумов на границах интервала допустимых значений $(e^r)^2$, который можно получить из уравнения (6):

$$0 \leq (e^r)^2 \leq -\frac{g_{tt}}{g_{rr}}. \quad (8)$$

Таким образом, мы получаем два условия общего вида, определяющих соблюдение принципа причинности для сферически-симметричной задачи:

$$g_{\theta\theta}\gamma_{tt} \leq g_{tt}\gamma_{\theta\theta}, \quad (9)$$

$$g_{rr}\gamma_{tt} \leq g_{tt}\gamma_{rr}. \quad (10)$$

Неравенства (9), (10) совпадают с полученными в монографии [6] условиями для простейшего выбора координат $\gamma_{tt} = -\gamma_{rr} = 1$, $\gamma_{\theta\theta} = r^2$. В дальнейшем мы будем для проверки принципа причинности рассматривать соблюдение именно условий (9), (10).

2. ПРИНЦИП ПРИЧИННОСТИ ДЛЯ СЛУЧАЯ $q^2 \leq m^2$

Рассмотрим вначале общий характер и область допустимых значений для случая (1). График зависимости радиуса пространства Минковского R от шварцшильдовой радиальной переменной r представлен на рис. 1.

Рис. 1

Все кривые с отрицательными C_1 имеют минимум в точке r_-^* , лежащей выше сферы горизонта событий с радиусом $(m+p)$: $r_-^* > m+p$. Очевидно, что область допустимых значений отвечает лучу $r > r_-^*$. Аналогично в случае положительных C_1 переменная r также не может достигнуть значения $(m+p)$: $r > r_+^*$, где в точке $r_+^* > (m+p)$ обращается в нуль радиус пространства Минковского: $R(r_+^*) = 0$. Такая же картина имеет место и для случая $m^2 = q^2$: отрицательным значениям C_2 отвечают кривые с локальным минимумом, лежащим выше радиуса сингулярности преобразования, а положительным — кривые, оканчивающиеся на горизонтальной оси $R = 0$.

2.1. Рассмотрим случай отрицательных значений C_1 . Условие (10) в этом случае представим в виде

$$\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right)^{-2} \geq R'^2. \quad (11)$$

Очевидно, что оно выполняется во всей области допустимых значений, так как при $m^2 > q^2$ справедливы неравенства

$$\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right)^{-1} \geq \frac{r^2}{(r-m)^2} > 1,$$

а $R' < 1$, что видно из рис. 1.

Проверим теперь условие (9), представив его в виде

$$r^2 \geq \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right) R^2(r). \quad (12)$$

Поскольку асимптотика $R(r)$ при больших r имеет вид

$$R(r) = r - m - \frac{1}{3}C_1 \frac{p^2}{r^2} + O\left(\frac{1}{r^3}\right),$$

то в этой области неравенство (12) выполняется:

$$r^2 > r^2 \left(1 - \frac{4m}{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right)\right).$$

В силу монотонности $R(r)$ при $r > r_-^*$ для того, чтобы неравенство (12) было справедливым, достаточно добиться этого на границе, в точке $r = r_-^*$:

$$R'(r_-^*) = 0. \quad (13)$$

Так как

$$R'(r) = 1 + C_1 \left(\frac{1}{2p} \ln \frac{r-m-p}{r-m+p} + \frac{r-m}{(r-m)^2 - p^2} \right), \quad (14)$$

то из условий (12), (13) находим

$$|C_1| \leq \left(\frac{r_-^*}{p}\right)^2 \sqrt{(r_-^* - m)^2 - p^2}. \quad (15)$$

Условие (13) вместе с неравенством (15) позволяют установить интервал изменения отрицательной константы C_1 , обеспечивающий соблюдение принципа причинности решения во всей области допустимых значений $r \geq r_-^*$. Обозначим этот интервал для фиксированного значения заряда q как $C_1^- \leq C_1 < 0$. Значение r_-^* , отвечающее предельному значению C_1^- , можно найти из уравнения

$$\left[\frac{1}{2p} \ln \left(\frac{r_-^* - m - p}{r_-^* - m + p} \right) + \frac{r_-^* - m}{(r_-^* - m)^2 - p^2} \right] \frac{(r_-^*)^2}{p^2} \sqrt{(r_-^* - m)^2 - p^2} = 1. \quad (16)$$

В частном случае $q = 0$ мы получим $p = m$, а уравнение (16) можно представить в виде

$$\left[\frac{1}{2} \ln \frac{x-2}{x} + \frac{x-1}{x(x-2)} \right] x^2 \sqrt{x^2 - 2x} = 1. \quad (17)$$

Здесь $x \equiv r_-^*/m$. Это уравнение, как и следовало ожидать, совпадает с уравнением для r_-^* , полученным в работе [4] по другой методике. Его решение легко найти численно:

$$\frac{C_1^-}{m} = -162.202 \dots, \quad \frac{r_-^*}{m} = 5.8477 \dots$$

Решения со значениями C_1 в интервале $C_1^- \leq C_1 \leq 0$ удовлетворяют принципу причинности для случая $q = 0$.

Уравнение (16) трансцендентное. Для дальнейшего анализа его удобно записать в безразмерных величинах $x \equiv r_-^*/m$, $\rho \equiv p/m$, $0 \leq \rho \leq 1$:

$$\left[\frac{1}{2\rho} \ln \frac{x-1-\rho}{x-1+\rho} + \frac{x-1}{(x-1)^2 - \rho^2} \right] \frac{x^2}{\rho^2} \sqrt{(x-1)^2 - \rho^2} = 1. \quad (18)$$

Решения этого уравнения представлены графически на рис. 2 и 3.

Рис. 2

Рис. 3

Зависимость $x = x(\rho)$, как следует из рис. 2, очень слабая, в отличие от $C_1^- = C_1^-(\rho)$, представленной на рис. 3. При $\rho \rightarrow 0$ ($q^2 \rightarrow m^2$) значение $|C_1^-|$ быстро растет, а его асимптотика в этой области имеет вид

$$\frac{C_1^-}{m} \rightarrow -\frac{3}{2} \frac{(x-1)^3}{\rho^2}.$$

Таким образом, электровакуумная область причинности для любого заряда тела, не превышающего его массы ($q^2 < m^2$), в случае отрицательной константы C_1 не может иметь радиус меньше некоторого предельного, равного $\approx 5.4495 m$, что соответствует случаю $q = m$ (см. ниже раздел 3). Результат довольно неожиданный, если принять во

внимание то, что этот предельно малый радиус более чем в два раза превосходит радиус рейсснер-нордстремовского горизонта $m + \sqrt{m^2 - q^2} \leq 2m$. Сформулируем этот вывод в несколько ином виде: если внутреннее решение задачи со статическим электрически заряженным источником сшивается с внешним полем, содержащим отрицательную константу C_1 , то радиус этого тела должен превышать $\approx 5.4495 m$. В случае $C_1 > 0$ мы получим аналогичный вывод, однако величина предельного минимального радиуса тела будет меньше.

2.2. Перейдем к подробному рассмотрению случая положительных значений константы C_1 . Вновь необходимо проанализировать соблюдение условий (9), (10), вытекающих из принципа причинности. Очевидно, что условие (9), записанное в форме неравенства (12)

$$r^2 \geq \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right) R^2(r) \geq \left(1 - \frac{m}{r}\right)^2 R^2(r),$$

справедливо во всей области допустимых значений $\infty \geq r \geq r_+^*$, поскольку $R(r) < r - m$. Проверим теперь условие (10), записанное в виде неравенства (11).

Поскольку асимптотика R' при больших r имеет вид

$$R'(r) = 1 + \frac{2}{3} C_1 \frac{p^2}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^4}\right),$$

то условие (11) в этой области выполняется, так как

$$\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right)^{-1} = 1 + \frac{2m}{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

В силу монотонности R' в области $\infty \geq r \geq r_+^*$ для того, чтобы неравенство (11) было справедливым, достаточно добиться этого на границе, в точке $r = r_+^*$ такой, что

$$R(r_+^*) = 0. \quad (19)$$

Отсюда и из неравенства (11) находим

$$C_1 \leq \left(\frac{r_+^*}{p}\right)^2 \frac{(r_+^* - m)^2}{p^2}. \quad (20)$$

Уравнение (19) вместе с неравенством (11) позволяют установить интервал изменения положительной константы C_1 , обеспечивающий соблюдение принципа причинности во всей области допустимых значений. Обозначим этот интервал для фиксированного значения заряда как $0 < C_1 \leq C_1^+$. Значение r_+^* , отвечающее предельному значению $C_1^+ > 0$, можно найти из уравнения

$$\left[\frac{r_+^* - m}{2p} \ln \left(\frac{r_+^* - m - p}{r_+^* - m + p} \right) + 1 \right] \frac{(r_+^*)^2}{p^2} = -1. \quad (21)$$

В частном случае нулевого заряда ($p = m$) это уравнение можно представить в виде

$$\left[\frac{x-1}{2} \ln \frac{x-2}{x} + 1 \right] x^2 + 1 = 0, \quad (22)$$

где $x \equiv r_+^*/m$. Это уравнение, как и в случае отрицательных C_1 , совпадает с уравнением для r_+^* , полученным в работе [4] по другой методике. Его решение легко найти численно:

$$\frac{C_1^+}{m} = 14.0986 \dots, \quad \frac{r_+^*}{m} = 2.7981 \dots$$

Решения со значениями C_1 в интервале $0 \leq C_1 \leq C_1^+$ и r в области $\infty \geq r \geq r_+^*$, где r_+^* отвечает соответствующему C_1^+ , удовлетворяют принципу причинности для случая $q = 0$. Общий случай определяется уравнением (21), которое удобно переписать с использованием безразмерных величин $x \equiv r_+^*/m$, $\rho \equiv p/m$, $0 \leq \rho \leq 1$:

$$\left[\frac{x-1}{2\rho} \ln \frac{x-1-\rho}{x-1+\rho} + 1 \right] \frac{x^2}{\rho^2} = -1. \quad (23)$$

Решения этого трансцендентного уравнения представлены графически на рис. 4.

Рис. 4

Так же как и для случая отрицательных C_1 , зависимость $x = x(\rho)$ очень слабая и существует минимальное значение $x = 2.360$. Напротив, соответствующие значения (положительные) C_1^+ изменяются сильно: от бесконечности при $\rho = 0$ до 14.1 при $\rho = 1$, как показано на рис. 5.

Рис. 5

При $\rho \rightarrow 0$ ($q^2 \rightarrow m^2$) значение C_1^+/m быстро растет и имеет асимптотику

$$\frac{C_1^+}{m} \rightarrow \frac{3(x-1)^3}{\rho^2}.$$

Аналогично случаю отрицательных C_1 можно сделать вывод, что при положительном значении C_1 тело не может иметь радиус меньше $2.360 m$, что превышает радиус рейсснер-нордстремовского горизонта.

3. ПРИНЦИП ПРИЧИННОСТИ ДЛЯ СЛУЧАЯ $q^2 = m^2$

Этот случай рассматривается аналогично предыдущему случаю малых зарядов ($q^2 < m^2$). Анализ упрощается, так как все уравнения легко решаются в явном виде. В результате принципу причинности удовлетворяют решения во всей области допустимых значений r , если только константа C_2 находится внутри интервала

$$-44.0454 \dots = -\frac{\sqrt{2/3}}{3(1 - \sqrt{2/3})^3} \leq \frac{C_2}{m^3} \leq \frac{1}{8}.$$

Для $C_2/m^3 = 1/8$ соответствующее предельное значение r_+^* равно $3m/2$, а для наименьшего отрицательного значения C_2 можно найти, что $r_-^*/m = 1/(1 - \sqrt{2/3}) \approx 5.4495$.

Отметим, что как в случае $q^2 < m^2$, так и в случае $q^2 = m^2$ область допустимых отрицательных значений констант C_1 и C_2 значительно больше области их положительных значений, тогда как область допустимых значений r_-^* во всех случаях заметно превышает область r_+^* .

Рассмотрим теперь оставшийся случай $C_2 = 0$. Область допустимых значений этого решения

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{(r-m)^2}{r^2} dt^2 - \frac{r^2 dr^2}{(r-m)^2} - r^2 d\Omega^2, \\ d\sigma^2 &= dt^2 - dr^2 - (r-m)^2 d\Omega^2 \end{aligned} \quad (24)$$

есть $m \leq r < \infty$. Отметим, что в этом случае имеется полюс второго порядка для g_{rr} и нуль второго порядка для g_{tt} на рейсснер-нордстремовском горизонте $r = m$. Эта сфера в шварцшильдовых координатах отвечает точке начала отсчета в сферических координатах пространства Минковского.

Условия причинности (9), (10) представимы в виде

$$r^2 \geq \frac{(r-m)^4}{r^2}, \quad \frac{r^2}{(r-m)^2} \geq 1.$$

Они выполняются во всей области допустимых значений, следовательно, решение (24) удовлетворяет принципу причинности.

4. ПРОВЕРКА СОБЛЮДЕНИЯ ПРИНЦИПА ПРИЧИННОСТИ ДЛЯ ВНЕШНЕГО ПОЛЯ СВЕРХПЛОТНЫХ ЗВЕЗД

В работе [7] Авакяном была приведена таблица параметров сверхплотных звездных конфигураций, состоящих из реального газа барионов. Эти значения были получены в результате численного интегрирования внутреннего решения РТГ и последующего сшивания с вакуумным решением (1) для случая $q = 0$ и $C_1 \neq 0$. Покажем, что для таких конфигураций вся вакуумная область удовлетворяет принципу причинности. Представим данные работы [7] в виде табл. 1, где через r_S обозначен радиус звезды в шварцшильдовых координатах, константа C_1 положительна.

Таблица 1

ρ_c (г/см ³)	$3.55 \cdot 10^{15}$	$6.81 \cdot 10^{15}$	$9.79 \cdot 10^{15}$	$1.69 \cdot 10^{16}$
$m/m_\odot$	0.35	0.77	1.05	1.39
r_S (км)	16.16	12.86	12.06	10.49
C_1 (км)	2.9	2.8	2.6	2.2

Чтобы доказать причинность вакуумной области этих решений, достаточно убедиться, что для всех этих конфигураций $C_1/m < 14.1$, а радиус звезды r_S превышает значение r_+^* , отвечающее данному выбору C_1 . Объединив эти величины в табл. 2, мы приходим к заключению, что представленные в работе [7] решения удовлетворяют принципу причинности во внешней области.

Таблица 2

C_1/m	11	4.6	3.5	2.2
r_S (км)	16.16	12.86	12.06	10.49
r_+^* (км)	0.7	1.4	1.7	2.2

Благодарности. Автор выражает благодарность А. А. Логунову, М. А. Мествиришвили и Д. Ионеску за полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] Ю. П. Выблый. Поле точечного электрического заряда в релятивистской теории гравитации. В сб.: Точные решения уравнений Эйнштейна и их физическая интерпретация. Ред. И. Р. Пийр. Тарту: Изд-во Тартусского ун-та, 1988. С. 74–76.
- [2] П. В. Карабут, Ю. В. Чугреев. ТМФ. 1989. Т. 78. № 2. С. 305–313.
- [3] П. В. Карабут, Ю. В. Чугреев. ТМФ. 1990. Т. 83. № 3. С. 470–475.
- [4] П. В. Карабут, Ю. В. Чугреев. ТМФ. 1990. Т. 84. № 3. С. 474–480.
- [5] Ю. В. Чугреев. ТМФ. 1991. Т. 88. № 3. С. 459–466.
- [6] А. А. Логунов. Теория гравитационного поля. М.: Наука, 2000.
- [7] Р. М. Авакян. О решении для изолированной массы в гармонических координатах. В сб.: Точные решения уравнений Эйнштейна и их физическая интерпретация. Ред. И. Р. Пийр. Тарту: Изд-во Тартусского ун-та, 1988. С. 22–24.

Поступила в редакцию 19.III.2002 г.