Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Ширков, К поведению эффективной связи КХД в инфракрасной области,
ТМФ, 2002, том 132, номер 3, 484–496

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf376>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 15:20:25

К ПОВЕДЕНИЮ ЭФФЕКТИВНОЙ СВЯЗИ КХД В ИНФРАКРАСНОЙ ОБЛАСТИ

Обзор непертурбативных результатов для эффективной функции связи КХД $\bar{\alpha}_s$, получаемых методами численных симуляций континуального интеграла на решетке и решения приближенных уравнений Швингера–Дайсона, обнаруживает замечательное разнообразие поведения $\bar{\alpha}_s(Q^2)$ в инфракрасной области, даже на качественном уровне. В свою очередь, это поднимает вопрос о соответствии результатов, находимых различными группами авторов. Эта ситуация рассматривается с привлечением зависящих от массовой переменной преобразований константы связи, сделан вывод о том, что задача инфракрасного поведения эффективной функции связи, а также пропагаторов, в КХД покамест не является достаточно хорошо определенной и ее постановка требует дальнейшего уточнения.

Ключевые слова: квантовая хромодинамика, континуальный интеграл, непертурбативная инфракрасная асимптотика.

1. ВВЕДЕНИЕ

Это исследование посвящено вопросу поведения, а также определения инвариантной функции связи (ИФС) квантовой хромодинамики (КХД) $\bar{\alpha}_s$ в инфракрасной (ИК) области. Понятие ИФС является центральным в современной практике квантово-полевых применений метода ренормализационной группы (РГ). В КТП само наличие РГ тесно связано с конечными перенормировочными преобразованиями Дайсона. Поэтому ИФС, или инвариантный заряд, определяется (см. пионерские работы [1]–[3], а также главу “Ренормализационная группа” в монографии [4]) через произведение, включающее перенормировочные факторы z_i , которое инвариантно по отношению к указанным преобразованиям, без какого-либо использования предела слабой связи или ультрафиолетовой (УФ) асимптотики.

Выражая факторы z_i через значения перенормированных функций КТП, обычно получают выражение для ИФС $\bar{\alpha}(Q^2)$ как функции одного аргумента кинематического типа – переданного импульса $Q \equiv \sqrt{Q^2} = \mathbf{Q}^2 - Q_0^2$ (либо импульса отсчета) – в виде произведения константы связи, амплитуд пропагаторов и некоторой вершинной функции в

* Лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова, Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия. E-mail: shirkovd@thsun1.jinr.ru

импульсном представлении (см. ниже уравнения (1)–(3)). При этом все перенормированные величины соотнесены с какой-либо определенной схемой перенормировки.

Подобные определения были введены и использованы в контексте теории возмущений еще в середине 50-х годов. В современной практике $\bar{\alpha}(Q^2)$ обычно рассматривается в УФ-пределе. Так называемая безмассовая перенормировочная схема минимальных вычитаний $\overline{\text{MS}}$ оказывается наиболее удобной и потому наиболее употребительной в УФ-анализе.

Между тем упомянутые определения справедливы для более общего, содержащего зависимость от масс(ы), случая (см. [3]–[5]). В калибровочных моделях КТП, содержащих несколько вершин с одной и той же константой связи, эта массовая зависимость, в свою очередь, приводит к специфической *вершинной зависимости*, т.е. зависимости от вида вершинной функции, использованной в определении ИФС. Например, в КХД могут быть использованы трехглюонная, глюон-духовая, четырехглюонная и различные глюон-кварковые вершины. В безмассовой $\overline{\text{MS}}$ -схеме все ИФС, построенные на основе различных вершин, являются одинаковыми. Однако в массивном случае разница между ними может оказаться существенной в области $Q \lesssim m$ [6].

Здесь уместно прокомментировать различие между безмассовыми и “массивными” схемами вычитаний и возникающими на их основе РГ-решениями. Так, например, существуют два варианта $\overline{\text{MS}}$ -схемы. Ограничимся моделью КТП с одной константой связи g . В общепринятом варианте, для модели КТП с одной константой связи g , на основе безмассовых контрчленов строится бета-функция одного аргумента $\beta(g)$. Решение дифференциального РГ-уравнения для ИФС (и других функций) приводит к выражению $\bar{g} = f(\ell, g)$, зависящему от логарифма $\ell = \ln(Q^2/\mu^2)$ и описывающему УФ-асимптотику. В то же время в более общем формализме РГ-генераторы (бета- и гамма-функции), определяемые на основе перенормированных в $\overline{\text{MS}}$ -схеме, зависящих от массовой переменной m исходных приближенных выражений, оказываются функциями двух безразмерных переменных Q^2/m^2 и g . Решения РГ-уравнений приводит к выражениям, зависящим от дополнительного массового аргумента m^2/μ^2 . Для ИФС общее выражение имеет вид $\bar{g}(Q^2/\mu^2, m^2/\mu^2, g)$. Массовая зависимость становится существенной в ИК-области. Таким образом в КЭД была описана в свое время ИК-особенность пропагатора электрона [2], [7].

Указанная массовая зависимость, по нашему мнению, проявляется в современном непертурбативном анализе свойств КХД в ИК-области, в частности в вычислениях функционального интеграла на решетке и в решениях усеченных уравнений Швингера–Дайсона (УУШД). Различные группы исследователей берут за основу разные определения перенормированной константы связи и ИФС в ИК-области. Например, тюбингенская группа использует [8] для определения ИФС глюон-духовую вершину, парижская группа [9], [10] – трехглюонную, а “транскеанская” группа [11], [12] – глюон-кварковую.

Раздел 2 содержит краткий обзор результатов для $\bar{\alpha}_s$, полученных различными группами авторов путем решеточных симуляций и решений УУШД, приводящих к примечательно пестрой картине качественно разнообразных поведений в ИК-области.

В разделе 3 мы напоминаем происхождение понятия ИФС и отмечаем, что оно не свя-

зано с теорией возмущений и УФ-асимптотикой. Рассмотрены вопрос о неоднозначности определения $\bar{\alpha}_s(Q^2)$ и формализм преобразований константы связи и сопутствующих преобразований ИФС. При обсуждении используются преобразования константы связи, подобные известным преобразованиям между различными схемами перенормировок, содержащие зависимость от масс(ы). Здесь оказывается существенным понятие *вершинной зависимости*.

В разделе 4 мы возвращаемся к вопросу о соответствии между различными ИК-асимптотиками $\bar{\alpha}_s(Q^2)$. В частности, построены модельные примеры преобразований ИФС, сингулярных в ИК-области и в отдельных случаях приводящих к ИК-асимптотикам, качественно близким к приведенным в разделе 2.

Наш вывод состоит в том, что проблема ИК-асимптотик эффективной связи $\bar{\alpha}_s(Q^2)$ (а также пропагаторов) не является сформулированной достаточно четко. Результаты различных групп, полученные в импульсном представлении, не следует сравнивать между собой напрямую. Одним из возможных критериев для сравнения остаются результаты расчетов адронных характеристик.

2. НЕПЕРТУРБАТИВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ В ИК-ОБЛАСТИ

Этот раздел содержит компендиум непертурбативных результатов, полученных различными группами при вычислениях ИФС $\bar{\alpha}_s(Q^2)$ в ИК-области путем численных симуляций на решетке и с помощью приближенных решений УУШД. Каждая группа использует свое собственное определение для $\bar{\alpha}_s(Q^2)$, совместимое с режимом асимптотической свободы в УФ-области, и получает собственные, отличные от других, результаты в ИК-области.

2.1. Тюбингенская группа: глюоны и духи. Исследования группы из Тюбингена (см. обзор в работе [8]) ведутся параллельно по двум направлениям: решение УУШД и решеточные симуляции четырехмерного евклидова континуального интеграла для квантовой глюодинамики. Таким образом, рассматривается лишь глюон-духовый сектор КХД, что оказывается особенно удобным для построения и анализа УУШД в поперечной калибровке. Здесь перенормировочная функция Γ глюон-духовой вершины в силу тождеств Уорда–Славнова представима через соответствующие функции для глюонного Z и духового G пропагаторов. В то же время в калибровке Ландау функция Γ выпадает из определения ИФС, построенной на глюон-духовой вершине:

$$\bar{\alpha}_T(Q^2) = \alpha_s Z(Q^2) G^2(Q^2). \quad (1)$$

Поэтому только два пропагатора входят в усеченные надлежащим образом уравнения Швингера–Дайсона.

Симуляции на решетке для пропагаторов показывают [13], [14] весьма специфическое ИК-поведение. Глюонная функция перенормировки $Z(Q^2)$ (она же поперечная амплитуда глюонного пропагатора) при убывании переданного импульса проходит через максимум при $Q = \sqrt{Q^2} \simeq 1$ ГэВ и затем спадает к нулю примерно как Q , амплитуда духового пропагатора $G(Q^2)$ монотонно возрастает и имеет степенную ИК-сингулярность,

близкую к $Q^{-1/2}$, в то время как их произведение (1) для $\bar{\alpha}_T(Q^2)$ монотонно стремится к конечному ИК-пределу. Эта картина качественно подтверждается результатами решения УУШД, которые приводят [13]–[15] к степенным ИК-асимптотикам

$$G(Q^2) \simeq (Q)^{-\kappa}, \quad Z(Q^2) \simeq (Q^2)^\kappa, \quad \kappa = 0.595,$$

и предельному ИК-значению $\bar{\alpha}_T(0) = 2.97 = 8.92/N_c$.

2.2. Парижская группа: трехглюонная вершина. В работах парижской группы ИФС строится на основе несимметрично вычитенной трехглюонной вершины $\tilde{\Gamma}(Q^2) \equiv \Gamma_{3gl}(Q^2, 0, Q^2)$ в калибровке Ландау для модели КХД с *двумя массивными кварками*. В этой схеме перенормировки ИФС

$$\bar{\alpha}_P(Q^2) = \alpha_s \tilde{\Gamma}^2(Q^2) Z^3(Q^2) \quad (2)$$

согласно вычислениям на решетке имеет весьма своеобразное поведение в ИК-области [9]. При убывании Q она проходит через максимум при $Q \simeq 1 - 1.5$ ГэВ, а затем резко падает и оказывается близкой к нулю при $Q \simeq 0.5$ ГэВ. Количества данных и их точности не хватает для определения ИК-асимптотики, однако не исключено степенное убывание вида $\sim (Q^2)^\nu$, $\nu \gtrsim 2$.

2.3. “Трансокеанская” группа: глюон-кварковая вершина. “Трансокеанская” группа¹⁾ использует вычисления на решетке для КХД с *двумя массивными кварками*. Рассчитана эффективная функция связи, определенная на основе кварк-глюонной вершины в схеме импульсных вычитаний при нулевом моменте глюона $\Gamma_{TO}(Q^2) \equiv \Gamma_{q-gl}(0; Q^2, Q^2)$. Результаты для ИФС

$$\bar{g}_{TO}(Q^2) = g \Gamma_{TO}(Q^2) Z^{1/2}(Q^2) S(Q^2) \quad (3)$$

(S – амплитуда кваркового пропагатора), полученные путем решеточных симуляций, качественно близки (см. рис. 4 в работе [11] или рис. 8 и 9 в работе [12]) к результатам вычислений парижской группы. Однако ИК-асимптотика, по-видимому, имеет другой показатель

$$\bar{g}(Q) \simeq (Q^2)^{\mu/2}, \quad \bar{\alpha} \simeq (Q^2)^\mu, \quad \mu \lesssim 1.$$

2.4. Группа “ALPHA”: функционал Шредингера. Группа “ALPHA” изучает КХД с *двумя безмассовыми кварковыми ароматами* и использует для решеточных симуляций так называемый *функционал Шредингера*, определенный на четырехмерном евклидовом пространственно-временном многообразии специальным образом: по трем пространственным измерениям наложены циклические граничные условия, тогда как “временная” координата выделена – значения калибровочных полей на “верхней” и “нижней” крышках отличаются на фазовый фактор $e^{-\eta}$. Перенормированная

¹⁾ Название условно, поскольку эта группа включает исследователей из удаленных друг от друга центров, в частности из Австралии, Великобритании и континентальной Европы.

эффективная функция связи $\bar{\alpha}_{\text{SF}}$ определена через производную $\Gamma' = \partial\Gamma/\partial\eta$ эффективного действия, представленного в виде разложения

$$\Gamma = \alpha^{-1}\Gamma_0 + \Gamma_1 + \alpha\Gamma_2 + \dots$$

как функция пространственного размера L многообразия (см. уравнения (2.43) в работе [16] и (8.3) в [17])

$$\bar{\alpha}_{\text{SF}}(L) = \frac{\Gamma'_0}{\Gamma'}, \quad (4)$$

т.е. как функция в *координатном представлении*. Для изучения эволюции $\bar{\alpha}_{\text{SF}}(L)$ использован особый прием [17]. Вводится *ступенчатая функция подобия*

$$\sigma(\bar{\alpha}_{\text{SF}}(L)) = \bar{\alpha}_{\text{SF}}(2L),$$

для явного нахождения которой следует знать бета-функцию. В то же время функция σ может быть определена численно из сравнения результатов решеточных симуляций для решеток размером L и $2L$ (см. рис. 16 в работе [17]). Полученные на этой основе недавние результаты [18] выявляют чрезвычайно быстрый рост $\bar{\alpha}_{\text{SF}}(L)$ в области $L \rightarrow \infty$ при $\bar{\alpha}_{\text{SF}} \simeq 1$. Аналитическая аппроксимация для результатов численных расчетов поведения $\bar{\alpha}_{\text{SF}}$ имеет экспоненциальную (!) форму

$$\bar{\alpha}_{\text{SF}}(L) \simeq e^{ML}, \quad M \simeq \frac{2.3}{L_{\text{max}}}, \quad (5)$$

где L_{max} — точка отсчета в области достаточно слабой связи — неявно определяется условием $\bar{\alpha}_{\text{SF}}(L_{\text{max}}) = 0.275$, что дает $L_{\text{max}} \sim 1/m_\tau$. При физической интерпретации $\bar{\alpha}_{\text{SF}}(L)$ подразумевается “обычное квантово-механическое” отождествление $L = 1/Q$.

3. ФУНКЦИЯ СВЯЗИ, ЗАВИСЯЩАЯ ОТ МАСС(Ы)

Технически выделяют схемы перенормировок, в которых параметр шкалы μ совпадает с импульсом вычитания (так называемые МОМ-схемы). Для них условие нормировки ИФС имеет простой вид

$$\bar{g}|_{Q^2=\mu^2} = g_\mu. \quad (6)$$

В общем случае²⁾, к которому, в частности, относятся схемы минимальных вычитаний, в том числе общепринятая $\overline{\text{MS}}$ -схема, это условие содержит “функцию нормировки”

$$\bar{g}|_{Q^2=\mu^2} = N(g), \quad (7)$$

которая может зависеть от масс(ы).

Условие нормировки (6) отвечает наиболее простому функциональному уравнению для ИФС, которое в безмассовом приближении имеет вид

$$\bar{g}(x; g_\mu) = \bar{g}\left(\frac{x}{t}; \bar{g}(t; g_\mu)\right), \quad x = \frac{Q^2}{\mu^2}. \quad (8)$$

При этом условие (6) оказывается следствием уравнения (8). Мы будем называть его *каноническим*. Для случая (7) функциональное уравнение имеет более сложный вид (см. ниже уравнение (14)), в котором также учтена зависимость от массы m .

²⁾В этом разделе для константы связи, наряду с g , употребляется обозначение $\alpha = g^2/(4\pi)$, более принятое в калибровочных моделях.

3.1. “Массивный” случай. Перейдем к более общему случаю, когда учитывается зависимость от массы. Здесь ИФС приобретает дополнительный аргумент, который удобно выбрать (см., например, [4]) в виде безразмерного отношения $m^2/\mu^2 = y$. Условие нормировки для ИФС $\bar{g}(x, y; g)$, обобщающее (7), можно записать в виде

$$\bar{g}_N(1, y; g) = N(y, g), \quad (9)$$

отличном от канонического. Оно содержит функцию двух переменных.

Отметим, что здесь введено новое специальное обозначение $\bar{g}_N$ для ИФС с условием нормировки (9) $N \neq g$. Мы сохраняем прежнее обозначение $\bar{g}$ для частного случая ИФС, нормированной каноническим образом (6). При этом будем использовать термины ИФС для $\bar{g}_N$ с условием нормировки (9) и *эффективная функция связи* (ЭФС) или *эффективная связь* для $\bar{g}$, нормированной канонически.

Эффективная связь в массивном случае удовлетворяет довольно простому функциональному уравнению

$$\bar{g}(x, y; g) = \bar{g}\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}; \bar{g}(t, y; g)\right), \quad x = \frac{Q^2}{\mu^2}, \quad y = \frac{m^2}{\mu^2}, \quad (10)$$

а также групповым дифференциальным уравнениям

$$x \frac{\partial \bar{g}(x, y; g)}{\partial x} = \beta\left(\frac{y}{x}, \bar{g}\right), \quad \mathcal{X}_\beta \cdot \bar{g}(x, y; g) = 0, \quad (11)$$

где

$$\mathcal{X}_\beta \equiv \left\{ x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} - \beta(y, g) \frac{\partial}{\partial g} \right\}, \quad \beta(y, g) \equiv \left. \frac{\partial \bar{g}(\xi, y; g)}{\partial \xi} \right|_{\xi=1}. \quad (12)$$

Уравнения (11) и (12) являются обобщениями более известных безмассовых уравнений и переходят в них при $y = 0$. Мы даем специальное обозначение $\mathcal{X}_\beta$ для инфинитезимального группового оператора (оператора Ли), который в данном контексте был введен Овсянниковым [19] в 1956 г. Его нижний индекс отвечает координате последнего слагаемого. Мы будем называть $\mathcal{X}$ *оператором Ли-Овсянникова*.

ЭФС $\bar{g}$ по определению удовлетворяет каноническому условию нормировки

$$\bar{g}(1, y; g) = g, \quad (13)$$

совместному с функциональным уравнением (10), тогда как прочие РГ-функции одного аргумента, подобные амплитудам пропагаторов и моментам структурных функций, в МОМ-схеме при $Q^2 = \mu^2$ обычно нормированы на единицу.

Функциональное уравнение для ИФС имеет более сложную форму

$$\bar{g}_N(x, y; g) = \bar{g}_N\left\{\frac{x}{t}, \frac{y}{t}; n\left[\frac{y}{t}, \bar{g}_N(t, y; g)\right]\right\}, \quad (14)$$

которая отражает групповой закон сложения и отвечает условию нормировки (9). В него входит функция n , обратная к N по отношению ко второму аргументу.

Дифференцируя уравнение (14) двумя различными способами, получаем групповые дифференциальные уравнения

$$\frac{\partial \bar{g}_N(x, y; g)}{\partial \ln x} = B\left(\frac{y}{x}; \bar{g}_N(x, y; g)\right), \quad \mathcal{X}_\beta \cdot \bar{g}_N(x, y; g) = 0, \quad (15)$$

причем

$$B(y, g) = \frac{\partial}{\partial \xi} \bar{g}_N\{\xi, y; n(y, g)\}\big|_{\xi=1},$$

$$\beta(y, g) = \left\{ B(y, \gamma) \frac{\partial}{\partial \gamma} - y \frac{\partial}{\partial y} \right\} n(y, \gamma) \bigg|_{\gamma=N(y, g)}. \quad (16)$$

Итак, в случае ИФС мы имеем дело с *двумя различными бета-функциями* B и β , входящими в разные дифференциальные уравнения (15) и связанными между собой вторым из соотношений (16).

Заметим, что ИФС $\bar{g}_N$ можно трактовать как ЭФС, отнесенную к другой константе связи $\gamma \equiv N(y, g)$. В самом деле, вводя новую функцию связи

$$\bar{\gamma}(x, y; \gamma) = \bar{g}_N\{x, y; n(y, \gamma)\}, \quad (17)$$

находим, что она удовлетворяет простому функциональному уравнению вида (10), дифференциальным уравнениям с оператором Ли–Овсянникова $\mathcal{X}_B$ с одним и тем же генератором $B(y, \gamma)$ и может рассматриваться как ЭФС для константы связи γ .

С другой стороны, если определить некоторую новую функцию $\tilde{g}$ соотношением

$$\tilde{g}(x, y; g) = n\left\{\frac{y}{x}, \bar{g}_N(x, y; g)\right\} = n\left\{\frac{y}{x}, \bar{\gamma}(x, y; N(y, g))\right\}, \quad (18)$$

то она также будет удовлетворять простому функциональному уравнению (10) и может рассматриваться на равных основаниях с ИФС $\bar{\gamma}$. Оба дифференциальных уравнения для $\tilde{g}$ содержат один и тот же генератор β . Мы назовем эту функцию *групповой функцией связи*, чтобы отметить, что, вообще говоря, она не связана с ИФС преобразованием Дайсона.

3.2. Преобразования, зависящие от массы. Рассмотрим теперь в общем, зависящем от массовой переменной, случае преобразование от константы связи γ и ИФС $\bar{\gamma}$ к новой константе связи g и ЭФС $\bar{g}$. К последовательности таких преобразований сводится, в частности, переход от популярной безмассовой $\overline{\text{MS}}$ -схемы к упоминавшейся выше массивной $\overline{\text{MS}}$ -схеме.

Положим без потери общности, что соответствующие константы связи γ и g связаны соотношениями $\gamma = N(y, g)$, $g = n(y, \gamma)$. Тогда согласно (18) ИФС соотносятся как

$$\bar{\gamma}(x, y; \gamma) = N\left\{\frac{y}{x}, \bar{g}(x, y; g)\right\}, \quad (19)$$

а соответствующие групповые генераторы связаны соотношениями (16).

Иными словами, переход

$$g \rightarrow \gamma = N(y, g) \quad (20)$$

можно рассматривать как преобразование, обусловленное изменением способа перенормировки. Таким образом, от набора $\{g, \bar{g}(x, y; g), \beta(y, g)\}$ можно перейти к другому набору $\{\gamma, \bar{\gamma}(x, y; \gamma), B(y, \gamma)\}$ с помощью преобразования (20), а также соотношения (19), представленного в виде

$$\bar{g} \rightarrow \bar{\gamma}(x, y; \gamma) = N \left\{ \frac{y}{x}, \bar{g} \left[x, y; n \left(\frac{y}{x}, \gamma \right) \right] \right\} \quad (21)$$

и являющегося композицией (17) и (18). Генераторы β и B связаны формулой (16). При этом в групповых функциональных уравнениях для функций $s(x, y; g)$ (подобных амплитудам пропагаторов) следует не только учитывать связь (18) между ИФС $\bar{g}_N$ и ЭФС $\bar{g}$

$$s(x, y; g) = \frac{s(t, y; g)}{s\{1, y; \tilde{g}(t, y; g)\}} s\left\{ \frac{x}{t}, \frac{y}{t}; \tilde{g}(t, y; g) \right\}, \quad (22)$$

но также и нормировку самой функции s

$$s(1, y; g) = S(y, g) \neq 1.$$

Соответствующие дифференциальные уравнения имеют вид

$$\frac{\partial \ln s(x, y; g)}{\partial \ln x} = \gamma \left[\frac{y}{x}, \tilde{g}(x, y; g) \right], \quad \mathcal{X}_\beta \cdot \ln s(x, y; g) = \tilde{\gamma} \left(\frac{y}{x}, g \right), \quad (23)$$

где

$$\gamma(y, g) = \frac{\partial}{\partial t} \ln s(t, y; g) \Big|_{t=1}, \quad \tilde{\gamma}(y, g) = \gamma(y, g) + \left\{ y \frac{\partial}{\partial y} - \beta(y, g) \frac{\partial}{\partial g} \right\} \ln S(y, g). \quad (24)$$

В конкретной калибровочной модели КТП как ИФС, так и ЭФС определяются схемой перенормировки, включая выбор вершины и способ ее вычитания.

3.3. Вершинная зависимость. В калибровочных моделях для массивного случая в определении ЭФС возникает специфическая степень свободы, обусловленная наличием в лагранжиане нескольких структур с одной и той же константой связи. Как известно, при введении ИФС используются одетые вершинные функции – так называемые вертексы. Таким образом, появляются различные возможности для определения ИФС *в той же самой схеме перенормировки*. Переход между различными ИФС может быть описан в терминах только что описанных преобразований.

Для иллюстрации возьмем одетые вершины КХД: трехглюонную Γ_{3gl} , глюон-духовую Γ_{gl-qh} , глюон-кварковую Γ_{gl-q} , а также четырехглюонную Γ_{4gl} . Вообще говоря, каждая из них может быть использована при определении ИФС. Например,

$$\bar{\alpha}_{3gl} = \alpha_s \Gamma_{3gl}^2 Z^3, \quad \bar{\alpha}_{gl-qh} = \alpha_s \Gamma_{gl-qh}^2 ZG^2, \quad \bar{\alpha}_{gl-q} = \alpha_s \Gamma_{gl-q}^2 ZS^2, \quad (25)$$

где Z, G и S – скалярные амплитуды глюонного, духового и кваркового пропагаторов.

В безмассовом УФ-пределе все дефиниции могут оказаться близкими: они совпадают, в частности, в $\overline{MS}$ -схеме и лишь слегка отличаются в разных MOM-схемах из-за

различных возможностей определения функции $\bar{\alpha}_i$, выражаемой через какой-либо из вертексов, представленных в виде функции одного пространственноподобного аргумента Q^2 .

Однако в массивном случае функции $\bar{\alpha}_i$ могут значительно разниться в ИК-области из-за различных зависимостей от масс кварков. Кварковые пропагаторы и глюон-кварковые вертексы имеют сингулярности на массовой поверхности. Для легких кварков это приводит к сингулярному ИК-поведению.

Глюон-духовая вершина, а следовательно, и $\bar{\alpha}_{g1-gh}$, по всей видимости, должна быть наименее чувствительной по отношению к массовым эффектам. В самом деле, в однопетлевом приближении зависимость от масс кварков входит в $\bar{\alpha}_{g1-gh}$ только через вклад петли кварковой поляризации вакуума в амплитуду глюонного пропагатора Z . Однако этот вклад не имеет пороговой сингулярности. Две другие конструкции $\bar{\alpha}_{zg1}$ и $\bar{\alpha}_{g1-q}$ оказываются более чувствительными к ИК-сингулярностям. Массовые эффекты появляются не только через амплитуду кваркового пропагатора S , но и через вертексы Γ_{zg1} или Γ_{g1-q} .

Возможно, именно этому отвечает более “спокойный” вариант ИК-поведения $\bar{\alpha}_T(Q^2)$, полученный тьюбингенской группой.

4. МОДЕЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КОНСТАНТ СВЯЗИ

Здесь представлены примеры модельных преобразований констант связи и индуцированных ими преобразований ИФС, в том числе в случае наличия зависимости от массовой переменной. Показано, что подходящим преобразованием константы связи α_s можно существенно изменить поведение $\bar{\alpha}(Q^2)$ как функции Q^2 в ИК-области.

4.1. Преобразования из аналитической теории возмущений. Приведем примеры, навеянные так называемой *аналитической теорией возмущений* (АТВ) – недавно развитой конструкцией [20], [21], позволяющей “бескровным образом” (за счет наложения условия аналитичности Челлена–Лемана) избавлять пертурбативную КХД от нефизических особенностей типа полюса Ландау.

В АТВ переход от общепринятой ЭФС $\bar{\alpha}_s$ $\overline{MS}$ -схемы к аналитическим функциям связи в евклидовой α_{an} и в минковской $\tilde{\alpha}$ областях может быть представлен в виде подходящего преобразования константы связи α_s , подобного преобразованию при изменении схемы перенормировки [22]. В однопетлевом случае

$$\alpha_s \rightarrow \alpha_M(\alpha_s) = \frac{1}{\pi\beta_0} \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + \pi^2\beta_0^2\alpha_s^2}} = \frac{1}{\pi\beta_0} \arctg(\pi\beta_0\alpha_s), \quad (26)$$

$$\alpha_s \rightarrow \alpha_E(\alpha_s) = \alpha_s + \frac{1}{\beta_0}(1 - e^{1/(\beta_0\alpha_s)})^{-1}. \quad (27)$$

Первое из этих преобразований выглядит вполне обычно³⁾, поскольку $\alpha_M(\alpha_s)$ может быть разложена по степеням α_s , как и при обычных схемных преобразованиях, тогда как

³⁾ Отметим, что подобная функция исходной константы связи $\alpha_M(\alpha_s)$ возникала в точном решении двумерной модели Тирринга [23].

второе в случае слабой связи сводится к тождественному, поскольку непертурбативная структура $\simeq e^{-1/\beta_0 \alpha_s}$ не “оставляет следов” в степенном разложении.

Если начинать с известной однопетлевой функции $\bar{\alpha}_s(Q^2) \sim 1/\ln(Q^2/\Lambda^2)$ с полюсом первой степени при $Q^2 = \Lambda^2$, то в результате подстановки (26) и (27) в групповое дифференциальное уравнение и его интегрирования мы придем к известным в АТВ выражениям (первое из которых в физическом контексте АТВ является функцией s , а не Q^2)

$$\tilde{\alpha}(Q^2) = \frac{1}{\pi\beta_0} \arccos \frac{L}{\sqrt{L^2 + \pi^2}} \Big|_{L>0} = \frac{\arctg(\pi/L)}{\pi\beta_0}, \quad (28)$$

$$\alpha_E(Q^2) = \frac{1}{\beta_0} \left[\frac{1}{L} - \frac{\Lambda^2}{Q^2 - \Lambda^2} \right]; \quad L = \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2}, \quad (29)$$

Функции преобразования $\alpha_M(\alpha_s)$ и $\alpha_E(\alpha_s)$ обладают важными свойствами:

АС: они стремятся к α_s в пределе слабой связи, т.е. $\alpha_i \rightarrow \alpha_s$ при $\alpha_s \ll 1$;

СП: они конечны при $\alpha_s = \infty$;

ИКк: они ИК-конечны, т.е. $\alpha_i \rightarrow 1/\beta_0$ в пределе $\alpha_s \rightarrow -0$.

Условие **АС** в случае слабой связи обеспечивает соответствие со свойством асимптотической свободы, свойство **СП** приводит к отсутствию “призрачных”, т.е. нефизических, сингулярностей и, наконец, свойство **ИКк** отвечает конечному ИК-пределу. Последнему свойству не удовлетворяет преобразование

$$\alpha_s \rightarrow \alpha_N = \alpha_s (1 - e^{-1/(\beta_0 \alpha_s)}), \quad (30)$$

эквивалентное полученному в работе [24] в модифицированной АТВ.

В силу свойств **АС**, **СП** и **ИКк** обе новые АТВ-инвариантные функции связи (28) и (29)⁴⁾

- 1) обладают свойством асимптотической свободы;
- 2) свободны от нефизических сингулярностей при $Q^2 \simeq \Lambda^2$;
- 3) имеют конечный ИК-предел при $Q^2 = 0$.

В то же время преобразование (30), удовлетворяющее лишь свойствам **АС** и **СП**, приводит к сингулярному в ИК-пределе выражению для $\bar{\alpha}_N$:

$$\bar{\alpha}_N(Q^2) = \frac{Q^2 - \Lambda^2}{\beta_0 Q^2 \ln(Q^2/\Lambda^2)}. \quad (31)$$

Это выражение обладает дополнительной Q^{-2} -особенностью, которая, по мнению некоторых исследователей, отвечает линейному росту межкваркового потенциала с расстоянием.

⁴⁾ Бета-функции для обеих однопетлевых функций $\tilde{\alpha}^{(1)}$ и $\alpha_{\text{ап}}^{(1)}$ имеют нуль при $\alpha = 1/\beta_0$ и симметричны относительно отражения $[\alpha - 1/(2\beta_0)] \rightarrow -[\alpha - 1/(2\beta_0)]$. Кроме того, бета-функция для $\tilde{\alpha}(s)$ оказывается одновременно спектральной функцией для $\alpha_{\text{ап}}(Q^2)$. Последнее свойство, своеобразно реализующее гипотезу Швингера [25], не зависит от однопетлевого приближения [22], [26].

Приведем еще один пример безмассового преобразования

$$\alpha_s \rightarrow \alpha_{\text{SF}} = \alpha_s \frac{e^b - \exp\{be^{-1/(2\beta_0\alpha_s)}\}}{e^b - 1}, \quad b = \frac{M}{\Lambda}, \quad (32)$$

приводящего к выражению

$$\bar{\alpha}_{\text{SF}}(Q^2) = \frac{1}{\beta_0 \ln(Q^2/\Lambda^2)} \frac{e^b - e^{b\Lambda/Q}}{e^b - 1} \quad (33)$$

с экспоненциальной сингулярностью $\sim e^{M/Q}$ при $Q = 0$, которое напоминает аналитическую аппроксимацию (5) для результатов в ИК-области, полученную недавно [18] группой “ALPHA” на основе численных симуляций на решетке для ИФС, определенной для функционала Шредингера. Подобная существенная особенность противоречит представлению Челлена–Лемана. Отметим, что выражение (32), в свою очередь, обладает существенной сингулярностью по переменной α_s при $\alpha_s = 0$.

Из приведенных примеров следует простое правило соответствия между преобразованиями констант связи типа (26), (27) и индуцированными ими выражениями (28), (29) для ИФС:

при безмассовом преобразовании константы связи $\alpha_s \rightarrow \alpha_i = f_i(\alpha_s)$ соответствующая ИФС преобразуется по правилу

$$\bar{\alpha}_s(Q^2) \rightarrow \bar{\alpha}_i(Q^2) = f_i(\bar{\alpha}_s(Q^2)). \quad (34)$$

4.2. Примеры массивного преобразования. Обратимся теперь к преобразованиям константы связи, зависящим от массовой переменной. В общем случае согласно (20) такое преобразование включает функцию двух переменных

$$\alpha_s \rightarrow \alpha^* = N(y, \alpha_s). \quad (35)$$

При этом преобразование ЭФС выглядит следующим образом:

$$\bar{\alpha}_s \rightarrow \bar{\alpha}^*(x, y; \alpha^*) = N\left\{\frac{y}{x}, \bar{\alpha}_s\left[x, y; n\left(\frac{y}{x}, \alpha_s\right)\right]\right\}, \quad (36)$$

где, в отличие от (34), содержится переменная $y/x = m^2/Q^2$, которая также может существенно повлиять на поведение в ИК-области.

Для иллюстрации сказанного рассмотрим модельное выражение

$$N(y, \alpha) = \alpha_M(\alpha_s) \left(\frac{1-y}{1+y}\right)^{c\alpha_M(\alpha_s)}, \quad (37)$$

которому отвечает функция

$$\bar{\alpha}^*(Q^2) = \tilde{\alpha}(Q^2) \left(\frac{Q^2 - m^2}{Q^2 + m^2}\right)^{c\tilde{\alpha}(Q^2)}. \quad (38)$$

Входящие сюда константа связи $\alpha_M(\alpha_s)$ и ЭФС $\tilde{\alpha}(Q^2)$ определены формулами вида (26) и (28). При этом мы можем отвлечься от однопетлевого приближения. Здесь существенно лишь то, что функция $\tilde{\alpha}(Q^2)$ свободна от нефизических сингулярностей и монотонно возрастает к ИК-пределу, где принимает конечное значение $\tilde{\alpha}(0) \simeq 1.4$, не зависящее от петлевого приближения. Структура введенной сингулярности напоминает известную ИК-особенность (см. [4]) вертекса КЭД на массовой поверхности.

При положительном индексе $s \simeq 1$ и небольшой массе кварка $m \ll \Lambda$ функция $\tilde{\alpha}^*(Q^2)$, определенная выражением (38), может довольно успешно имитировать описанные в п. 2.2 и 2.3 результаты численных симуляций $\bar{\alpha}_s$, полученные парижской и “трансокеанской” группами.

5. ОБСУЖДЕНИЕ

Как было показано в разделе 2, результаты по непертурбативной КХД, полученные различными группами путем решеточных вычислений евклидова континуального интеграла, а также приближенных решений уравнений Швингера–Дайсона, существенно различаются в ИК-области, в особенности для ЭФС $\bar{\alpha}_s$. В то же время “физические” результаты этих групп по адронным характеристикам кажутся более согласованными между собой.

Наши “модельные конструкции” для $\bar{\alpha}_s$ (см. раздел 4) показывают, что ИК-поведение эффективной связи существенно зависит от деталей ее определения. При конструировании мы ограничились классом моделей, которые в УФ-области коррелируют с пертурбативной КХД. Такое соответствие обычно считается достаточным при решеточных симуляциях и анализе решений уравнений Швингера–Дайсона.

На практике именно такие “допустимые” $\bar{\alpha}_i$, удовлетворяющие условию **АС**, могут соответствовать различным решеточным вычислениям. Расчеты в рамках подобных схем качественно описывают конфайнмент и некоторые адронные характеристики. Поэтому схемы с допустимыми $\bar{\alpha}_i$ можно рассматривать как “физические”.

Особый интерес привлекает ЭФС, полученная группой “ALPHA”, с ее экспоненциальным ростом $\sim e^{ML}$ (5) при $L \rightarrow \infty$. Здесь при переходе от координатного к импульсному представлению требуется особая осторожность ввиду нарушения условия применимости теоремы Таубера при преобразовании Фурье. Этот вопрос более подробно будет рассмотрен в другом месте.

В итоге, по нашему мнению, можно заключить, что нет какого-либо смысла в попытках определения “истинного” ИК-поведения пертурбативной ЭФС КХД $\bar{\alpha}_s$. Любая инфракрасная КХД-физика, подобная физике адронов или физике τ -распада, не может быть успешно описана лишь в рамках пертурбативной КХД. Для ее разумного описания нужны либо существенно непертурбативные методы, такие, например, как вычисления функционального интеграла, либо паллиативные схемы [27]–[29], дополняющие пертурбативную КХД феноменологическими параметрами, наподобие “эффективных партонных масс” или аномальных вакуумных средних.

Благодарности. Автор выражает признательность Р. Алкоферу, Г. Алтарелли, Б. А. Арбузову, М. Люшеру, И. Л. Соловцову и Р. Стора за полезные обсуждения и за-

мечания. Эта работа была начата в Теоретическом отделе ЦЕРН, руководству которого автор благодарен за гостеприимство. Она была частично поддержана грантами РФФИ № 00-15-96691 и № 02-01-00601, а также INTAS № 96-0842 и INTAS–CERN № 99-0377.

Список литературы

- [1] *Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков.* ДАН СССР. 1955. Т. 103. С. 203.
- [2] *Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков.* ДАН СССР. 1955. Т. 103. С. 391.
- [3] *N. N. Bogolubov, D. V. Shirkov.* Nuovo Cimento. 1956. V. 3. P. 845.
- [4] *Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков.* Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1984.
- [5] *D. V. Shirkov.* Nucl. Phys. B. 1992. V. 371. P. 467.
- [6] *Yu. L. Dokshitzer, D. V. Shirkov.* Z. Phys. C. 1995. V. 67. P. 449.
- [7] *А. А. Лозунов.* ЖЭТФ. 1956. Т. 30. С. 793.
- [8] *L. Alkofer, L. von Smekal.* Phys. Rep. 2001. V. 353. P. 281; hep-ph/0007355.
- [9] *Ph. Boucaud et al.* Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.). 2002. V. 106. P. 266; hep-ph/0110171.
- [10] *Ph. Boucaud et al.* JHEP. 2002. V. 0201. P. 046; hep-ph/0107278.
- [11] *J. I. Skullerud, A. Kizilersu, A. G. Williams.* Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.). 2002. V. 106. P. 841; hep-lat/0109027.
- [12] *J. Skullerud, A. Kizilersu.* Quark-gluon vertex from lattice QCD. hep-th/0205318.
- [13] *C. S. Fischer, L. Alkofer.* Phys. Lett. B. 2002. V. 536. P. 177; hep-ph/0202202.
- [14] *C. S. Fischer, R. Alkofer, H. Reinhardt.* Phys. Rev. D. 2002. V. 65. P. 094008; hep-ph/0202195.
- [15] *Ch. Lerche, L. von Smekal.* Phys. Rev. D. 2002. V. 65. P. 125006.
- [16] *M. Lüscher et al.* Nucl. Phys. B. 1992. V. 384. P. 168.
- [17] *M. Lüscher.* Advanced lattice QCD. In: Probing the Standard Model of Particle Interactions. Eds. R. Gupta et al. Amsterdam: Elsevier Sc, 1999. P. 229.
- [18] *J. Heitger, H. Simma, R. Sommer, U. Wolff.* Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.). 2002. V. 106. P. 859; hep-lat/0110201.
- [19] *Л. В. Овсянников.* ДАН СССР. 1956. Т. 109. С. 1112.
- [20] *D. V. Shirkov, I. L. Solovtsov.* Phys. Rev. Lett. 1997. V. 79. P. 1209; hep-ph/9704333.
- [21] *D. V. Shirkov, I. L. Solovtsov.* Phys. Lett. B. 1998. V. 442. P. 344; hep-ph/9711251.
- [22] *D. V. Shirkov.* Eur. Phys. J. 2001. V. 22. P. 331.
- [23] *W. E. Thirring.* Ann. Phys. 1958. V. 3. № 1. P. 91–112.
- [24] *A. V. Nesterenko.* Phys. Rev. D. 2000. V. 62. P. 094028.
- [25] *J. Schwinger.* Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1974. V. 71. P. 3024; P. 5047.
- [26] *Д. В. Ширков.* ТМФ. 2001. Т. 127. С. 3; hep-ph/0012283.
- [27] *F. Jegerlehner, A. V. Tarasov.* Nucl. Phys. B. 1999. V. 549. P. 481.
- [28] *K. A. Milton, I. L. Solovtsov, O. P. Solovtsova.* Phys. Rev. D. 2001. V. 64. P. 016005; 2002. V. 65. P. 076009.
- [29] *M. Baldicci, G. M. Prosperi.* Infrared behaviour of the running coupling and bound states in QCD. hep-ph/0202172.

Поступила в редакцию 16.V.2001 г.