Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. М. Сладь, К теории бесконечнокомпонентных полей с двойной симметрией.
Взаимодействие полей, *ТМФ*, 2002, том 133, номер 1, 54–68

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf380>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 17:20:19

© 2002 г.

Л. М. Сладь*

К ТЕОРИИ БЕСКОНЕЧНОКОМПОНЕНТНЫХ ПОЛЕЙ С ДВОЙНОЙ СИММЕТРИЕЙ. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПОЛЕЙ

Завершен первый этап построения теории не исследовавшихся ранее полей – полей, которые преобразуются по представлениям группы Лоренца, разложимым в бесконечную прямую сумму конечномерных неприводимых представлений. Рассматриваются только те теории, которые обладают изначальной двойной симметрией – релятивистской инвариантностью и инвариантностью относительно преобразований вторичной симметрии, порождаемой полярным или аксиальным 4-векторным представлением ортохронной группы Лоренца. Высокая симметрия теории приводит к бесконечному вырождению по спину спектра масс частиц. Для устранения этого вырождения постулируется спонтанное нарушение вторичной симметрии и решаются вопросы о существовании и структуре нетривиальных лагранжианов взаимодействия полей.

Ключевые слова: двойные симметрии, релятивистски-инвариантные лагранжианы, бесконечнокомпонентные поля.

1. ВВЕДЕНИЕ

В недавней работе [1] на основе теоретико-группового подхода, сформулированного в статье [2] и названного двойной симметрией, начато построение теории полей, которые преобразуются по представлениям собственной группы Лоренца $L_+^\uparrow$, разложимым в бесконечную прямую сумму конечномерных неприводимых представлений (такие поля мы относим к классу ISFIR). Это построение имеет целью изучить возможность эффективного описания адронов с помощью названных монолокальных бесконечнокомпонентных полей.

Существенной особенностью общей релятивистски-инвариантной теории свободных полей класса ISFIR является бесконечное количество произвольных констант в ее лагранжианах вида

$$\mathcal{L}_0 = \frac{i}{2} [(\Psi, \Gamma^\mu \partial_\mu \Psi) - (\partial_\mu \Psi, \Gamma^\mu \Psi)] - (\Psi, R \Psi) \quad (1)$$

и в соответствующих им уравнениях Гельфанда–Яглома [3], [4]. Такие константы соответствуют каждой паре неприводимых представлений группы $L_+^\uparrow$, для которой матричные элементы 4-векторного оператора Γ^μ отличны от нуля. Бесконечный произвол в

* Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д. В. Скобельцына, Московский государственный университет, Москва, Россия. E-mail: slad@theory.sinp.msu.ru

константах был причиной того, что вплоть до работы [1] никто не проводил анализа теории бесконечнокомпонентных полей класса ISFIR и не высказывал никаких суждений о ее физических свойствах. Устранение этого произвола было основной задачей, поставленной в работе [1] и решенной путем извлечения из общей теории полей класса ISFIR, обладающей релятивистской инвариантностью (первичной симметрией), той ее части, которая к тому же инвариантна относительно глобальных преобразований вторичной симметрии вида

$$\Psi(x) \rightarrow \Psi'(x) = e^{-iD^\mu \theta_\mu} \Psi(x), \quad (2)$$

где D^μ – матричные операторы, а параметры θ_μ – компоненты полярного или аксиального 4-вектора ортохронной группы Лоренца $L^\uparrow$.

Понятие вторичной симметрии, введенное в статье [2], обобщает такие давно известные симметрии, как симметрия σ -модели Гелл-Мана–Леви [5] и суперсимметрия (см., например, [6]). Преобразования вторичной симметрии по определению не нарушают первичную симметрию, а их параметры принадлежат пространству некоторого представления группы первичной симметрии. Параметры преобразований вторичной симметрии σ -модели являются псевдоскалярами относительно ортохронной группы Лоренца, а суперсимметрия порождается биспинорным представлением собственной группы Лоренца. Используемая в работе [1] вторичная симметрия, преобразования которой даются соотношением (2), выступает естественным членом этого ряда актуальных симметрий полевых теорий. Преобразования (2) связывают между собой векторы, принадлежащие пространствам разных неприводимых представлений группы $L^\uparrow$, благодаря чему и находит свое полное решение задача об устранении бесконечного произвола в константах релятивистски-инвариантной теории полей класса ISFIR.

В каждом из вариантов теории свободных бесконечнокомпонентных полей с двойной симметрией, которые найдены и описаны в работе [1], известны, во-первых, представление собственной группы Лоренца, по которому преобразуется поле, во-вторых, 4-векторный оператор D^μ из преобразования вторичной симметрии (2) (с точностью до общего числового множителя), в-третьих, 4-векторный оператор Γ^μ и, значит, кинетический член лагранжиана (1) (с точностью до общего числового множителя). Известно также, что оператор R , задающий массовый член лагранжиана (1), кратен единичному оператору.

В полном соответствии с известной теоремой Коулмена–Мандулы [7], касающейся следствий расширения группы Лоренца, спектр масс, отвечающий любому из вариантов теории бесконечнокомпонентных полей с двойной симметрией, бесконечно вырожден по спину. Это вырождение вынуждает нас ввести спонтанное нарушение вторичной симметрии, оставляющее неизменной первичную симметрию – релятивистскую инвариантность теории. Именно, мы предполагаем, что скалярные (относительно группы $L^\uparrow$) компоненты одного или нескольких бозонных бесконечнокомпонентных полей класса ISFIR имеют ненулевые вакуумные средние. Спонтанное нарушение вторичной симметрии может внести в теорию свободных полей с двойной симметрией, описанную в работе [1], лишь одну поправку, а именно оно может изменить в лагранжианах вида (1) операторы R , т.е. изменить массовые члены. Чтобы найти те варианты теории, для которых возможны такие ненулевые изменения, и получить новые выражения для

операторов R , необходимо решить задачу о существовании и структуре нетривиальных лагранжианов взаимодействия бесконечнокомпонентных полей, обладающих изначально двойной симметрией.

В настоящей работе мы ограничиваемся нахождением лишь тех лагранжианов взаимодействия полей, знание которых завершает построение теории свободных фермионных полей класса ISFIR и вплотную подводит нас к началу изучения ряда физических свойств таких полей – их спектров масс, характеристик электромагнитного взаимодействия. Завершение построения теории свободных и самовзаимодействующих бозонных полей класса ISFIR следует проводить только в том случае, если описание барионов с помощью рассматриваемых бесконечнокомпонентных полей окажется успешным.

Представим теперь предмет нашей работы в более конкретных формулировках.

Мы анализируем детальную структуру лагранжианов трехчастичного взаимодействия полей вида¹⁾

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \sum_{i,\tau,l,m} \bar{\psi}(x) Q_i^{\tau lm} \psi(x) \varphi_{\tau lm}^i(x) \equiv \sum_{i,\tau,l,m} (\psi(x), Q_i^{\tau lm} \varphi_{\tau lm}^i(x) \psi(x)), \quad (3)$$

где $\psi(x)$ – фермионное поле, $\varphi_{\tau lm}^i(x)$ – компонента бозонного поля, характеризуемая неприводимым представлением $\tau = (l_0, l_1)$ группы $L_+^\uparrow$, спином l и его проекцией на третью ось m , а $Q_i^{\tau lm} \equiv Q_i^{(l_0, l_1)lm}$ – матричные операторы. Индекс i указывает на то, что согласно условиям 1 и 3А работы [1] в лагранжиан (3) включаются два типа бозонных полей, которые отличаются друг от друга трансформационными свойствами относительно пространственного отражения.

Рассматриваются только такие лагранжианы (3), бозонные поля в которых имеют скалярные или псевдоскалярные (относительно группы $L_+^\uparrow$) компоненты (эти поля обозначаются соответственно $\varphi^+(x)$ и $\varphi^-(x)$, а индексу i приписываются значения $+$ и $-$). Следовательно, из счетного множества представлений собственной группы Лоренца с целыми спинами, найденного в работе [1], выделяются на этом этапе построения теории только два представления: S^1 (I.88) и S^B (I.89)²⁾.

На лагранжианы взаимодействия полей, так же как и на свободные лагранжианы в [1], накладывается требование, чтобы они изначально обладали двойной симметрией: релятивистской инвариантностью и инвариантностью относительно преобразований вторичной симметрии (2) или (I.94), порождаемой полярным или аксиальным 4-векторным представлением ортохронной группы Лоренца.

Если в результате спонтанного нарушения вторичной симметрии скалярная (относительно группы $L_+^\uparrow$) компонента $\varphi_{(0,1)00}^+(x)$ бозонного поля приобретает ненулевое вакуумное среднее λ , то лагранжианы (I.12) и (3) в сумме приводят к лагранжиану (1) для фермионного поля с оператором R вида

$$R = \kappa E + \lambda Q_+^{(0,1)00}, \quad (4)$$

¹⁾Всю необходимую информацию об используемых понятиях и обозначениях, связанных с группой Лоренца, можно найти в работе [1].

²⁾Здесь и далее ссылки на формулы из работы [1] даются в виде (I.N), где N – номер соответствующей формулы.

где E – единичный оператор. Оператор $Q_+^{(0,1)00}$ зависит от отношения нормировочных констант 4-векторных операторов D^μ из преобразований вторичной симметрии бозонного и фермионного полей как от параметра. На этапе сопоставления свойств бесконечнокомпонентных полей и свойств адронов мы будем рассматривать сумму нескольких лагранжианов типа (3), содержащих различные бозонные поля, которые отличаются друг от друга, в частности, упомянутыми нормировочными константами. В этой ситуации формула (4) будет содержать несколько членов типа $\lambda Q_+^{(0,1)00}$.

Дальнейшее изложение материала дается в следующем порядке. Вначале приводятся формулы с участием 4-векторных операторов, которые неоднократно используются при решении задач работы. Затем рассматриваются вопросы о существовании нетривиальных лагранжианов фермион-бозонного взаимодействия и о матричных элементах операторов $Q_\pm^{(0,1)00}$ последовательно для случаев, когда бозонные поля описываются представлениями S^1 и S^B группы $L_+^\uparrow$. В заключение дается пример обладающего небезынтересными свойствами спектра масс бесконечнокомпонентного фермионного поля класса ISFIR, описываемого построенной теорией с двойной симметрией. Отметим, что доказательства ряда приводимых в настоящей работе формул основываются на очевидных алгебраических операциях и, как правило, требуют большого объема выкладок.

2. НЕКОТОРЫЕ СООТНОШЕНИЯ С УЧАСТИЕМ 4-ВЕКТОРНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Возьмем два 4-векторных оператора V^μ и W^μ , задаваемых величинами $v_{\tau'\tau}$ и $w_{\tau'\tau}$, соответственно. Тогда из аналогов формул (I.17)–(I.23), а также из соотношений (I.7)–(I.10) получаем

$$\sum_{l',m'} g_{\mu\nu} V_{\tau''l''m''}^\mu{}_{,\tau'l'm'} W_{\tau'l'm'}^\nu{}_{,\tau lm} = b_{\tau\tau'} v_{\tau\tau'} w_{\tau'\tau} \delta_{\tau''\tau} \delta_{l''l} \delta_{m''m}, \quad (5)$$

где

$$b_{\tau\tau'} = \begin{cases} 2(l_1 - l_0 - 1)(l_1 + l_0 + 1), & \text{если } \tau' = (l_0 + 1, l_1), \\ 2(l_1 - l_0 + 1)(l_1 + l_0 - 1), & \text{если } \tau' = (l_0 - 1, l_1), \\ 2(l_0 - l_1 - 1)(l_1 + l_0 + 1), & \text{если } \tau' = (l_0, l_1 + 1), \\ 2(l_0 - l_1 + 1)(l_1 + l_0 - 1), & \text{если } \tau' = (l_0, l_1 - 1), \end{cases} \quad (6)$$

если $\tau = (l_0, l_1)$. В левой части соотношения (5) суммирования по повторяющемуся индексу τ' нет.

В теории свободных полей с двойной симметрией операторы D^μ из преобразований (2) удовлетворяют следующему соотношению:

$$D^\mu D_\mu = HE, \quad (7)$$

где H – числовой множитель. Это соотношение является следствием условий (I.26) и легко проверяется непосредственными вычислениями.

Используя формулы (5) и (6) и выписанные в следствиях 1–4 работы [1] значения величин $d_{\tau'\tau}$, характеризующих 4-векторный оператор D^μ , имеем

$$H = \begin{cases} 4d_0^2 & \text{для следствий 1, 3 (п. 1),} \\ -4d_0^2 & \text{для следствия 2 (п. 2),} \\ -8d_0^2 & \text{для следствия 2 (п. 3),} \\ 8d_0^2 & \text{для следствия 3 (п. 2),} \end{cases} \quad (8)$$

где $d_0 = g_0 c_0$.

Введем теперь 4-векторный оператор Ω^μ , описываемый величинами $\omega_{\tau'\tau}$, который строится из заданных операторов V^μ и W^μ следующим образом:

$$\Omega^\mu = V^\nu W^\mu V_\nu.$$

Используя аналоги формул (I.17)–(I.23) и соотношения (I.7)–(I.10), получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\omega(l_0 + 1, l_1; l_0, l_1) = & \\ & (l_1 - l_0 + 1)(l_1 + l_0 - 1)v(l_0 + 1, l_1; l_0, l_1)w(l_0, l_1; l_0 - 1, l_1)v(l_0 - 1, l_1; l_0, l_1) - \\ & - v(l_0 + 1, l_1; l_0, l_1)w(l_0, l_1; l_0 + 1, l_1)v(l_0 + 1, l_1; l_0, l_1) + (l_1 - l_0 - 2) \times \\ & \times (l_1 + l_0 + 2)v(l_0 + 1, l_1; l_0 + 2, l_1)w(l_0 + 2, l_1; l_0 + 1, l_1)v(l_0 + 1, l_1; l_0, l_1) + \\ & + (l_1 + l_0 - 1)v(l_0 + 1, l_1; l_0, l_1)w(l_0, l_1; l_0, l_1 - 1)v(l_0, l_1 - 1; l_0, l_1) - \\ & - (l_1 - l_0 - 2)(l_1 + l_0 - 1)v(l_0 + 1, l_1; l_0 + 1, l_1 - 1) \times \\ & \times w(l_0 + 1, l_1 - 1; l_0, l_1 - 1)v(l_0, l_1 - 1; l_0, l_1) - \\ & - (l_1 - l_0 + 1)v(l_0 + 1, l_1; l_0, l_1)w(l_0, l_1; l_0, l_1 + 1)v(l_0, l_1 + 1; l_0, l_1) - \\ & - (l_1 - l_0 + 1)(l_1 + l_0 + 2)v(l_0 + 1, l_1; l_0 + 1, l_1 + 1) \times \\ & \times w(l_0 + 1, l_1 + 1; l_0, l_1 + 1)v(l_0, l_1 + 1; l_0, l_1) + \\ & + (l_1 - l_0 - 2)v(l_0 + 1, l_1; l_0 + 1, l_1 - 1) \times \\ & \times w(l_0 + 1, l_1 - 1; l_0 + 1, l_1)v(l_0 + 1, l_1; l_0, l_1) - \\ & - (l_1 + l_0 + 2)v(l_0 + 1, l_1; l_0 + 1, l_1 + 1) \times \\ & \times w(l_0 + 1, l_1 + 1; l_0 + 1, l_1)v(l_0 + 1, l_1; l_0, l_1). \end{aligned} \quad (9)$$

Выражение для $\omega(l_0, l_1; l_0 + 1, l_1)/2$ получается из (9) заменой $v_{\tau'\tau}$, $w_{\tau'\tau}$ и $\omega_{\tau'\tau}$ на $v_{\tau\tau'}$, $w_{\tau\tau'}$ и $\omega_{\tau\tau'}$, а формулы для $\omega(l_0, l_1 + 1; l_0, l_1)/2$ и $\omega(l_0, l_1; l_0, l_1 + 1)/2$ – соответственно из формул для $\omega(l_0 + 1, l_1; l_0, l_1)/2$ и $\omega(l_0, l_1; l_0 + 1, l_1)/2$ заменой $l_0 \leftrightarrow l_1$.

Если 4-векторный оператор D^μ из преобразований вторичной симметрии (2) соответствует вариантам теории свободных полей, описанным в следствии 2 (п. 3) или в следствии 3 (п. 2) работы [1], то, используя формулу (9), получаем

$$D^\nu D^\mu D_\nu = 0. \quad (10)$$

Для этих же операторов D^μ справедливо также соотношение

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} D^\mu D^\nu D^\rho D^\sigma = 0. \quad (11)$$

Очевидно, что лагранжиан взаимодействия (3) может быть инвариантным относительно преобразований (2) или (I.94) тогда и только тогда, когда порождаемая ими группа вторичной симметрии одна и та же и для фермионного, и для бозонного поля. Все полученные в работе [1] группы вторичной симметрии можно отнести к одному из следующих трех типов.

Первый тип – это абелевы группы, для которых

$$[D^\mu, D^\nu] = 0. \quad (12)$$

Это равенство имеет место для операторов D^μ , отвечающих следствиям 1, 2 (п. 2) и 3 (п. 1) работы [1]. Так, формулы (I.75) и (I.76), относящиеся к следствиям 1 и 3 (п. 1), означают, что $D^\mu = g_0 \Gamma^\mu$, в результате чего соотношение (I.26) приводит к равенству (12). Если же операторы D^μ описываются формулами (I.79)–(I.82) следствия 2 (п. 2), то непосредственными вычислениями убеждаемся в справедливости соотношений, которые эквивалентны равенству (12) и получаются из уравнений (I.32)–(I.44) заменой $c_{\tau'\tau} \rightarrow d_{\tau'\tau}$.

Второй тип групп вторичной симметрии отвечает следствиям 2 (п. 3) и 3 (п. 2) работы [1]. Для этого типа групп антисимметричные операторы $G^{\mu\nu}$, определяемые формулой

$$G^{\mu\nu} = [D^\mu, D^\nu], \quad (13)$$

являются ненулевыми. Справедливы равенства

$$[G^{\mu\nu}, G^{\rho\sigma}] = 0, \quad (14)$$

$$\{D^\mu, G^{\nu\rho}\} = 0. \quad (15)$$

Используя соотношение (15), можно показать, что группы вторичной симметрии второго типа являются бесконечными.

Третий тип групп вторичной симметрии отвечает следствиям 2 (п. 1) и 4 работы [1]. Для этого типа имеет место неравенство $[G^{\mu\nu}, G^{\rho\sigma}] \neq 0$.

До сих пор мы пользовались одними и теми же обозначениями для ряда величин, задаваемых в пространствах как фермионных, так и бозонных полей. В дальнейшем в обозначения таких величин будут включаться дополнительные индексы F и B, соответственно: $D^F{}^\mu$, H^F , $G^F{}^{\mu\nu}$ и $D^B{}_\mu$, H^B , $G^B{}_{\mu\nu}$.

Перечислим теперь подлежащие рассмотрению варианты лагранжианов взаимодействия полей (3) в зависимости от групповых свойств входящих в них полей.

Варианты 1, 1A. Каждое из бозонных полей преобразуется по представлению S^1 (I.88) группы L^1_+ . Фермионное поле преобразуется по любому из представлений S^{k_1} (I.72). Преобразования вторичной симметрии порождаются полярным 4-векторным представлением группы L^1 в варианте 1 и аксиальным в варианте 1A. Такие преобразования бозонных полей имеют вид (2) в варианте 1 и вид (I.94) в варианте 1A. Операторы $D^B{}_\mu$ описываются формулами (I.74) и (I.76), в которых $k_1 = 1$. Преобразования вторичной симметрии фермионного поля имеют вид (2). Входящие в них 4-векторные операторы $D^F{}^\mu$ описываются формулами (I.73)–(I.76) и (I.79)–(I.82) соответственно в вариантах 1 и 1A.

Вариант 2. Каждое из бозонных полей преобразуется по представлению S^B (I.89), а фермионное поле по представлению S^F (I.83) группы $L_+^\uparrow$. Преобразования вторичной симметрии бозонных полей имеют вид (I.94), а преобразования фермионного поля – вид (2), причем параметр θ_μ в формулах (I.94) и (2) является аксиальным 4-вектором группы $L_+^\uparrow$. Операторы $D^{B\mu}$ и $D^{F\mu}$ описываются соответственно формулами (I.90)–(I.93) и (I.84)–(I.87).

Группы вторичной симметрии для вариантов 1 и 1А лагранжианов взаимодействия полей относятся к первому типу, а для варианта 2 – ко второму типу.

Подробные выкладки, касающиеся структуры лагранжианов взаимодействия полей, даются ниже только для вариантов 1, 2, а для варианта 1А указываются те изменения, которые необходимо внести в вариант 1.

3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ S^1 ДЛЯ БОЗОННОГО ПОЛЯ И ЛАГРАНЖИАНА ФЕРМИОН-БОЗОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Обозначим через $Q_\pm$ скалярный (относительно группы $L_+^\uparrow$) оператор $Q_\pm^{(0,1)00}$ из лагранжиана (3). Пусть фермионное поле $\psi(x)$ принадлежит пространству представления S ортохронной группы Лоренца, а его лоренцово преобразование имеет вид (I.3). Тогда выполнение соотношения

$$S^{-1}(g)Q_\pm S(g) = Q_\pm \quad (16)$$

является необходимым условием релятивистской инвариантности лагранжиана (3). Здесь и в дальнейшем одновременно берутся либо верхние, либо нижние знаки.

Из соотношения (16) получаем, что для любого неприводимого представления (l_0, l_1) группы $L_+^\uparrow$, принадлежащего представлению S , должны иметь место равенства

$$Q_\pm \xi_{(l_0, l_1)lm} = q^\pm(l_0, l_1) \xi_{(l_0, l_1)lm}, \quad (17)$$

$$q^\pm(-l_0, l_1) = \pm q^\pm(l_0, l_1), \quad (18)$$

причем величины $q(|l_0|, l_1)$ в них произвольны.

Нетрудно доказать, что выполнение соотношения (16) и приводимых ниже равенств (21), выражающих операторы $Q_\pm^{lm}$ из лагранжиана (3) через операторы $Q_\pm$, является достаточным условием релятивистской инвариантности лагранжиана (3).

Принимая во внимание равенство (I.27), легко видеть, что преобразования вторичной симметрии (2), порождаемые полярным 4-вектором группы $L_+^\uparrow$, оставляют лагранжиан (3) неизменным, если операторы $Q_\pm^{lm}$ удовлетворяют системе уравнений

$$[D^{F\mu}, Q_\pm^{lm}] = \sum_{\tau', l', m'} Q_\pm^{\tau' l' m'} D_{\tau' l' m', \tau lm}^{B\mu}, \quad (19)$$

где $\tau, \tau' \in S$, а $D_{\tau' l' m', \tau lm}^{B\mu}$ – матричный элемент оператора $D^{B\mu}$.

Уравнения (19) дают возможность, используя формулы (5) и (6), выразить друг через друга операторы $Q_\pm^{\tau_1 lm}$ и $Q_\pm^{\tau_0 lm}$ с любыми наперед заданными τ_1 и τ_0 , принадлежащими представлению S , причем бесконечным числом способов. Поэтому основным вопросом является эквивалентность всех таких выражений или, что то же самое, непротиворечивость системы уравнений (19).

Справедливо следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть трансформационные свойства полей лагранжиана (3) совпадают с перечисленными в варианте 1. Тогда система уравнений (19) эквивалентна уравнениям относительно операторов $Q_{\pm}$

$$D^{F\mu} Q_{\pm} D_{\mu}^F = \left(H^F - \frac{H^B}{2} \right) Q_{\pm} \quad (20)$$

и системе независимых друг от друга равенств

$$Q_{\pm}^{(0,n+1)lm} = (n+1) \left(\frac{2}{H^B} \right)^n \times \\ \times [D_{\nu_n}^F, \dots, [D_{\nu_2}^F, [D_{\nu_1}^F, Q_{\pm}] \dots]] (D^{B\nu_1} D^{B\nu_2} \dots D^{B\nu_n})_{(0,1)00,(0,n+1)lm}, \quad (21)$$

где $n \geq 1$, а величины H^F и H^B даются соотношениями (7) и (8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем вначале, что уравнения (20) и равенства (21) являются следствием системы уравнений (19). Умножим обе стороны соотношения (19) на оператор $D^{F\nu}$ один раз слева, а другой раз справа. Вычтем из первого получившегося уравнения второе и, воспользовавшись исходным уравнением (19), избавимся в правой части итогового уравнения от оператора $D^{F\nu}$. Имеем

$$[D^{F\nu}, [D^{F\mu}, Q_{\pm}^{\tau lm}]] = \sum_{\tau', l', m'} Q_{\pm}^{\tau' l' m'} (D^{B\nu} D^{B\mu})_{\tau' l' m', \tau lm}. \quad (22)$$

Умножим обе стороны этого уравнения на $g_{\mu\nu}$ и просуммируем по индексам μ и ν . Принимая во внимание соотношение (7) и полагая $\tau = (0, 1)$, $l = 0$ и $m = 0$, получаем уравнения (20).

Возьмем теперь уравнение (19), в котором $\tau = (0, j)$, $j \geq 1$. Умножим обе его стороны на $g_{\mu\nu} D_{(0,j)lm,(0,j+1)l''m''}^{B\nu}$ и просуммируем по индексам μ , ν , l и m . Пользуясь соотношениями (5), (6), (I.74), (I.76) и (8), находим, что

$$Q_{\pm}^{(0,j+1)l''m''} = \frac{j+1}{j} \frac{2}{H^B} \sum_{l,m} [D_{\nu}^F, Q_{\pm}^{(0,j)lm}] D_{(0,j)lm,(0,j+1)l''m''}^{B\nu}.$$

Отсюда сразу получаются равенства (21).

Докажем теперь, что все уравнения системы (19) выполняются, если справедливы равенства (21) и выполняются уравнения (20).

Убедимся вначале, что имеет место следующее соотношение:

$$\sum_{l,m} (D^{B\nu_1} D^{B\nu_2} \dots D^{B\nu_n})_{(0,1)00,(0,n+1)lm} (D^{B\mu_n} \dots D^{B\mu_2} D^{B\mu_1})_{(0,n+1)lm,(0,1)00} = \\ = s_0(n) \sum g^{\nu_1 \mu_{j_1}} g^{\nu_2 \mu_{j_2}} \dots g^{\nu_n \mu_{j_n}} + \\ + s_1(n) \sum g^{\nu_{i_1} \nu_{i_2}} g^{\mu_{j_1} \mu_{j_2}} g^{\nu_{i_3} \mu_{j_3}} \dots g^{\nu_{i_n} \mu_{j_n}} + \dots \quad (23)$$

Первая сумма в правой части этого равенства берется по всем перестановкам индексов $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$. Вторая сумма берется по всем сочетаниям двух индексов ν_{i_1} и ν_{i_2} , извлекаемых из совокупности $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$, по всем сочетаниям двух индексов μ_{j_1} и μ_{j_2} ,

извлекаемых из совокупности $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$, и по перестановкам остальных индексов μ_j при некотором фиксированном порядке остающихся индексов ν_i . И так далее.

Пусть $a_{\nu_i}^i$ и $b_{\mu_j}^j$, где $i, j = 1, \dots, n$, — ковариантные компоненты произвольных 4-векторов. Умножим левую часть формулы (23) на $a_{\nu_1}^1 \dots a_{\nu_n}^n b_{\mu_n}^n \dots b_{\mu_1}^1$ и возьмем сумму по $\nu_1, \dots, \nu_n, \mu_n, \dots, \mu_1$. Полученное выражение $\mathcal{A}$ инвариантно относительно преобразований собственной группы Лоренца. Согласно первой основной теореме теории инвариантов [8] выражение $\mathcal{A}$ является функцией типовых базисных инвариантов для группы $L_+^\uparrow$, которыми являются скалярное произведение двух 4-векторов $(p^1 p^2) \equiv g^{\mu\nu} p_\mu^1 p_\nu^2$ и компонентный определитель четырех 4-векторов $[p^1 p^2 p^3 p^4] \equiv \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\mu^1 p_\nu^2 p_\rho^3 p_\sigma^4$. Так как в рассматриваемом варианте лагранжиана (3) различные компоненты оператора $D^{B\mu}$ коммутируют друг с другом, то выражение $\mathcal{A}$ остается неизменным при перестановке любых двух векторов $a_{\nu_i}^i$ и $a_{\nu_{i'}}^{i'}$ или любых двух векторов $b_{\mu_j}^j$ и $b_{\mu_{j'}}^{j'}$. Следовательно, выражение $\mathcal{A}$ не может содержать компонентных определителей. Учитывая произвольный характер вспомогательных 4-векторов $a_{\nu_i}^i$ и $b_{\mu_j}^j$, мы тем самым убеждаемся в справедливости соотношения (23).

Умножим обе стороны равенства (23) на $g_{\nu_1 \nu_2}$ и просуммируем по индексам ν_1 и ν_2 . В результате согласно соотношению (5) левая часть полученного равенства обратится в нуль. Отсюда имеем

$$s_1(n) = -\frac{s_0(n)}{n}. \quad (24)$$

Умножим обе стороны равенства (23) на $g_{\nu_n \mu_n}$ и просуммируем по индексам ν_n и μ_n . Пользуясь формулами (5), (6), (I.74), (I.76) и (8), находим, что

$$(n+3)s_0(n) + (n-1)s_1(n) = \frac{n+1}{n} \frac{H^B}{2} s_0(n-1).$$

Отсюда, используя соотношение (24) и равенство $s_0(1) = H^B/4$, получаем

$$s_0(n) = \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{H^B}{2} \right)^n. \quad (25)$$

Умножим теперь обе стороны равенства (21) на $(D^{B\mu_n} \dots D^{B\mu_2} D^{B\mu_1})_{(0,n+1)lm,(0,1)00}$ и воспользуемся соотношениями (23)–(25), коммутативностью (12) различных компонент оператора $D^{F\mu}$, формулой (7) и условием (20), которому удовлетворяют операторы $Q_\pm$. Имеем

$$\begin{aligned} & [D^{F\mu_n}, \dots, [D^{F\mu_2}, [D^{F\mu_1}, Q_\pm]] \dots] - \\ & - \frac{H^B}{2n} \sum g^{\mu_i \mu_j} [D^{F\mu_n}, \dots, [D^{F\mu_2}, [D^{F\mu_1}, Q_\pm]] \dots]_{\mu_i \mu_j} + \dots = \\ & = \sum_{l,m} Q_\pm^{(0,n+1)lm} (D^{B\mu_n} \dots D^{B\mu_2} D^{B\mu_1})_{(0,n+1)lm,(0,1)00}. \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь и в дальнейшем $[D^{F\mu_n}, \dots, [D^{F\mu_1}, Q_\pm]] \dots]_{\mu_{i_1} \dots \mu_{i_k}}$ — это $(n-k)$ -кратный коммутатор, получаемый из n -кратного коммутатора $[D^{F\mu_n}, \dots, [D^{F\mu_1}, Q_\pm]] \dots$ выбрасыванием операторов $D^{F\mu_{i_1}}, \dots, D^{F\mu_{i_k}}$. Первая сумма в левой части равенства (26) берется

по всем сочетаниям двух индексов μ_i и μ_j , извлекаемых из совокупности $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$. И так далее.

Нам понадобится еще одна формула, получаемая на основании соотношений (5), (6), (I.74), (I.76) и (8), а именно

$$\begin{aligned} (D^{B\nu_n} \dots D^{B\nu_2} D^{B\nu_1})_{(0,n+1)l'm', (0,1)00} (D_{\nu_1}^B D_{\nu_2}^B \dots D_{\nu_n}^B)_{(0,1)00, (0,n+1)lm} = \\ = \frac{1}{n+1} \left(\frac{H^B}{2} \right)^n \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \end{aligned} \quad (27)$$

Теперь, последовательно используя равенства (21), (26), (7), (12), (27) и снова (21), получаем следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} [D^{F\mu}, Q_{\pm}^{(0,n+1)lm}] = \\ = (n+1) \left(\frac{2}{H^B} \right)^n [D^{F\mu}, [D_{\nu_n}^F, \dots, [D_{\nu_1}^F, Q_{\pm}] \dots]] \times \\ \times (D^{B\nu_1} \dots D^{B\nu_n})_{(0,1)00, (0,n+1)lm} = \\ = \left\{ (n+1) \left(\frac{2}{H^B} \right)^n \sum_{l'm'} Q_{\pm}^{(0,n+2)l'm'} (D^{B\mu} D_{\nu_n}^B \dots D_{\nu_1}^B)_{(0,n+2)l'm', (0,1)00} + \right. \\ \left. + \left(\frac{2}{H^B} \right)^{n-1} \sum_{i=1}^n \delta_{\nu_i}^{\mu} [D_{\nu_n}^F, \dots, [D_{\nu_1}^F, Q_{\pm}] \dots]_{\nu_i} \right\} \times \\ \times (D^{B\nu_1} \dots D^{B\nu_n})_{(0,1)00, (0,n+1)lm} = \\ = \sum_{l', m'} (Q_{\pm}^{(0,n+2)l'm'} D_{(0,n+2)l'm', (0,n+1)lm}^{B\mu} + Q_{\pm}^{(0,n)l'm'} D_{(0,n)l'm', (0,n+1)lm}^{B\mu}), \end{aligned}$$

которая в конечном итоге воспроизводит уравнения системы (19), соответствующие варианту 1 лагранжиана (3). Заметим, что те слагаемые в формулах (23) и (26), которые не выписаны явно, и часть членов стоящей перед многоточием суммы дают нулевой вклад в окончательный результат выписанной выше цепочки равенств. Это обусловлено тем, что возникают выражения $g_{\nu_i \nu_j} (D^{B\nu_1} \dots D^{B\nu_n})_{(0,1)00, (0,n+1)lm}$, сомножители которых благодаря коммутативности различных компонент оператора $D^{B\mu}$ (12) сводятся к виду $\sum_{l'm'} g_{\mu\nu} D_{(0,1)00, (0,2)l'm'}^{B\mu} D_{(0,2)l'm', (0,3)l''m''}^{B\nu}$. Обращение последних в нуль обеспечивается соотношением (5). Таким образом, доказательство утверждения 1 завершено.

Запишем соотношение (20) как систему уравнений относительно величин $q(l_0, l_1)$, определяемых формулой (17). Используя формулы (5)–(8) и (I.73)–(I.76), имеем для всех неприводимых представлений (l_0, l_1) группы $L_+^{\uparrow}$, принадлежащих представлению S^{k_1} (I.72) (k_1 – полуцелое число, $k_1 \geq 3/2$),

$$\begin{aligned} (k_1 - l_0 - 1)(k_1 + l_0)q^{\pm}(l_0 + 1, l_1) + (k_1 - l_0)(k_1 + l_0 - 1)q^{\pm}(l_0 - 1, l_1) - \\ - (k_1 - l_1 - 1)(k_1 + l_1)q^{\pm}(l_0, l_1 + 1) - (k_1 - l_1)(k_1 + l_1 - 1)q^{\pm}(l_0, l_1 - 1) = \\ = z(l_1 - l_0)(l_1 + l_0)q^{\pm}(l_0, l_1), \end{aligned} \quad (28)$$

где $z = 2 - H^B/H^F$. В рассматриваемом варианте $H^B > 0$, $H^F > 0$ и поэтому $z \in (-\infty, 2)$.

Легко видеть, что нетривиальные решения системы уравнений (18) и (28) существуют, причем общее решение содержит $k_1 - 1/2$ произвольных констант, в качестве которых можно взять величины $q(l_0, k_1)$ при $1/2 \leq l_0 \leq k_1 - 1$. Непосредственное обращение к уравнениям (18) и (28) как к рекуррентным соотношениям может быть предпочтительнее, чем использование явного вида величин $q(l_0, l_1)$. Даже в простейшем случае, когда $k_1 = 3/2$, запись величин $q(l_0, l_1)$ дается через высшие трансцендентные функции, именно

$$q^\pm \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right) = q_0^\pm, \quad q^\pm \left(\frac{1}{2}, l_1 \right) = \frac{2q_0^\pm}{l_1^2 - 1/4} \left[C_{l_1 - 3/2}^2 \left(\frac{z}{2} \right) \mp C_{l_1 - 5/2}^2 \left(\frac{z}{2} \right) \right], \quad l_1 \geq \frac{5}{2}, \quad (29)$$

где $q_0^\pm$ — произвольные константы, а $C_n^\nu(x)$ — многочлен Гегенбауэра [9]. Выражая многочлены Гегенбауэра через гипергеометрические ряды $F(a, b; c; y)$, формулы (29) можно представить в виде

$$q^\pm \left(\frac{1}{2}, 2N - \frac{1}{2} \right) = q_0^\pm \frac{(-1)^{N+1}}{2N - 1} \left[F \left(1 - N, N + 1; \frac{1}{2}; \frac{z^2}{4} \right) \pm \right. \\ \left. \pm (N - 1)zF \left(2 - N, N + 1; \frac{3}{2}; \frac{z^2}{4} \right) \right], \quad (30)$$

$$q^\pm \left(\frac{1}{2}, 2N + \frac{1}{2} \right) = q_0^\pm \frac{(-1)^N}{2N + 1} \left[\pm F \left(1 - N, N + 1; \frac{1}{2}; \frac{z^2}{4} \right) - \right. \\ \left. - (N + 1)zF \left(1 - N, N + 2; \frac{3}{2}; \frac{z^2}{4} \right) \right], \quad (31)$$

где $N \geq 1$.

При переходе от варианта 1 лагранжиана (3) к варианту 1А осуществляется замена индексов $\pm$ на индексы $\mp$ в правой части уравнений (19) и, если n нечетно, то также в левой части равенств (21) и правой части соотношений (26). В цепочке равенств такую замену нужно провести в третьем и четвертом звеньях и, если n нечетно, то также во втором звене. Системы уравнений относительно величин $q^\pm(l_0, l_1)$ в вариантах 1 и 1А одинаковы. В варианте 1А согласно соотношению (10) имеем $H^B > 0$, $H^F < 0$ и поэтому $z \in (2, +\infty)$.

Таким образом, в вариантах 1 и 1А каждому представлению S^{k_1} (k_1 — полуцелое число, $k_1 \geq 3/2$) для фермионного поля отвечает нетривиальный лагранжиан (3), содержащий $k_1 - 1/2$ произвольных констант. Матричные элементы операторов $Q_\pm$ находятся из уравнений (18) и (28). Операторы $Q_\pm^{(0, n+1)lm}$ выражаются через операторы $Q_\pm$ с помощью равенств типа (21).

4. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ S^B ДЛЯ БОЗОННОГО ПОЛЯ И ЛАГРАНЖИАНЫ ФЕРМИОН-БОЗОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть трансформационные свойства полей лагранжиана (3) совпадают с перечисленными в варианте 2. Тогда нетривиальный лагранжиан (3) не существует.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Инвариантность лагранжиана (3) относительно преобразований вторичной симметрии обеспечивается выполнением условий (19), в правой части которых нужно заменить индексы $\pm$ на $\mp$. Эти условия влекут за собой, во-первых, уравнения (20) относительно операторов $Q_{\pm}$ и, во-вторых, соотношения

$$[G^{F\mu\nu}, Q_{\pm}^{\tau lm}] = \sum_{\tau', l', m'} Q_{\pm}^{\tau' l' m'} G_{\tau' l' m', \tau lm}^{B\mu\nu}. \quad (32)$$

Из соотношений (32) можно получить аналог уравнений (22), в которые вместо 4-векторных операторов входят операторы $G^{\mu\nu}$ и $G^{\rho\sigma}$. Умножим один раз полученный аналог уравнений (22) на $g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}$, а другой раз на $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$. Возьмем затем в обоих случаях сумму по индексам μ, ν, ρ и σ и примем во внимание формулы (13), (7), (10) и (11). Тогда к уравнениям (20) относительно операторов $Q_{\pm}$ прибавятся еще две пары уравнений:

$$G^{F\mu\nu}Q_{\pm}G_{\mu\nu}^F = ((H^B)^2 - 2(H^F)^2)Q_{\pm}, \quad (33)$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}G^{F\mu\nu}Q_{\pm}G^{F\rho\sigma} = 0. \quad (34)$$

С помощью формул (5), (6), (8)–(10) и (I.84)–(I.87) уравнения (20), (33) и (34) сводятся к системе уравнений относительно величин $q^{\pm}(l_0, l_1)$, в которых $(l_0, l_1) \in S^F$, а представление S^F дается формулой (I.83). Если $l_0 + l_1$ – четное число, то

$$(l_1 - l_0 - 1)q^{\pm}(l_0 + 1, l_1) + (l_1 - l_0 + 1)q^{\pm}(l_0 - 1, l_1) + (l_1 - l_0 + 1)q^{\pm}(l_0, l_1 + 1) + \\ + (l_1 - l_0 - 1)q^{\pm}(l_0, l_1 - 1) = 2(2 - y)(l_1 - l_0)q^{\pm}(l_0, l_1), \quad (35)$$

$$\frac{l_1 + l_0 - 2}{l_1 + l_0 - 1}q^{\pm}(l_0 - 1, l_1 - 1) + \frac{l_1 + l_0 + 2}{l_1 + l_0 + 1}q^{\pm}(l_0 + 1, l_1 + 1) + \\ + \frac{2}{(l_1 + l_0 - 1)(l_1 + l_0 + 1)}q^{\pm}(l_0, l_1) = (2 - y^2)q^{\pm}(l_0, l_1), \quad (36)$$

$$(l_1 - l_0 + 1)q^{\pm}(l_0 - 1, l_1 + 1) + (l_1 - l_0 - 1)q^{\pm}(l_0 + 1, l_1 - 1) = \\ = (2 - y^2)(l_1 - l_0)q^{\pm}(l_0, l_1), \quad (37)$$

а если $l_0 + l_1$ – нечетное число, то

$$(l_1 + l_0 + 1)q^{\pm}(l_0 + 1, l_1) + (l_1 + l_0 - 1)q^{\pm}(l_0 - 1, l_1) + (l_1 + l_0 + 1)q^{\pm}(l_0, l_1 + 1) + \\ + (l_1 + l_0 - 1)q^{\pm}(l_0, l_1 - 1) = 2(2 - y)(l_1 + l_0)q^{\pm}(l_0, l_1), \quad (38)$$

$$(l_1 + l_0 - 1)q^{\pm}(l_0 - 1, l_1 - 1) + (l_1 + l_0 + 1)q^{\pm}(l_0 + 1, l_1 + 1) = \\ = (2 - y^2)(l_1 + l_0)q^{\pm}(l_0, l_1), \quad (39)$$

$$\frac{l_1 - l_0 + 2}{l_1 - l_0 + 1}q^{\pm}(l_0 - 1, l_1 + 1) + \frac{l_1 - l_0 - 2}{l_1 - l_0 - 1}q^{\pm}(l_0 + 1, l_1 - 1) + \\ + \frac{2}{(l_1 - l_0 - 1)(l_1 - l_0 + 1)}q^{\pm}(l_0, l_1) = (2 - y^2)q^{\pm}(l_0, l_1), \quad (40)$$

где $y = H^B/H^F$. В рассматриваемом варианте 2 согласно соотношению (10) имеют место неравенства $H^B > 0$, $H^F < 0$ и $y < 0$.

Нетрудно убедиться в том, что система уравнений (18), (35)–(40) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда $y = 2$, и это решение имеет вид

$$q^{\pm}(l_0, l_1) = \begin{cases} (-1)^{l_1-1}(l_1 + l_0)q_0^{\pm} & \text{для четных } l_1 + l_0, \\ \pm(-1)^{l_1-1}(l_1 + l_0)q_0^{\pm} & \text{для нечетных } l_1 + l_0, \end{cases} \quad (41)$$

где $q_0^{\pm}$ – произвольные константы.

Итак, в области допустимых значений параметра y ($y \in (-\infty, 0)$) нетривиальных решений системы уравнений (18), (35)–(40) относительно величин $q^{\pm}(l_0, l_1)$ не существует, т.е. в варианте 2 лагранжиана (3) не существует ненулевых операторов $Q_{\pm}$. Из условий типа (19) следует, что любой оператор $Q_{\pm}^{\tau lm}$ ($\tau \in S^B$) выражается линейно и однородно через операторы $Q_{\pm}$. Следовательно, в рассматриваемом варианте все операторы $Q_{\pm}^{\tau lm}$ нулевые, а лагранжиан взаимодействия полей (3) тривиален.

5. ПРИМЕР СПЕКТРА МАСС В ТЕОРИИ БЕСКОНЕЧНОКОМПОНЕНТНЫХ ПОЛЕЙ С ДВОЙНОЙ СИММЕТРИЕЙ

Объявляя о завершении первого этапа построения теории бесконечнокомпонентных полей класса ISFIR, мы хотели бы, не вдаваясь в доказательства, продемонстрировать на одном примере некоторые свойства спектра масс фермионных состояний теории.

Пусть теории свободного фермионного поля соответствует описание, данное в следствии 2 (п. 2) работы [1], причем $k_1 = 3/2$, и пусть массовый член ее лагранжиана возникает в результате спонтанного нарушения вторичной симметрии из лагранжиана взаимодействия полей (3) в варианте 1А.

Вектор состояния ψ_M частицы с массой M в ее системе покоя должен удовлетворять релятивистски-инвариантному уравнению типа Гельфанда–Яглома (I.1), принимающему вид

$$(M\Gamma^0 - R)\psi_M = 0, \quad (42)$$

и условию нормировки

$$|\overline{\psi_M}\Gamma^0\psi_M| < +\infty, \quad (43)$$

если M является дискретной точкой спектра масс, или

$$\overline{\psi_{M'}}\Gamma^0\psi_M = a_0\delta(M - M') \quad (44)$$

(a_0 – некоторое число), если M и M' принадлежат непрерывной части спектра масс.

Оператор Γ^0 из уравнения (42) находим с помощью соотношений (I.18)–(I.23), (I.79) и (I.80). Оператор R задаем формулой (4), в которой полагаем $\kappa = 0$, а для оператора $Q_+^{(0,1)00}$ используем соотношение (17).

Так как оператор Γ^0 диагонален по спиновому индексу l и по индексу проекции спина m , то векторам состояния ψ_M ставятся в соответствие определенные значения спина и его проекции. Спин частицы в ее системе покоя будем обозначать в дальнейшем индексом J . Так как согласно условию 4 работы [1] оператор Γ^0 эрмитов, а его матричные элементы в рассматриваемом случае действительны, то векторы состояний ψ_M , удовлетворяющие уравнению (42), обладают определенной пространственной четностью:

$P\psi_M = \pm\psi_M$, т.е. $(\psi_M)_{(-1/2, l_1)Jm} = \pm(\psi_M)_{(1/2, l_1)Jm}$. Принимая во внимание сказанное выше, запишем соотношение (42) как систему уравнений относительно компонент $\psi(l_1) \equiv (\psi_M)_{(1/2, l_1)Jm}$ вектора состояния с положительной четностью. Имеем

$$\begin{aligned} & \left(l_1 - \frac{1}{2}\right) \sqrt{(l_1 + J + 1)(l_1 - J)} \psi(l_1 + 1) + \left[(-1)^{l_1 + \frac{1}{2}} 2l_1 \left(J + \frac{1}{2}\right) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{2\lambda}{Mc_0} \left(l_1^2 - \frac{1}{4}\right) q^+ \left(\frac{1}{2}, l_1\right)\right] \psi(l_1) + \\ & \quad + \left(l_1 + \frac{1}{2}\right) \sqrt{(l_1 + J)(l_1 - J - 1)} \psi(l_1 - 1) = 0, \end{aligned} \quad (45)$$

где $J \geq l_1 - 1$, $l_1 \geq 3/2$. Величины $q^+(1/2, l_1)$ вычисляем с помощью рекуррентных соотношений (18) и (28) с $z > 2$.

Используя систему уравнений (18) и (28), находим, что при $l_1 \rightarrow +\infty$ имеет место следующая асимптотика:

$$q^+ \left(\frac{1}{2}, l_1\right) = r_0 \frac{u^{l_1 - 1/2}}{l_1 - 1/2} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{l_1}\right)\right), \quad (46)$$

где $u = (z + \sqrt{z^2 - 4})/2$, а r_0 — некоторая константа, зависящая от параметра z .

Далее, используя уравнения (45), находим асимптотическое поведение величины $\psi(l_1)$ при $l_1 \rightarrow +\infty$. Получаем

$$\begin{aligned} \psi(l_1) = & r_1 \left(-\frac{2\lambda r_0}{Mc_0}\right)^{l_1 - 1/2} \frac{u^{[(1/2)(l_1 - 1/2)(l_1 - 3/2)]}}{(l_1 - 3/2)!} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{l_1}\right)\right) + \\ & + r_2 \left(-\frac{Mc_0}{2\lambda r_0}\right)^{l_1 - 1/2} \frac{(l_1 - 3/2)!}{u^{[(1/2)(l_1 - 1/2)(l_1 - 3/2)]}} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{l_1}\right)\right), \end{aligned} \quad (47)$$

где r_1 и r_2 — константы, зависящие от величин Mc_0/λ и z как от параметров.

Если при некотором значении величины M константа r_1 не обращается в нуль, то соответствующее решение системы уравнений (45) относительно величин $\psi(l_1)$, очевидно, не может удовлетворять ни условию нормировки (43), ни условию (44). Если же $r_1 = 0$, то решение системы (45) удовлетворяет условию нормировки (43), т.е. это решение является вектором состояния частицы, а соответствующая величина M — ее массой. Итак, если в рассматриваемом варианте теории спектр масс не является пустым для некоторого множества значений параметра z из интервала $(2, +\infty)$, то он дискретен для всех значений z из этого множества.

Нормируемые решения системы уравнений (45) вряд ли можно выразить через какие-либо известные специальные функции, поэтому используются численные методы, которые позволяют найти любое количество наименьших значений масс M и начальных компонент $\psi(l_1)$ соответствующих векторов состояний частиц. Выберем величину и знак параметра $\lambda q_0^+/c_0$ такими, чтобы низшее энергетическое состояние обладало положительной пространственной четностью, а его масса была равна единице. Тогда при $z = 3.0$ наименьшие массы M и соответствующие спин и четность J^P частиц имеют значения, представленные в таблице.

J^P	$\frac{1}{2}^+$	$\frac{1}{2}^-$	$\frac{3}{2}^+$	$\frac{3}{2}^-$	$\frac{5}{2}^+$	$\frac{5}{2}^-$	$\frac{7}{2}^+$	$\frac{7}{2}^-$	$\frac{9}{2}^+$	$\frac{9}{2}^-$	$\frac{11}{2}^+$	$\frac{11}{2}^-$
M	1.00	1.99	1.59	3.44	2.95	6.71	5.97	14.0	12.7	30.4	28.1	68.0
	4.16	9.04	7.68	17.5	15.5	36.5	33.1	79.3	73.2	178.	166.	406.
	20.2	46.1	40.6	95.5	86.6	207.	191.	464.	433.			
	107.	251.	227.	544.	501.							
	597.											

Рассмотренный пример позволяет сделать следующее заключение, относящееся к построенной теории бесконечнокомпонентных полей класса ISFIR. Существуют такие релятивистски-инвариантные уравнения типа Гельфанда–Яглома (I.1), что, во-первых, их спектр масс не имеет непрерывной части, во-вторых, каждому значению спина и четности соответствует счетное множество масс, не ограниченное сверху, и, в-третьих, минимальное значение массы для заданного спина растет с ростом спина до бесконечности. Эти выводы качественно соответствуют той картине, которую дает нам партонная модель адронов вместе с концепцией мешков для кварков и глюонов. Более обстоятельный анализ спектров масс в построенной теории бесконечнокомпонентных полей с двойной симметрией и их соотношения с реальными спектрами барионов будут предметом нашей последующей работы.

Благодарности. Я признателен А.У. Климыку, А.А. Комару и В.И. Фушичу за полезные обсуждения затронутых в настоящей работе вопросов.

Список литературы

- [1] Л. М. Сладь. ТМФ. 2001. Т. 129. С. 68.
- [2] L. M. Slad. Mod. Phys. Lett. A. 2000. V. 15. P. 379.
- [3] И. М. Гельфанд, А. М. Яглом. ЖЭТФ. 1948. Т. 18. С. 703.
- [4] И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, З. Я. Шапиро. Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения. М.: Физматгиз, 1958.
- [5] M. Gell-Mann, M. Levy. Nuovo Cimento. 1960. V. 16. P. 705.
- [6] Ю. Весс, Дж. Беггер. Суперсимметрия и супергравитация. М.: Мир, 1986.
- [7] S. Coleman, J. Mandula. Phys. Rev. 1967. V. 159. P. 1251.
- [8] Г. Вейль. Классические группы. Их инварианты и представления. М.: ИЛ, 1947.
- [9] Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. Т.1. М.: Наука, 1973.

Поступила в редакцию 17.XII.2001 г.