Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Цейтлин, Предельные случаи суперструны в пространстве $AdS_5 \times S^5$, *ТМФ*, 2002, том 133, номер 1, 69–86

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf381>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 10:58:07

© 2002 г.

А. А. Цейтлин*

ПРЕДЕЛЬНЫЕ СЛУЧАИ СУПЕРСТРУНЫ В ПРОСТРАНСТВЕ $AdS_5 \times S^5$

Действие суперструны в гравитационном фоне пространства $AdS_5 \times S^5$ зависит от двух параметров: обратного натяжения струны α' и радиуса R . “Стандартное” AdS/CFT-соотношение предполагает, что струнное действие зависит только от их комбинации $\sqrt{\lambda} = R^2/\alpha'$. Используя результаты предыдущей статьи автора, посвященной суперструне в калибровке светового конуса, удастся явно получить эффективное действие при $\lambda = 0$. Ограниченное на нулевые моды, это действие совпадает с действием суперчастицы в пространстве $AdS_5 \times S^5$, и тем самым струнный спектр при $\lambda = 0$ должен включать, как и ожидалось, “защищенные” состояния супергравитации типа ПВ. Из недавних предположений следует гипотеза, что спектр такой струны с нулевым натяжением должен также содержать безмассовые состояния высших спинов в пространстве AdS_5 . Обсуждается случай другой параметризации струнного действия, в котором возможен непосредственный переход к пределу плоского пространства $R \rightarrow \infty$, но сами пределы $R \rightarrow 0$ и $\alpha' \rightarrow \infty$ оказываются неэквивалентными. Предельный переход $R \rightarrow 0$ при этом соответствует стягиванию сферы S^5 к нулевому размеру с одновременным “замораживанием” флуктуаций радиальной координаты пространства AdS_5 . При этом получается “нестандартный” сценарий AdS/CFT-соответствия.

Ключевые слова: суперструна в калибровке светового конуса, низкоэнергетический предел, эффективное действие, AdS/CFT-соответствие.

1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из многообразных проявлений струнной теории стало недавно появившееся описание дуальности в калибровочных теориях с помощью простейшего AdS/CFT-соответствия [1]. Успех такого описания зависит от прогресса в решении струнной теории, соответствующей пространству $AdS_5 \times S^5$ с рамон-рамоновским (R-R) потоком. Такая струнная теория описывается хорошо определенным струнным действием Грина–Шварца (ГШ) в калибровке светового конуса [2], [3], которое, в отличие от соответствующего действия в плоском пространстве [4], оказывается нелинейным. В частности, это действие содержит сложно устроенную часть, соответствующую бозонной S^5 -сигма-модели, и члены четвертого порядка по фермионным полям. Такое усложнение вполне ожидаемо, поскольку дуальная $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричная теория Янга–Миллса (SYM) должна быть нетривиальной даже в пределе больших N , а “наблюдаемые” этой теории (размерности операторов, коэффициенты разложений операторных

---

*Blackett Laboratory, Imperial College, London, UK; Department of Physics, The Ohio State University, Columbus, USA; Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия

произведений, энтропия и т.д.) представляют собой в общем случае сложные функции от постоянной связи 'т Хоофта $\lambda = g_{YM}^2 N$. В дальнейшем рассматриваются только классические или первично-квантованные струнные теории, т.е. предполагается, что $N \gg 1$.

Струнное действие в переменных $AdS_5 \times S^5$ в калибровке светового конуса также отличается от действия ГШ в переменных плоского пространства, поскольку первое действие не обладает явной двумерной (2D) лоренц-инвариантностью. Это общее свойство всех подобных струнных действий в искривленном пространстве, и само по себе оно не представляет принципиальную проблему, скажем, в описании с помощью фазового пространства, в котором естественной отправной точкой служит гамильтониан в калибровке светового конуса. Один из способов описания соответствующей квантовой задачи сводится к разложению бозонных и фермионных струнных координат (представляющих собой функции от τ и периодические функции от σ) по фурье-модам переменной σ , в результате чего получается нелинейная пространственно-временная суперсимметричная квантово-механическая система с бесконечным числом бозонных и фермионных степеней свободы. Для того чтобы проанализировать спектр этой системы, нужно сначала ограничить рассмотрение на случай состояний системы, не зависящих от S^5 -координат, а затем использовать методы численных вычислений для обработки оставшихся нелинейных членов в гамильтониане.

Можно надеяться, что задача нахождения струнного спектра упростится, если рассмотреть некоторые специальные предельные случаи параметров гамильтониана α' (обратное натяжение струны) и R (радиус AdS_5 и S^5). В общем случае струны в искривленном пространстве размера R можно рассмотреть несколько независимых пределов, в которых параметры α' или R независимо стремятся к нулю или к бесконечности (в предположении, что некоторая комбинация импульсов и координат остается конечной в данном пределе [3]). Например, в пределе, соответствующем теории частиц ($\alpha' \rightarrow 0$), струнный гамильтониан сводится к гамильтониану суперчастицы в калибровке светового конуса в пространстве $AdS_5 \times S^5$ [5]. Это предполагает, что "безмассовый" спектр, или спектр нулевых мод суперструны, совпадает со спектром супергравитации типа IIB, компактифицированной на S^5 [3]. Другой предел — это предел струны с нулевым натяжением $\alpha' \rightarrow \infty$, который, как и в плоском пространстве [6], можно получить, отбрасывая те члены гамильтониана, которые содержат производные по пространственной координате σ мирового листа струны.

В специальном случае AdS/CFT-соответствия, когда (в пределе больших N) граничная конформная теория имеет спектр размерностей, зависящий от единственного параметра λ , дуальная к ней струнная теория также должна эффективно зависеть лишь от одного динамического параметра — эффективного натяжения, пропорционального $\sqrt{\lambda}$. AdS/CFT-соответствие при этом сводится к специальной растяжке струнной координаты, являющейся радиальной координатой пространства AdS, и соответствующего импульса с тем, чтобы гамильтониан зависел от α' и R только через их комбинацию $\lambda = R^4/\alpha'^2$. Заметим, что при таком выборе координат (какие бы граничные условия ни выбирались) невозможно непосредственно получить в пределе $R \rightarrow \infty$ стандартный спектр суперструны типа IIB в плоском пространстве. Это, однако, не представляет серьезной проблемы, так как этот спектр не может быть получен из калибровочной теории ни в каком разумном пределе.

В последнее время предел $\lambda \rightarrow 0$ исследовался в связи с предположением, что свободная конформная $\mathcal{N} = 4$ SYM-теория в пределе больших N должна быть дуальна теории безмассовых полей высших спинов в пространстве AdS_5 [7]–[11]. Здесь основное наблюдение состоит в том, что в свободной калибровочной теории присутствуют сохраняющиеся “бесследовые” конформные токи высших спинов [12], которые дуальны безмассовым полям высших спинов в пространстве AdS_5 (т.е. эти токи, заданные на границе пространства AdS_5 , дуально присоединены к граничным значениям соответствующего поля). Важно отметить, что эти безмассовые состояния высших спинов непосредственно возникают в спектре струны $AdS_5 \times S^5$ в пределе $\lambda \rightarrow 0$.

С учетом этих мотивировок ниже выводится и обсуждается общее выражение для действия струны $AdS_5 \times S^5$ и для гамильтониана из работы [3] в предельном случае $\lambda \rightarrow 0$. В данной работе рассмотрение ограничивается одним лишь формальным обсуждением полученных классических действий. Общий подход к взятию предела $R \rightarrow 0$ включает две различные процедуры в зависимости от того, каким образом масштабируется радиальная переменная пространства AdS. Отправным моментом первой процедуры, приводящей к стандартному AdS/CFT-соответствию, служит гамильтониан, зависящий от R и α' только через их комбинацию $\sqrt{\lambda} = R^2/\alpha'$. При этом предельный переход $R \rightarrow 0$ при фиксированном параметре α' эквивалентен пределу нулевого натяжения струны $\alpha' \rightarrow \infty$ при фиксированном R , т.е. в этом пределе сохраняется структура $AdS_5 \times S^5$ пространства-времени. Другой способ взятия предела $R \rightarrow 0$ связан с исходным действием в виде, который допускает непосредственный переход к плоскому пространству в пределе $R \rightarrow \infty$. При этом смысл предельного перехода $R \rightarrow 0$ состоит в том, что сфера S^5 сжимается до нулевого размера, в то время как масштаб радиального направления пространства AdS_5 остается конечным. Этот второй сценарий взятия предела был предложен ранее в работе [13], в которой струнное действие записывалось в ковариантной k -симметричной калибровке и рассматривалась альтернативная версия AdS/CFT-соответствия (т.е. соответствия между $AdS_5 \times S^5$ струной и $\mathcal{N} = 4$ SYM-теорией).

Прежде чем переходить к обсуждению струнных действий и их пределов, стоит остановиться на “кинематическом” описании AdS/CFT-соответствия в пределе $\lambda = 0$. Стандартное AdS/CFT-соответствие может быть описано в секторе полей 5D супергравитации, или граничных операторов из супермультиплета тензора напряженности, если присоединить суперконформные токи $\mathcal{N} = 4$ SYM-теории к полям мультиплета $\mathcal{N} = 4$ конформной супергравитации с последующим интегрированием по полям $\mathcal{N} = 4$ SYM-теории. Полученное при этом эффективное действие в пределе больших N должно воспроизводить калибровочное действие 5D супергравитации (а точнее, члены второго и третьего порядка этого действия, а при больших λ и члены старших порядков), вычисленное для решений задачи Дирихле [1]. То, что это так, было явно показано, в частности, для членов второго порядка по полю конформного гравитона [14]. Присоединяя квантовую SYM-теорию к мультиплету фоновой конформной супергравитации и интегрируя по полям SYM-теории, можно найти индуцированное действие полей конформной супергравитации:

$$S = \int C_{mnkl} \ln(\epsilon^2 D^2) C_{mnkl} + \dots = c_1 \int (C_{mnkl}^2 + \dots) + \text{нелокальные члены}.$$

Члены второго и третьего порядка в этом действии, разложенном по степеням полей, порождают в коформной SYM-теории “защищенные” корреляторы вида $\langle T_{mn} T_{kl} \rangle$ и $\langle T_{mn} T_{kl} T_{sr} \rangle$. Эквивалентное нелокальное действие возникает как решение задачи Дирихле для 5D $\mathcal{N} = 8$ калибровочной супергравитации в фоновой метрике пространства AdS_5 .

Точно такую же процедуру “индуцированного действия” можно проделать для свободной $\mathcal{N} = 4$ калибровочной теории, которая может быть присоединена к полям высших спинов, обобщающим поля мультиплета коформной супергравитации. Присоединяя сохраняющиеся бесследовые билинейные токи к соответствующим коформным полям старших спинов, интегрируя по свободным полям SYM-теории (т.е. вычисляя логарифмы детерминантов на соответствующих фоновых полях) и разлагая полученное эффективное действие до членов второго порядка по фоновым полям, можно затем сравнить полученные члены второго порядка с классическим свободным действием полей старшего спина в пространстве AdS_5 , вычисленных для решений задачи Дирихле. Как и в случае стандартной коформной супергравитации, соответствие между этими двумя действиями возникает в силу чисто кинематических причин, т.е. обусловлено симметриями (относительно соответствующих замечаний и обсуждений AdS/CFT-соответствия для высших спинов см. [9], [10], [15], [16] (в калибровке светового конуса) и [11] (в ковариантной калибровке)¹⁾).

Более точно, член второго порядка локальной (логарифмически-расходящейся) части соответствующего 4D эффективного действия представляет собой свободное коформное действие полей высших спинов, которое имеет следующую структуру [18]:

$$L = \sum_{s=1,2,\dots} \phi_s \partial^{2s} P_s \phi_s + \sum_{s=1/2,3/2,\dots} \psi_s \partial^{2s-1} \gamma^m \partial_m P_s \psi_s. \quad (1)$$

Здесь члены со спинами $s = 2$ и $s = 3/2$ отвечают стандартным вейлевским частицам коформной супергравитации: гравитону и гравитино [19]. Далее, P_s суть операторы проекций на поперечные бесследовые составляющие полностью симметричных полей [18]. В дальнейшем рассматриваются только симметричные бозонные поля $\phi_s = (\phi_{m_1 \dots m_s})$. Коформные полевые теории со взаимодействующими полями старших спинов должны существовать в пределе плоского пространства, в котором в них появляются безразмерные константы взаимодействий третьего и старших порядков [20], [21]. Присутствие старших производных в кинетических членах приводит к неунитарности (подобно тому, как это происходит в коформной супергравитации или в вейлевской гравитации), но эта неунитарность в нашем рассмотрении не важна. Причина в том, что такая теория может рассматриваться как индуцированная (нелокальная) эффективная полевая теория, которая просто содержит информацию о корреляторах коформных токов полей старших спинов SYM-теории. В работах [20], [21] содержится обсуждение возможных связей между коформными теориями полей старших спинов в плоском пространстве, безмассовыми моделями полей старших спинов в пространстве AdS и струн-

¹⁾Заметим, что теория при $\lambda = 0$ содержит несколько токов, или коформных полей, одного и того же спина. Соответствующее обобщение коформной супергравитации должно тем самым содержать, в частности, несколько коформных гравитонов спина 2 [7]. Такие теории недавно обсуждались в работе [17].

ной теорией, однако голографический сдвиг пространственной размерности $4 \rightarrow 5$, который весьма существен для AdS/CFT-соответствия, остался за пределами обсуждения.

Поля ϕ_s имеют канонические размерности (длина) $^{s-2}$ и могут быть присоединены к бесследовым токам с помощью токовых членов

$$\int d^4x \phi_s(x) J_s(x), \quad J_s = X \partial^s P_s X + \dots,$$

где токи J_s сохраняются для полей X на массовой оболочке (поля X имеют каноническую размерность (длина) $^{-1}$ и представляют собой скаляры $\mathcal{N} = 4$ векторного мультиплета). Начиная с лагранжиана

$$L = X \partial^2 X + \phi_s(x) X \partial^s P_s X + \dots \quad (2)$$

и интегрируя по полям SYM-теории, можно получить индуцированное действие $\Gamma[\phi_s] \sim \ln \det(-\partial^2 + \phi_s \partial^s P_s)$.

Член второго порядка в этом действии пропорционален члену

$$\int d^4p \phi_s(p) p^{2s} \ln(\epsilon^2 p^2) P_s \phi_s(-p)$$

или, в координатном представлении, члену, который символически можно записать в виде

$$\int \phi_s \partial^{2s} \ln(\epsilon^2 \partial^2) P_s \phi_s.$$

Локальная (расходящаяся) часть этого действия представляет собой вышеприведенное чистое действие для конформных полей старших спинов. С точностью до этой локальной части, член второго порядка в действии $\Gamma[\phi_s]$ можно также представить в следующем виде:

$$\int d^4x d^4x' \frac{\phi_s(x) \hat{P}_s(x-x') \phi_s(x')}{(|x-x'|^2 + \epsilon^2)^{s+2}}. \quad (3)$$

В соответствии с соображениями симметрии тот же самый нелокальный функционал должен следовать из решения задачи Дирихле для соответствующих безмассовых полей старших спинов в пространстве AdS_5 . Включение нелинейных по ϕ_s членов, взаимодействующих с полями SYM-теории, не влияет на значения корреляторов конформных токов в несовпадающих точках, но оказывается существенным для обеспечения явной симметрии полей старших спинов в индуцированном действии²⁾.

²⁾Заметим, что рассматривая действие $\mathcal{N} = 4$ конформной супергравитации как локальную часть индуцированного действия, порожденную интегрированием по полям $\mathcal{N} = 4$ SYM-теории на фоне конформной супергравитации, можно получить, что действие конформной супергравитации должно содержать в чистом виде свободное действие тензора Вейля C_{mnkl}^2 , не включающее никакого дополнительного множителя, зависящего от скалярного поля [22], [18].

2. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД $R \rightarrow 0$ В СТРУННОМ ДЕЙСТВИИ В КОВАРИАНТНОЙ КАЛИБРОВКЕ

Приведем сначала эвристическое обсуждение предела $R \rightarrow 0$, который берется непосредственно в действии суперструны $AdS_5 \times S^5$ в ковариантной калибровке.

Лагранжиан суперструны [23] может быть записан в параметризации “4 + 6” пространства $AdS_5 \times S^5$, соответствующей метрике ($a = 0, \dots, 3$, $M = 1, \dots, 6$)

$$ds^2 = Y^2 dx^a dx^a + R^2 Y^{-2} dY^M dY^M = e^{2\phi} dx^a dx^a + R^2 d\phi^2 + R^2 du^M du^M, \quad (4)$$

$$Y^M = e^\phi u^M, \quad u^M u^M = 1.$$

Эта метрика переходит в пределе $R \rightarrow \infty$ в стандартное плоское пространство (полагая $\phi = \varphi/R$, но без масштабирования x^a). Другая параметризация основана на масштабном преобразовании переменной $Y \rightarrow RY$ (т.е. на сдвиге ϕ на $\ln R$). Тогда перед 10D метрикой возникает множитель R^2 :

$$ds^2 = R^2 (Y^2 dx^a dx^a + Y^{-2} dY^M dY^M) = R^2 (e^{2\phi} dx^a dx^a + d\phi^2 + du^M du^M). \quad (5)$$

Этот второй вариант лежит в основе стандартного AdS/CFT-соответствия, в сценарии которого предусмотрено, что струнное действие зависит от параметра R только через комбинацию $\sqrt{\lambda} = R^2/\alpha'$. Этот выбор означает, что все расстояния, включая расстояния на мировом листе струны, эффективно измеряются в единицах R .

Интерпретируя супергруппу изометрий $PSU(2, 2|4)$ пространства $AdS_5 \times S^5$ как $\mathcal{N} = 4$ суперконформную группу в четырех измерениях, можно естественным образом разбить множество всех фермионных генераторов на четыре стандартных супергенератора Q_i и четыре супергенератора специальных конформных преобразований S_i (мы опускаем индексы 4D спиноров). Обозначим через θ_i и η_i соответствующие координаты суперструны [2], [3]. κ -Симметричная “ S -калибровка” из работы [2], ковариантная относительно 4D преобразований Лоренца, отвечает равенству нулю всех координат η_i . Получающийся при этом лагранжиан имеет следующую простую структуру [2]:

$$L = -\frac{1}{2} \sqrt{g} [Y^2 (\partial_\mu x^a - i\theta \sigma^a \partial_\mu \theta)^2 + R^2 Y^{-2} \partial^\mu Y^M \partial_\mu Y^M] - i\epsilon^{\mu\nu} R \partial_\mu Y^M \theta \rho^M \partial_\nu \theta, \quad (6)$$

где

$$i\theta \sigma^a \partial_\mu \theta \equiv i\theta_{\dot{a}i} \sigma^{a\dot{a}b} \partial_\mu \theta_{\dot{b}}^i + \text{э.с.}, \quad i\theta \rho^M \partial_\nu \theta \equiv i\theta^{\dot{a}i} \rho_{ij}^M \partial_\nu \theta_{\dot{a}}^j + \text{э.с.}$$

Действия в работах [24]–[26] эквивалентны с точностью до выбора базиса в представлении 10D матриц Дирака. В данной работе используются следующие обозначения: $a, b = 0, 1, 2, 3$ суть индексы 4D пространства-времени, индексы $SO(6)$ обозначаются через $M, N = 1, \dots, 6$, индексы $SU(4)$ – через $i, j = 1, 2, 3, 4$ и, наконец, индексы двумерной мировой поверхности суть $\mu, \nu = 0, 1$. Для 4D и 6D матриц Дирака используются “киральные” представления:

$$\gamma^a = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^a \\ \bar{\sigma}^a & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^M = \begin{pmatrix} 0 & (\rho^M)^{ij} \\ \rho_{ij}^M & 0 \end{pmatrix},$$

в которых $(\rho^M)^{ij} \equiv -(\rho_{ij}^M)^*$, $a, \dot{a} = 1, 2$ суть $sl(2, C)$ -индексы (т.е. индексы четырехмерных спиноров) и $\theta_{\dot{a}i}^\dagger = -\theta_{\dot{a}}^i$, $\theta_i^{\dagger a} = \theta^{\dot{a}i}$. 10D спиноры могут быть представлены в виде (θ^i, θ_i) .

Лагранжиан (6) отвечает метрике (4), в которой переменные Y^M безразмерны (координаты x^a и R имеют размерность длины, а фермионные координаты θ имеют размерность [длина] $^{1/2}$). Получающееся струнное действие

$$I = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2\sigma L$$

при этом оказывается безразмерным. Для того чтобы показать, что действие (6) имеет правильный предел плоского пространства, положим $\phi = \varphi/R$ и устремим масштабный параметр R к бесконечности.

Действие, отвечающее метрике (5), получается при масштабном преобразовании $Y^M \rightarrow RY^M$:

$$L = R^2 \left\{ -\frac{1}{2} \sqrt{g} [Y^2 (\partial_\mu x^a - i\theta \sigma^a \partial_\mu \theta)^2 + Y^{-2} \partial^\mu Y^M \partial_\mu Y^M] - i\epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu Y^M \theta \rho^M \partial_\nu \theta \right\}. \quad (7)$$

Как отмечалось во введении, существует множество способов построения предельного перехода $R \rightarrow 0$; результат зависит от дополнительных предположений о том, какие координаты и аргументы (импульсы) внешних состояний остаются конечными в данном пределе. Например, процедуры, отвечающие лагранжианам (6) и (7), приводят к существенно различным результатам. Действие, соответствующее лагранжиану (7), зависит от R только лишь через безразмерную комбинацию $\lambda^{1/4} = R/\sqrt{\alpha'}$, так что предельный переход $R \rightarrow 0$ отвечает пределу $\lambda \rightarrow 0$, а потому эквивалентен предельному переходу $\alpha' \rightarrow \infty$, в котором R и внешние импульсы остаются конечными.

В заключительной части этого раздела мы следуем работе [13] и обсуждаем вычисление предела $R \rightarrow 0$ в случае лагранжиана (6). Непосредственно полагая $R = 0$ в выражении (6), получим

$$L_{R \rightarrow 0} = -\frac{1}{2} \sqrt{g} Y^2 (\partial_\mu x^a - i\theta \sigma^a \partial_\mu \theta)^2, \quad (8)$$

откуда следует, что в этом пределе шесть координат Y^M эффективно “отщепляются”. Такое “укороченное” действие все еще обладает ожидаемой глобальной линейной $\mathcal{N} = 4$ суперсимметрией и 4D конформной инвариантностью (при этом по полю Y еще предстоит проинтегрировать).

Действие (8), разумеется, не определяет согласованную теорию критической струны, построение которой требует более систематической процедуры взятия предела $R \rightarrow 0$ в континуальном интеграле с вставками внешних операторов. Поскольку коэффициент при кинетическом члене по переменным Y^M в этом пределе обращается в нуль, то это означает, что предел $R \rightarrow 0$ становится сингулярным, если внешний оператор нетривиально зависит от ненулевых мод переменных Y^M . Поэтому такой предел существует только в случае, когда внешние состояния не зависят от ненулевых мод переменных в радиальном направлении пространства AdS_5 и во всех направлениях переменных сферы S^5 . Тем не менее еще необходимо проинтегрировать по ненулевым модам переменных Y^M в континуальном интеграле (даже если эти моды не взаимодействуют с внешними состояниями), поскольку это необходимо для согласованности получаемой струнной теории. В самом деле, сигма-модель (6) струны $AdS_5 \times S^5$ конформна и имеет правильный центральный заряд при любом R [23], [27], а потому взятие предела после

интегрирования по всем полям, зависящим от ненулевых мод переменных Y^M , не меняет этих свойств.

Нулевые моды переменных Y^M могут в общем случае взаимодействовать с внешними состояниями, и интеграл по этим модам может быть вполне нетривиальным, т.е. символически получается выражение³⁾

$$\langle F \rangle = \int d^6 Y_0 M(Y_0) \int Dx D\theta e^{iI[x, \theta, Y_0]} F[x, \theta, Y_0], \quad (9)$$

где через Y_0 обозначена постоянная составляющая переменной Y . В этот интеграл также добавлен детерминант меры интегрирования $M(Y_0) = \sqrt{G_{10}} = Y^{-2}$ (но не производится явное разбиение переменных x и θ на постоянные и непостоянные моды). Предполагая далее, что внешние состояния не зависят от угловых переменных сферы S^5 (т.е. что состояние F $SO(6)$ -симметрично) и полагая $Y_0 = e^{\phi_0}$ и $T = 1/(2\pi\alpha')$, получим

$$\langle F \rangle \sim \int d\phi_0 e^{4\phi_0} \int Dx D\theta \exp \left[-\frac{i}{2} T \int d^2 \sigma \sqrt{g} e^{2\phi_0} (\partial_\mu x^a - i\theta \sigma^a \partial_\mu \theta)^2 \right] F[x, \theta, \phi_0]. \quad (10)$$

При этом интегрирование по постоянным модам ϕ_0 должно гарантировать масштабную инвариантность пространства состояний полученной эффективной 4D теории, т.е. инвариантность при масштабных преобразованиях переменных x^a (с точностью до общего множителя, обусловленного масштабными преобразованиями меры интегрирования).

Подводя итог, можно сказать, что в частном случае предельного перехода $R \rightarrow 0$ в лагранжиане (6), отвечающем метрике (4), струна может флуктуировать только в четырех пространственно-временных направлениях (и в соответствующих фермионных направлениях), в то время как интегрирование по постоянной составляющей ϕ_0 радиальной координаты пространства AdS_5 приводит к усреднению по эффективному натяжению струны ($T \equiv T e^{2\phi_0}$)⁴⁾

$$\langle F \rangle \sim \int_0^\infty dT T^{3/2} \int Dx D\theta \exp \left[-\frac{i}{2} T \int d^2 \sigma \sqrt{g} (\partial_\mu x^a - i\theta \sigma^a \partial_\mu \theta)^2 \right] F[x, \theta, T]. \quad (11)$$

Если же выбрать в качестве исходного действие (7), то предел $R \rightarrow 0$ становится эквивалентен пределу нулевого натяжения струны $T \rightarrow 0$, что соответствует пределу сильной связи по всем десяти струнным координатам (см. [28]).

Вообще говоря, ковариантное калибровочное действие оказывается не лучшей отправной точкой при исследовании предела $R \rightarrow 0$, поскольку оно не позволяет найти спектр возмущений “малых” струн (в этом действии кинетический фермионный член плохо определен). Поэтому обратимся теперь к рассмотрению предельного перехода $R \rightarrow 0$ в калибровке светового конуса.

³⁾ При этом опять предполагается, что интегрирование сначала идет по всем ненулевым модам переменных Y^M , что позволяет сократить конформную аномалию и обеспечивает конечность модели.

⁴⁾ Это полностью аналогично интегрированию по постоянной составляющей поля Лиувилля.

3. СУПЕРСТРУННОЕ ДЕЙСТВИЕ В ФЕРМИОННОЙ КАЛИБРОВКЕ СВЕТОВОГО КОНУСА

В плоском пространстве наложение калибровки светового конуса для суперструны включает в себя фермионное условие калибровки светового конуса (т.е. фиксацию κ -симметрии с помощью наложения условия $\gamma^+ \theta^I = 0$) и бозонное условие калибровки светового конуса (т.е. наложение конформного калибровочного условия⁵⁾ $\sqrt{g} g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$ с последующей фиксацией остаточной симметрии конформных диффеоморфизмов с помощью наложения условия $x^+(\tau, \sigma) = p^+ \tau$). Уже само наложение фермионного условия калибровки светового конуса существенно упрощает действие ГШ в плоском пространстве, которое при этом становится квадратичным по θ . Схожим образом в подходе $AdS_5 \times S^5$ можно предложить калибровочное условие типа калибровки светового конуса, фиксирующее κ -симметрию [2], в котором фермионный кинетический член имеет структуру $\partial x^+ \theta \partial \theta$. Эта калибровка содержит зависимость от 4D координат только через комбинацию x^+ , так что невырожденность фермионного кинетического члена не зависит от выбора струнного фонов поля в поперечных направлениях. Чтобы еще больше упростить фермионный кинетический член, можно наложить бозонное калибровочное условие светового конуса $x^+ = p^+ \tau$. Фиксация бозонной составляющей калибровки светового конуса и вычисление получившегося при этом гамильтониана в калибровке светового конуса было детально описано в работе [3] (см. также [29]) и составляет предмет следующего раздела.

Опишем сначала струнное действие, получаемое после наложения калибровки светового конуса, фиксирующей κ -симметрию. В отличие от лоренц-ковариантной S -калибровки, в которой 16 фермионов η_i полагаются равными нулю, калибровка светового конуса, использованная в работе [2], отвечает обращению в нуль половины из 16 фермионных переменных θ_i и половины из 16 фермионных переменных η_i (где половина переменных определяется условиями инвариантности по отношению к $SO(1, 1)$ -вращениям в направлениях светового конуса). Остаточные фермионы (которые по-прежнему будут обозначаться θ_i и η_i) представляют собой просто 4 + 4 комплексных антикоммутирующих переменных, не несущих на себе никаких дополнительных лоренцевых спинорных индексов. Действие струны ГШ в плоском пространстве в калибровке светового конуса ($\gamma^+ \theta = 0$) [4], будучи записано в сходной параметризации в 16 фермионных координатах, имеет следующую структуру (здесь опущены индексы алгебры $SU(4)$):

$$L = -\frac{1}{2} \sqrt{g} (\partial_\mu x)^2 - \left[\frac{i}{2} \sqrt{g} \partial^\mu x^+ (\theta \partial_\mu \theta + \eta \partial_\mu \eta) - \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu x^+ \eta \partial_\nu \theta + \text{э.с.} \right]. \quad (12)$$

Этот вид исходного лагранжиана струны ГШ представляет собой предел плоского пространства ($R \rightarrow \infty$) лагранжиана струны $AdS_5 \times S^5$ в калибровке светового конуса, приведенного в работе [2], если этот лагранжиан представить в параметризации, ис-

⁵⁾ В дальнейшем мы используем 2D метрику Минковского мирового листа струны $g_{\mu\nu}$ с $g \equiv -\det g_{\mu\nu}$.

пользованной в формуле (4) (ср. с формулой (6)),

$$\begin{aligned}
L = & -\sqrt{g} \left[Y^2 (\partial^\mu x^+ \partial_\mu x^- + \partial^\mu x \partial_\mu \bar{x}) + \right. \\
& + \frac{1}{2} R^2 Y^{-2} (\partial_\mu Y^M + i R^{-2} \eta \rho^{MN} \eta Y^N Y^2 \partial_\mu x^+)^2 \Big] - \\
& - \left[\frac{i}{2} \sqrt{g} g^{\mu\nu} Y^2 \partial_\mu x^+ \left(\theta^i \partial_\nu \theta_i + \eta^i \partial_\nu \eta_i + \frac{i}{2} R^{-2} Y^2 \partial_\nu x^+ (\eta^2)^2 \right) - \right. \\
& \left. - \epsilon^{\mu\nu} |Y| \partial_\mu x^+ \eta^i \rho_{ij}^M Y^M (\partial_\nu \theta^j - i R^{-1} \sqrt{2} |Y| \eta^j \partial_\nu x) + \text{э.с.} \right]. \quad (13)
\end{aligned}$$

Четыре координаты x^a расщепляются на координаты светового конуса (x^+, x^-) и две комплексные поперечные координаты $x_\perp = (x, \bar{x})$, т.е.

$$x^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^3 \pm x^0), \quad x, \bar{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^1 \pm i x^2).$$

Матрицы ρ^M (внедиагональные блоки дираковских матриц в 6D случае, записанных в киральном представлении) удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned}
\rho_{ij}^M &= -\rho_{ji}^M, & (\rho^M)^{il} \rho_{lj}^N + (\rho^N)^{il} \rho_{lj}^M &= 2\delta^{MN} \delta_j^i, \\
(\rho^M)^{ij} &\equiv -(\rho_{ij}^M)^*, & \rho^{MN} &\equiv \rho^{[M} \rho^{\dagger N]},
\end{aligned}$$

т.е. $(\rho^{MN})_j^i = (\rho^M)^{il} \rho_{lj}^N / 2 - (M \leftrightarrow N)$. Кроме того, $\theta_i^\dagger = \theta^i$, $\eta_i^\dagger = \eta^i$, $\theta^2 \equiv \theta^i \theta_i$ и $\eta^2 \equiv \eta^i \eta_i$.

Из суперконформной алгебры $psu(2, 2|4)$ следует, что 16 физических грассмановых переменных содержат “линейные” θ^i и “нелинейные” η^i координаты и их эрмитово сопряженные θ_i и η_i , которые преобразуются по фундаментальным представлениям группы $SU(4)$ и связаны с суперсимметризованными преобразованиями группы Пуанкаре и группы конформных преобразований в описании граничной (4D) теории в калибровке светового конуса. Действие при этом инвариантно относительно сдвигов $\theta \rightarrow \theta + \epsilon$ (с дополнительным сдвигом переменной x^-).

Зависимость теории от радиуса R согласована с тем, что в выражении (13) переменные θ и η имеют размерность [длина] $^{1/2}$, а переменная Y^M безразмерна. η -Фермионные переменные с множителями R^{-2} соответствуют связности (а значит, и взаимодействию типа R-R) и членам типа кривизны, которые исчезают в пределе плоского пространства ($|Y| \rightarrow 1$), в котором возникает лагранжиан (12). Наличие члена порядка η^4 связано с ненулевой кривизной фонового поля; “дополнительные” члены порядка η^2 можно интерпретировать как члены, описывающие взаимодействие с фоновым R-R полем, представляющим собой 5-форму [23].

Лагранжиан (13), записанный через радиальную переменную ϕ пространства AdS_5 и единичный 6D вектор u^M , параметризующий сферу S^5 , имеет вид $(Y^M = e^\phi u^M, |Y| =$

e^ϕ) [2]

$$\begin{aligned}
L = & -\sqrt{g}e^{2\phi}(\partial^\mu x^+ \partial_\mu x^- + \partial^\mu x \partial_\mu \bar{x}) - \\
& - \frac{1}{2}\sqrt{g}R^2[\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi + (\partial_\mu u^M + iR^{-2}\eta\rho^{MN}\eta u^N e^{2\phi} \partial_\mu x^+)^2] - \\
& - \left[\frac{i}{2}\sqrt{g}g^{\mu\nu}e^{2\phi}\partial_\mu x^+ \left(\theta^i \partial_\nu \theta_i + \eta^i \partial_\nu \eta_i + \frac{i}{2}R^{-2}e^{2\phi}\partial_\nu x^+ (\eta^2)^2 \right) - \right. \\
& \left. - \epsilon^{\mu\nu}e^{2\phi}\partial_\mu x^+ \eta^i \rho_{ij}^M u^M (\partial_\nu \theta^j - iR^{-1}\sqrt{2}e^\phi \eta^j \partial_\nu x) + \text{э.с.} \right]. \quad (14)
\end{aligned}$$

Обсудим теперь предельный переход $R \rightarrow 0$. Результат взятия этого предела будет зависеть от дополнительных предположений о том, какие координаты и соответствующие источники остаются конечными в этом пределе. Для того чтобы построить регулярный предел $R \rightarrow 0$ начиная с действия (14), надо сначала сделать масштабное преобразование фермионов с множителем R^{-1} . С одной стороны, можно потребовать, чтобы внешние состояния не зависели от η , т.е. переменная η может быть эффективно положена равной нулю⁶⁾. Формально полагая $R = 0$ в выражении для действия, получим

$$L_{R \rightarrow 0} = -\sqrt{g}e^{2\phi} \left[\partial^\mu x^+ \partial_\mu x^- + \partial^\mu x \partial_\mu \bar{x} + \partial^\mu x^+ \left(\frac{i}{2}\theta^i \partial_\mu \theta_i + \text{э.с.} \right) \right]. \quad (15)$$

Это действие представляет собой аналог “наивного” действия (8), взятый в калибровке светового конуса. Как и в предыдущем разделе, для построения хорошо определенного предела следует усреднить это действие только по переменным, которые не зависят от ненулевых мод полей ϕ и u^M (по этим модам необходимо проинтегрировать до взятия предела $R \rightarrow 0$). Поскольку интеграл по ϕ при этом эффективно сводится к простому интегралу по постоянной моде (и, как и в формуле (11), отвечает усреднению по константе натяжения струны), то можно явно наложить стандартное бозонное условие калибровки светового конуса $x^+ = p^+ \tau$. Отметим, что в отличие от стандартного действия ГШ в плоском пространстве, получающийся в действии фермионный член не содержит производных по собственной пространственной координате мирового листа струны, т.е. 2D лоренцева инвариантность нарушается. Как обсуждалось в работах [2], [3], это свойство оказывается общим для всех действий в калибровке светового конуса в пространствах AdS ненулевой кривизны.

Найдем теперь, какое действие возникает в стандартном подходе AdS/CFT-соответствия, т.е. получим действие, соответствующее метрике (5), которое тем самым связано с лагранжианом (14) с помощью масштабного преобразования $e^\phi \rightarrow Re^\phi$:

$$\begin{aligned}
L = & R^2 \left\{ -\sqrt{g}e^{2\phi}(\partial^\mu x^+ \partial_\mu x^- + \partial^\mu x \partial_\mu \bar{x}) - \right. \\
& - \frac{1}{2}\sqrt{g}[\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi + (\partial_\mu u^M + i\eta\rho^{MN}\eta u^N e^{2\phi} \partial_\mu x^+)^2] - \\
& - \left[\frac{i}{2}\sqrt{g}g^{\mu\nu}e^{2\phi}\partial_\mu x^+ \left(\theta^i \partial_\nu \theta_i + \eta^i \partial_\nu \eta_i + \frac{i}{2}e^{2\phi}\partial_\nu x^+ (\eta^2)^2 \right) - \right. \\
& \left. \left. - \epsilon^{\mu\nu}e^{2\phi}\partial_\mu x^+ \eta^i \rho_{ij}^M u^M (\partial_\nu \theta^j - i\sqrt{2}e^\phi \eta^j \partial_\nu x) + \text{э.с.} \right] \right\}. \quad (16)
\end{aligned}$$

⁶⁾ Более систематический подход связан с введением комбинации $\zeta \equiv R^{-1}\eta$, которая остается конечной в пределе $R \rightarrow 0$. Тогда зависимость от ζ отщепляется в пределе $R \rightarrow 0$, т.е. этот предел оказывается регулярным при условии, что внешние состояния не зависят от ζ .

Кривизна R при этом входит в действие в комбинации $\lambda = R^2/\alpha'$, так что предельный переход $R \rightarrow 0$ эквивалентен пределу $\lambda \rightarrow 0$. Как и в действии в ковариантной калибровке (7), предельный переход $R \rightarrow 0$ отвечает здесь пределу сильной связи по всем направлениям, и при этом не происходит никакого естественного упрощения действия (если только не предполагать, что внешние состояния зависят от масштабированных координат x^- , x , $\bar{x}$ и θ таким образом, что из их кинетических членов возникает множитель R^2 , но этот случай эффективно сводится к действию (15)). В таком подходе описание фазового пространства в калибровке светового конуса, которое будет дано ниже, оказывается более подходящим.

4. ФИКСАЦИЯ БОЗОННОЙ КАЛИБРОВКИ СВЕТОВОГО КОНУСА В ПРОСТРАНСТВЕ AdS

Для того чтобы убрать члены с производными ∂x^+ из кинетических фермионных членов в действиях (14) или (16), надо наложить бозонную калибровку светового конуса. В плоском пространстве это можно сделать, если зафиксировать конформную калибровку с помощью условия $\sqrt{g}g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$, а затем заметить, что поскольку получаемое при этом уравнение $\partial^2 x^+ = 0$ имеет общее решение вида $x^+(\tau, \sigma) = f(\tau - \sigma) + h(\tau + \sigma)$, то остаточная симметрия конформных диффеоморфизмов может быть зафиксирована на плоскости, если наложить условие $x^+(\tau, \sigma) = p^+\tau$. Однако в случае искривленного пространства AdS это бозонное калибровочное условие оказывается несогласованным со стандартной конформной калибровкой (при наложенной конформной калибровке становится невозможным найти общее решение уравнения на x^+ , просто положив $x^+ = p^+\tau$). Поэтому приходится налагать на $g_{\mu\nu}$ такие условия, которые нарушают явную 2D лоренцеву симметрию. Например, согласованными калибровочными условиями являются условия (см. [2]) $e^{2\phi}\sqrt{g}g^{00} = -1$, $x^+ = p^+\tau$. Налагая эти условия на действие (14) и интегрируя по переменной x^- и остающимся компонентам 2D метрики, можно получить действие в явном виде, которое эквивалентно действию, полученному в работе [3] в подходе фазового пространства. Близко связанный с этим описанием альтернативный подход, впервые предложенный Поляковым [30], представляет собой модификацию конформного калибровочного условия $\sqrt{g}g^{ab} = \text{diag}(-e^{-2\phi}, e^{2\phi})$, которая оказывается совместной, как и в случае плоского пространства, с третьим условием калибровки светового конуса $x^+ = p^+\tau$. В работе [31] было найдено еще одно эквивалентное действие, получаемое при наложении калибровочного условия $g_{01} = 0$, $x^+ = p^+\tau$.

Множители e^ϕ , отвечающие радиальному направлению пространства AdS_5 , взаимодействуют по-разному с членами, содержащими производные по ∂_0 и ∂_1 в получившемся действии, в то время как часть действия, отвечающая переменным сферы S^5 , тоже взаимодействует с ϕ некоторым образом. В отсутствие явной 2D лоренцевой симметрии при описании калибровочной теории в калибровке светового конуса естественно использовать формулировку фазового пространства. Поляковское описание струны в координатном пространстве, основанное на одной из калибровок, рассмотренных выше, эквивалентно подходу Годдарда, Голдстоуна, Ребби и Торна [32], основанному на описании струны с помощью фазового пространства и на фиксации преобразований диффеоморфизмов с помощью наложения условий $x^+ = \tau$, $P^+ = p^+ = \text{const}$ [3].

Для того чтобы вывести лагранжиан в формулировке фазового пространства, снача-

ла забудем о сфере S^5 и фермионных вкладах в лагранжиан (16), т.е. начнем с лагранжиана

$$\mathcal{L} \equiv TL = -Th^{\mu\nu} \left(\partial_\mu x^+ \partial_\nu x^- + \partial_\mu x \partial_\nu \bar{x} + \frac{1}{2} e^{-2\phi} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \right), \quad (17)$$

$$T \equiv TR^2 = \frac{R^2}{2\pi\alpha'} = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi}, \quad h^{\mu\nu} \equiv \sqrt{g} g^{\mu\nu} e^{2\phi}. \quad (18)$$

Вводя импульсы $\mathcal{P}^a = T \partial L / \partial \dot{x}^a$ для переменных светового конуса (x^+, x^-) и для двух поперечных координат $x_\perp = (x, \bar{x})$ и импульс Π для радиальной координаты ϕ , получим⁷⁾

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \dot{x}_\perp \mathcal{P}_\perp + \dot{\phi} \Pi + \dot{x}^+ \mathcal{P}^- + \dot{x}^- \mathcal{P}^+ + \frac{1}{2h^{00}} [T^{-1} \mathcal{P}_\perp^2 + T^{-1} \mathcal{P}^+ \mathcal{P}^- + \\ & + T e^{4\phi} (\dot{x}_\perp^2 + 2\dot{x}^+ \dot{x}^-) + e^{2\phi} (T^{-1} \Pi^2 + T \dot{\phi}^2)] + \\ & + \frac{h^{01}}{h^{00}} (\dot{x}_\perp \mathcal{P}_\perp + \dot{\phi} \Pi + \dot{x}^+ \mathcal{P}^- + \dot{x}^- \mathcal{P}^+), \end{aligned} \quad (19)$$

где $1/h^{00}$ и h^{01}/h^{00} играют роль множителей Лагранжа для двух наложенных калибровочных условий. Налагая условия калибровки светового конуса $x^+ = \tau$ и $\mathcal{P}^+ = p^+ = \text{const}$ и интегрируя по $\mathcal{P}^-$, получим соотношение $h^{00} = -T^{-1} p^+$. Выражение для $\mathcal{P}^-$ можно получить из условия связи при лагранжевом множителе $1/h^{00}$ после применения условия связи при множителе h^{01}/h^{00} . Получаемая при этом гамильтонова плотность $\mathcal{H}$ в калибровке светового конуса имеет вид [3]

$$\mathcal{H} = -\mathcal{P}^- = \frac{1}{2p^+} [\mathcal{P}_\perp^2 + e^{4\phi} T^2 \dot{x}_\perp^2 + e^{2\phi} (\Pi^2 + T^2 \dot{\phi}^2)]. \quad (20)$$

Условие связи, задающее переменную x^- , записывается следующим образом:

$$p^+ \dot{x}^- + \mathcal{P}_\perp \dot{x}_\perp + \dot{\phi} \Pi = 0.$$

Координаты и импульсы имеют стандартные скобки Пуассона: $\{x(\tau, \sigma), \mathcal{P}(\tau, \sigma')\} = \delta(\sigma - \sigma')$. В случае замкнутой струны интегрирование этого соотношения по переменной σ редуцирует фазовое пространство на подпространство функций, инвариантных относительно сдвигов по переменной σ .

Интегрируя по импульсам $\mathcal{P}_\perp$ и Π , получим соответствующий лагранжиан в калибровке светового конуса:

$$L = \frac{p^+}{2} (\dot{x}_\perp^2 - e^{4\phi} T^2 (p^+)^{-2} \dot{x}_\perp^2 + e^{-2\phi} [\dot{\phi}^2 - e^{4\phi} T^2 (p^+)^{-2} \dot{\phi}^2]). \quad (21)$$

Явную зависимость от переменной p^+ в указанном действии можно учесть с помощью переопределения переменной $\sigma \rightarrow \sigma/p^+$. Аналог гамильтониана (20) в случае метрики (4), т.е. действие (14), можно получить с помощью масштабного преобразования $e^\phi \rightarrow R^{-1} e^\phi$:

$$\mathcal{H} = -\mathcal{P}^- = \frac{1}{2p^+} [\mathcal{P}_\perp^2 + e^{4\phi} T^2 \dot{x}_\perp^2 + R^{-2} e^{2\phi} (\Pi^2 + T^2 R^4 \dot{\phi}^2)]. \quad (22)$$

⁷⁾ В дальнейшем точка и штрих над переменной обозначают соответствующие дифференцирования по переменным струнной мировой поверхности τ и σ .

Перед тем как включить в рассмотрение зависимости от направлений сферы S^5 и от фермионных мод, опишем возможные предельные случаи действия в калибровке светового конуса общего вида. В этом случае гамильтониан $\mathcal{H}$ зависит от струнного натяжения T и радиуса R по отдельности, а потому следует рассмотреть несколько различных предельных случаев (предполагается, что остальные аргументы $\mathcal{H}$ фиксированы):

- 1) $T \rightarrow \infty$, R фиксировано: частица в фоновом поле пространства AdS;
- 2) $T \rightarrow 0$, R фиксировано: “стандартная” струна с нулевым натяжением на фоне пространства AdS;
- 3) $R \rightarrow \infty$, T фиксировано: плоское пространство;
- 4) $R \rightarrow 0$, T фиксировано: струна в пространстве AdS “нулевого радиуса”.

Для того чтобы получить конечный ответ в пределе элементарных частиц $T \rightarrow \infty$, следует положить $\dot{x} = 0$ и $\dot{\phi} = 0$, т.е. предположить, что струна сжимается в точку,

$$H_{T \rightarrow \infty} = \frac{1}{2}(\mathcal{P}_\perp^2 + e^{2\phi}\Pi^2).$$

Предел $R \rightarrow \infty$ в выражении (22) можно определить, если положить $\phi = \varphi/R$, $\Pi = Rp$; этот выбор сохраняет скобки Пуассона и приводит к стандартному регулярному выражению в пределе плоского пространства. Чтобы задать предельный переход $R \rightarrow 0$ в выражении (22), следует (как и в предыдущем разделе) ограничить рассмотрение только на те состояния, которые не зависят от Π , т.е. на состояния с нулевым импульсом в радиальном направлении пространства AdS,

$$\mathcal{H}_{R \rightarrow 0} = \frac{1}{2p^+}(\mathcal{P}_\perp^2 + T^2 e^{4\phi} \dot{x}_\perp^2).$$

Предел плоского пространства в случае гамильтониана (20) не достигается напрямую; более того, существуют два существенно различных предельных случая: $T \rightarrow 0$ и $T \rightarrow \infty$. При этом взятие предела $R \rightarrow 0$ при фиксированном T эквивалентно предельному переходу $T \sim \sqrt{\lambda} \rightarrow 0$, а значит, и предельному переходу $T \rightarrow 0$ при фиксированном радиусе R . Тем самым этот переход просто отвечает (как и обычный предел нулевого натяжения струны в плоском пространстве) выбрасыванию членов с производными по переменной σ из действия и из гамильтониана, т.е. гамильтониану

$$\mathcal{H}_{\lambda \rightarrow 0} = \frac{1}{2p^+}(\mathcal{P}_\perp^2 + e^{2\phi}\Pi^2). \quad (23)$$

5. ДЕЙСТВИЕ СУПЕРСТРУНЫ В КАЛИБРОВКЕ СВЕТОВОГО КОНУСА И ЕГО ПРЕДЕЛ ПРИ $\lambda \rightarrow 0$

Будем теперь учитывать зависимость от переменных сферы S^5 и от фермионных составляющих. Повторяя описанную выше процедуру фиксации калибровки светового конуса в бозонном случае в применении к суперструнному действию (16), получим [3]

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \mathcal{P}_\perp \dot{x}_\perp + \Pi \dot{\phi} + \mathcal{P}_M \dot{u}^M + \frac{i}{2} p^+ (\theta^i \dot{\theta}_i + \eta^i \dot{\eta}_i - \text{э.с.}) - \mathcal{H} - \\ & - T(p^+)^{-1} h^{01} \left[p^+ \dot{x}^- + \mathcal{P}_\perp \dot{x}_\perp + \Pi \dot{\phi} + \mathcal{P}_M \dot{u}^M + \frac{i}{2} p^+ (\theta^i \dot{\theta}_i + \eta^i \dot{\eta}_i - \text{э.с.}) \right], \quad (24) \end{aligned}$$

где гамильтонова плотность в калибровке светового конуса имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = -\mathcal{P}^- = & \frac{1}{2p^+} (\mathcal{P}_\perp^2 + T^2 e^{4\phi} \dot{x}_\perp^2 + e^{2\phi} [\Pi^2 + T^2 \dot{\phi}^2 + \mathcal{P}^M \mathcal{P}^M + T^2 \dot{u}^M \dot{u}^M + \\ & + (p^+)^2 (\eta^2)^2 + 2ip^+ \eta_i (\rho^{MN})_j^i \eta^j u^M \mathcal{P}^N]) - \\ & - T e^{2\phi} u^M [\eta^i \rho_{ij}^M (\dot{\theta}^j - i\sqrt{2} e^\phi \eta^j \dot{x}) + \text{э.с.}]. \end{aligned} \quad (25)$$

В этих выражениях грассманово-нечетная составляющая фазового пространства представлена переменными θ^i , η^i , служащими фермионными координатами, и θ_i , η_i , служащими фермионными импульсами. Компонента метрики h^{01} отвечает соотношению связи, которое фиксирует репараметризационную инвариантность, а $\mathcal{P}^M$ есть импульс, отвечающий единичному 6-вектору u^M , $u^M \mathcal{P}^M = 0$.

В пределе теории элементарных частиц, т.е. при $T \rightarrow \infty$, все пространственные производные должны быть положены равными нулю, а гамильтонова плотность (25) при этом сводится (см. [3]) к классическому пределу квантового гамильтониана в калибровке светового конуса для суперчастицы в пространстве $AdS_5 \times S^5$ [5]:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2p^+} \left[\mathcal{P}_\perp^2 + e^\phi \pi e^\phi \pi + e^{2\phi} \left(X - \frac{1}{4} \right) \right], \quad (26)$$

$$X \equiv (l^i_j)^2 + (p^+ \eta^2 - 2)^2 + 4p^+ \eta_i l^i_j \eta^j, \quad (27)$$

где $l^i_j = (i/2)(\rho^{MN})_j^i u^M \mathcal{P}^N$. В результате “безмассовый” спектр (спектр нулевых мод) суперструны действительно совпадает со спектром супергравитации типа IIB, компактифицированной на S^5 . Вершинные операторы состояний супергравитации при этом получаются, если решить линеаризованные уравнения супергравитации (или же уравнения состояния первично-квантованной суперчастицы) на фоне пространства $AdS_5 \times S^5$.

Эквивалентные выражения для струнных лагранжиана и гамильтониана, записанные в терминах шести декартовых координат Y^M и соответствующих (теперь уже без ограничений) импульсов $\mathcal{P}_M$, т.е. выражения, соответствующие лагранжиану (13), но с обычным для AdS/CFT-соответствия масштабным преобразованием $Y^M \rightarrow RY^M$, $\mathcal{P}_M \rightarrow R^{-1}\mathcal{P}_M$, имеют вид

$$\mathcal{L} = \mathcal{P}_\perp \dot{x}_\perp + \mathcal{P}_M \dot{Y}^M + \frac{i}{2} p^+ (\theta^i \dot{\theta}_i + \eta^i \dot{\eta}_i - \text{э.с.}) - \mathcal{H}, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \frac{1}{2p^+} [\mathcal{P}_\perp^2 + T^2 Y^4 \dot{x}_\perp^2 + Y^4 \mathcal{P}_M \mathcal{P}^M + T^2 \dot{Y}^M \dot{Y}^M + \\ & + Y^2 ((p^+)^2 (\eta^2)^2 + 2ip^+ \eta \rho^{MN} \eta Y_M \mathcal{P}_N)] - \\ & - T |Y| Y^M [\eta \rho^M (\dot{\theta} - i\sqrt{2} |Y| \eta \dot{x}) + \text{э.с.}]. \end{aligned} \quad (29)$$

Здесь также

$$p^+ \dot{x}^- + \mathcal{P}_\perp \dot{x}_\perp + \mathcal{P}_M \dot{Y}^M + \frac{i}{2} p^+ (\theta^i \dot{\theta}_i + \eta^i \dot{\eta}_i - \text{э.с.}) = 0.$$

Как обсуждалось выше, если не делать масштабного преобразования $Y^M \rightarrow RY^M$, т.е. начинать непосредственно с гамильтониана (25), то регулярный предел $R \rightarrow 0$ может быть получен, только если ограничить рассмотрение теми состояниями, которые имеют нулевой 6-импульс и не зависят от переменных η^i .

Предельный переход $\lambda \rightarrow 0$ в гамильтониане (29) эквивалентен предельному переходу $T \rightarrow 0$, т.е. получаем

$$\mathcal{H}_{\lambda \rightarrow 0} = \frac{1}{2p^+} [\mathcal{P}_\perp^2 + Y^4 \mathcal{P}_M \mathcal{P}_M + Y^2 ((p^+)^2 (\eta^2)^2 + 2ip^+ \eta \rho^{MN} \eta Y_M \mathcal{P}_N)]. \quad (30)$$

Как и в пределе струны с нулевым натяжением в плоском пространстве, предельный переход $T \rightarrow 0$ достигается простым отбрасыванием всех членов, содержащих зависимость от производных по переменной σ [3]; однако, в отличие от случая плоской струны с нулевым натяжением, в котором получается бесконечный набор “свободных” мод, в данном случае наличие сферических координат S^5 и фермионных членов приводит к нетривиальным взаимодействиям между фурье-компонентами в разложении по переменной σ . Заметим, что суперчастица в пространстве $AdS_5 \times S^5$ представляет собой частный случай такого предела: в то время как предел $T \rightarrow \infty$ предполагает, что производные по переменной σ *полагаются равными нулю*, в пределе $T \rightarrow 0$ вклад этих же производных просто *исчезает*.

Разрешая действие (28) в фазовом пространстве относительно импульсов, найдем лагранжиан в калибровке светового конуса, который соответствует гамильтониану (29), обобщающему гамильтониан (22). Полезно представить эти формулы в терминах “конформно-плоских” 10D координат (x^a, Z^M) , где Z^M — координаты, “обратные” Y^M . Метрика пространства $AdS_5 \times S^5$ при этом имеет вид

$$ds^2 = R^2 Z^{-2} (dx^a dx^a + dZ^M dZ^M), \quad Z^M = Y^{-2} Y^M = e^{-\phi} u^M. \quad (31)$$

Граница пространства AdS_5 отвечает пределу $Z^2 \rightarrow 0$.

Полный суперструнный лагранжиан в терминах этих переменных был представлен в работе [2] и в приложении С работы [3]. Аналогичные выражения в описании с помощью фазового пространства имеют ту же структуру, что и (28), (29) [3]:

$$\mathcal{L} = \mathcal{P}_\perp \dot{x}_\perp + \mathcal{P}_M \dot{Z}^M + \frac{i}{2} p^+ (\theta^i \dot{\theta}_i + \eta^i \dot{\eta}_i - \text{э.с.}) - \mathcal{H}, \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \frac{1}{2p^+} [\mathcal{P}_\perp^2 + \mathcal{P}_M \mathcal{P}_M + T^2 Z^{-4} (\dot{x}_\perp^2 + \dot{Z}^M \dot{Z}^M) + \\ & + Z^{-2} ((p^+)^2 (\eta^2)^2 + 2ip^+ \eta \rho^{MN} \eta Z_M \mathcal{P}_N)] - \\ & - T [|Z|^{-3} \eta^i \rho_{ij}^M Z^M (\dot{\theta}^j - i\sqrt{2}|Z|^{-1} \eta^j \dot{x}) + \text{э.с.}], \end{aligned} \quad (33)$$

с наложенной связью

$$p^+ \dot{x}^- + \mathcal{P}_\perp \dot{x}_\perp + \mathcal{P}_M \dot{Z}^M + \frac{i}{2} p^+ (\theta^i \dot{\theta}_i + \eta^i \dot{\eta}_i - \text{э.с.}) = 0.$$

Устраняя импульсы $\mathcal{P}_\perp$ и $\mathcal{P}_M$ из лагранжиана (32), получим следующий лагранжиан в калибровке светового конуса, который отвечает гамильтоновой плотности (33):

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{p^+}{2} [\dot{x}_\perp^2 + (\dot{Z}^M - i\eta_i (\rho^{MN})_j^i \eta^j Z_N Z^{-2})^2 + i(\theta^i \dot{\theta}_i + \eta^i \dot{\eta}_i - \text{э.с.}) - \\ & - Z^{-2} (\eta^2)^2 - T^2 Z^{-4} (p^+)^{-2} (\dot{x}_\perp^2 + \dot{Z}^M \dot{Z}^M)] - \\ & - T [|Z|^{-3} \eta^i \rho_{ij}^M Z^M (\dot{\theta}^j - i\sqrt{2}|Z|^{-1} \eta^j \dot{x}) + \text{э.с.}]. \end{aligned} \quad (34)$$

Как и для лагранжиана (21), множители p^+ можно убрать, сделав в действии масштабное преобразование $\sigma \rightarrow \sigma/p^+$. Если у полей Z^M имеется ненулевой фон, как в задаче с вильсоновскими петлями, то это действие может задавать 2D теорию поля в 2D фоновом пространстве ненулевой кривизны [33].

Предельный переход $T \sim \sqrt{\lambda} \rightarrow 0$ в этом лагранжиане достигается отбрасыванием членов с производными по переменной σ . Тогда окончательно получим

$$\mathcal{L}_{\lambda \rightarrow 0} = \frac{p^+}{2} [\dot{x}_\perp^2 + i(\theta^i \dot{\theta}_i + \theta_i \dot{\theta}^i) + (\dot{Z}^M - i\eta_i (\rho^{MN})^i_j \eta^j Z_N Z^{-2})^2 + i(\eta^i \dot{\eta}_i + \eta_i \dot{\eta}^i) - Z^{-2}(\eta^2)^2]. \quad (35)$$

Этот лагранжиан отвечает пределу при $T \rightarrow 0$ гамильтониана (33) или (30). Интересным свойством выражения (35) является то, что четыре поперечных 4D координаты $x_\perp$ и четыре комплексных фермиона θ_i , отвечающие линейной составляющей $\mathcal{N} = 4$ суперсимметрии в калибровке светового конуса, отщепляются от остальных переменных.

Как отмечалось выше, выражение (35) содержит в себе действие суперчастицы в пространстве $AdS_5 \times S^5$, которое есть та часть этого выражения, которая зависит только от постоянных мод по переменной σ . Следующая важная задача – показать, что в дополнение к мультиплету супергравитации типа IIB в пространстве $AdS_5 \times S^5$, присутствие которого в спектре обусловлено соответствием с действием суперчастицы [5] и, более того, ожидаемо, поскольку массы “защищенных” состояний не должны зависеть от λ , струнный спектр, получаемый при квантовании лагранжиана (35), содержит также безмассовые частицы старших спинов в пространстве AdS_5 . Описание таких частиц в калибровке светового конуса в пространстве AdS_d было предметом работ [15], [16]: в случае полностью симметричного поля ϕ_s можно начинать с рассмотрения полностью симметричного бесследового $SO(d-2)$ -тензора $\phi_{I_1 \dots I_s}$ и разложить его далее на неприводимые представления группы $SO(d-3)$, что дает $\sum_{s'=0}^s \phi_{s'}$, $\phi_{s'} = (\phi_{i_1 \dots i_{s'}})$. Затем, используя параметризацию пространства AdS (31) и производя подходящее масштабное преобразование, получим, что поля $\phi_{s'}$ удовлетворяют следующей системе свободных уравнений:

$$(\partial_x^2 + \partial_Z^2 - Z^{-2} A_{s'}) \phi_{s'} = 0.$$

Здесь $A_{s'} = (s' + (d-5)/2)^2 - 1/4$, т.е. $A_{s'} = s'^2 - 1/4$ в случае пространства AdS_5 . Эти уравнения должны возникать как условия массовой поверхности для “наилегчайших” собственных струнных состояний лагранжианов (30) и (35). Ненормируемые и нормируемые решения уравнений для $\phi_s(x, z)$, которые должны задавать конформные поля старших спинов и связанные с ними конформные токи старших спинов граничной теории, действительно имеют правильные целые размерности $\Delta = 2 - s$ и $\Delta = s + d - 3 = s + 2$ [15].

В заключение заметим, что мы ожидаем, что подход калибровки светового конуса, развитый в работах [15], [5] и [2], [3], должен помочь в доказательстве предполагаемого AdS/CFT-соответствия [7], [8] в пределе $\lambda \rightarrow 0$.

Благодарности. Работа была частично поддержана грантами DOE (№ DE-FG02-91ER-40690), PPARC (№ PPA/G/S/1998/00613), ИНТАС (№ 99-1590) и CRDF (№ RPI-2108). Автор благодарит С. Фролова, И. Клебанова, А. Михайлова, Г. Настасе, В. Зигеля, М. Васильева и особенно Р. Мецаева за полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] *J. Maldacena.* Adv. Theor. Math. Phys. 1998. V. 2. P. 231; hep-th/9711200; *S. S. Gubser, I. R. Klebanov, A. M. Polyakov.* Phys. Lett. B. 1998. V. 428. P. 105; hep-th/9802109; *E. Witten.* Adv. Theor. Math. Phys. 1998. V. 2. P. 253; hep-th/9802150.
- [2] *R. R. Metsaev, A. A. Tseytlin.* Phys. Rev. D. 2001. V. 63. P. 046002; hep-th/0007036.
- [3] *R. R. Metsaev, C. B. Thorn, A. A. Tseytlin.* Nucl. Phys. B. 2001. V. 596. P. 151; hep-th/0009171.
- [4] *M. B. Green, J. H. Schwarz.* Phys. Lett. B. 1982. V. 109. P. 444.
- [5] *R. R. Metsaev.* Phys. Lett. B. 1999. V. 468. P. 65; hep-th/9908114.
- [6] *U. Lindstrom, B. Sundborg, G. Theodoridis.* Phys. Lett. B. 1991. V. 253. P. 319; *J. Isberg, U. Lindstrom, B. Sundborg.* Phys. Lett. B. 1992. V. 293. P. 321; hep-th/9207005; *J. Isberg, U. Lindstrom, B. Sundborg, G. Theodoridis.* Nucl. Phys. B. 1994. V. 411. P. 122; hep-th/9307108.
- [7] *B. Sundborg.* Nucl. Phys. Proc. Suppl. 2001. V. 102. P. 113; hep-th/0103247; *P. Haggi-Mani, B. Sundborg.* JHEP. 2000. V. 0004. P. 031; hep-th/0002189.
- [8] *E. Witten.* Talk at J. H. Schwarz 60-th Birthday Conference, CalTech, November 2–3, 2001.
- [9] *M. A. Vasiliev.* Conformal higher spin symmetries of 4D massless supermultiplets and $osp(L, 2M)$ invariant equations in generalized (super)space. hep-th/0106149; Nucl. Phys. B. 2001. V. 616. P. 106; hep-th/0106200.
- [10] *E. Sezgin, P. Sundell.* JHEP. 2001. V. 0109. P. 025; hep-th/0107186; JHEP. 2001. V. 0109. P. 036; hep-th/0105001.
- [11] *A. Mikhailov.* Notes on higher spin symmetries. hep-th/0201019.
- [12] *S. E. Konstein, M. A. Vasiliev, V. N. Zaikin.* JHEP. 2000. V. 0012. P. 018; hep-th/0010239; *D. Anselmi.* Nucl. Phys. B. 1999. V. 541. P. 323; hep-th/9808004; Class. Q. Grav. 2000. V. 17. P. 1383; hep-th/9906167.
- [13] *H. Nastase, W. Siegel.* JHEP. 2000. V. 0010. P. 040; hep-th/0010106.
- [14] *H. Liu, A. A. Tseytlin.* Nucl. Phys. B. 1998. V. 533. P. 88; hep-th/9804083.
- [15] *R. R. Metsaev.* Nucl. Phys. B. 1999. V. 563. P. 295; hep-th/9906217.
- [16] *R. R. Metsaev.* Light-cone form of field dynamics in AdS space-time. hep-th/0011112.
- [17] *N. Boulanger, M. Henneaux, P. van Nieuwenhuizen.* Conformal (super)gravities with several gravitons. hep-th/0201023.
- [18] *E. S. Fradkin, A. A. Tseytlin.* Phys. Rep. 1985. V. 119. P. 233.
- [19] *M. Kaku, P. K. Townsend, P. van Nieuwenhuizen.* Phys. Rev. D. 1978. V. 17. P. 3179.
- [20] *E. S. Fradkin, V. Y. Linetsky.* Mod. Phys. Lett. A. 1989. V. 4. P. 731; Ann. Phys. 1990. V. 198. P. 293.
- [21] *E. S. Fradkin, V. Y. Linetsky.* Phys. Lett. B. 1989. V. 231. P. 97; Nucl. Phys. B. 1991. V. 350. P. 274.
- [22] *E. S. Fradkin, A. A. Tseytlin.* Phys. Lett. B. 1984. V. 134. P. 187.
- [23] *R. R. Metsaev, A. A. Tseytlin.* Nucl. Phys. B. 1998. V. 533. P. 109; hep-th/9805028.
- [24] *I. Pesando.* JHEP. 1998. V. 9811. P. 002; hep-th/9808020; Mod. Phys. Lett. A. 1999. V. 14. P. 343; hep-th/9808146.
- [25] *R. Kallosh, J. Rahmfeld.* Phys. Lett. B. 1998. V. 443. P. 143; hep-th/9808038; *R. Kallosh, A. A. Tseytlin.* JHEP. 1998. V. 10. P. 016; hep-th/9808088.
- [26] *R. Roiban, W. Siegel.* JHEP. 2000. V. 0011. P. 024; hep-th/0010104.
- [27] *R. Kallosh, A. Rajaraman.* Phys. Rev. D. 1998. V. 58. P. 125003; hep-th/9805041.
- [28] *A. M. Polyakov.* Gauge fields and space-time. hep-th/0110196.
- [29] *A. A. Tseytlin.* Int. J. Mod. Phys. A. 2001. V. 16. P. 900; hep-th/0009226.
- [30] *A. M. Polyakov.* Private communication. 2000.
- [31] *J. Polchinski, L. Susskind.* String theory and the size of hadrons. hep-th/0112204.
- [32] *P. Goddard, J. Goldstone, C. Rebbi, C. B. Thorn.* Nucl. Phys. B. 1973. V. 56. P. 109.
- [33] *N. Drukker, D. J. Gross, A. A. Tseytlin.* JHEP. 2000. V. 0004. P. 021; hep-th/0001204.

Поступила в редакцию 7. II. 2002 г.