Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. М. Жислин, Спектральные свойства гамильтонианов заряженных систем в однородном магнитном поле. I. Общая характеристика спектра, *ТМФ*, 2002, том 133, номер 1, 87–102

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf382>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 17:57:59

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ГАМИЛЬТониАнов ЗАРЯЖЕННЫХ СИСТЕМ В ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ.

I. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА СПЕКТРА

Исследуется спектр гамильтонианов заряженных многочастичных систем в однородном магнитном поле при фиксации суммы P_Σ компонент псевдомомента и без нее. Доказывается, что при фиксации P_Σ спектр гамильтонианов не зависит от величины P_Σ , а спектр без фиксации P_Σ совпадает со спектром при фиксации, отличаясь от последнего лишь дополнительным бесконечным вырождением (что принципиально отличается задачи с однородным магнитным полем от задач без поля, где отсутствие фиксации полного момента приводит к “замазыванию” спектра относительного движения непрерывным спектром). Находится сплошной спектр гамильтонианов. Дается характеристика спектра гамильтонианов двухкластерных не взаимодействующих друг с другом систем, полученных распадом исходной системы из состояния с фиксированным значением P_Σ . Последний результат необходим для изучения чисто точечного спектра.

Ключевые слова: гамильтониан, однородное магнитное поле, спектральные свойства, относительное движение, псевдомомент.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе изучаются спектральные свойства гамильтонианов квантовых систем Z_1 , состоящих из n частиц с конечными массами в однородном магнитном поле. Предполагается, что суммарный заряд всех частиц $Q \neq 0$. Нас будет интересовать главным образом спектр относительного движения системы Z_1 . Для получения гамильтониана относительного движения в отсутствие магнитного поля отделяют движение центра масс (ЦМ) в R^3 , однако при наличии поля такое отделение в общем случае возможно лишь в направлении поля, т. е. оси z . Для построения гамильтониана с магнитным полем, отвечающего относительному движению и в плоскости x, y , было предложено [1] рассматривать ограничения оператора, полученного после отделения движения ЦМ в направлении оси z , на собственное подпространство одной из компонент P_α ($\alpha = x$ или $\alpha = y$) оператора псевдомомента системы (а при $Q = 0$ – на собственное подпространство обеих компонент: при $Q \neq 0$ берется лишь одна компонента, ибо $P_x P_y \neq P_y P_x$). Для гамильтониана системы Z_1 такой подход позволил при $Q = 0$ и фиксированных P_x ,

* Научно-исследовательский радиофизический институт, Н. Новгород, Россия.
E-mail: greg@nirfi.sci-nnov.ru

P_y изучить структуру существенного и дискретного спектра, а при $Q \neq 0$ найти существенный спектр. Однако для $Q \neq 0$ не были решены следующие важные задачи (а часть из них – и для $Q = 0$).

- I. О возможной зависимости спектра гамильтониана системы Z_1 от P_α .
- II. О структуре спектра гамильтониана системы Z_1 без фиксации P_α при $Q \neq 0$.
- III. О структуре спектра гамильтонианов двухкластерных систем $Z_2 = (C_1, C_2)$, получающихся из Z_1 после распада из состояния с фиксированным P_α .
- IV. О структуре чисто точечного спектра оператора системы Z_1 при фиксации P_α или без нее.

Наиболее важной является задача IV, ибо ее решение отвечает на вопрос о спектре связанных состояний системы. Но структура этого спектра существенно зависит от свойств нижней границы спектра гамильтонианов составных систем $Z_2 = (C_1, C_2)$ для тех распадов Z_2 системы Z_1 , которые определяют нижнюю границу существенного спектра Z_1 . Поэтому решение задачи IV требует предварительного решения задачи III. При этом задачу III надо решать без фиксации псевдомоментов кластеров, ибо фиксация компоненты P_α псевдомомента системы оставляет свободными компоненты $P_\alpha[C_k]$ псевдомоментов кластеров C_k , $k = 1, 2$, фиксируя лишь их сумму. Но спектр квантовых систем в однородном магнитном поле без фиксации псевдомомента вообще не изучался ни для распавшейся системы, ни даже для исходной. Поэтому необходимой ступенью для выработки подходов к задаче III является решение задачи II, имеющее к тому же немалый самостоятельный интерес как первый результат о спектре гамильтонианов с магнитным полем без фиксации псевдомомента. Наконец, очевидно, что для решения задачи II в общем случае достаточно решить задачу I. Таким образом, для решения задачи IV о структуре спектра связанных состояний системы необходимо предварительно решить задачи I, II и III.

Решение задач I–III является целью настоящей работы. При этом мы модифицируем подход, предложенный авторами статьи [1]. Вместо фиксации одной из компонент псевдомомента (P_x или P_y), что неоправданно выделяло бы одну из координат, мы фиксируем их сумму $P_\Sigma = P_x + P_y$, т. е. сужаем исходный оператор на собственное подпространство оператора P_Σ .

Главные результаты статьи:

1. Найден существенный спектр системы Z_1 при фиксации P_Σ и показано, что он не зависит от P_Σ .
2. Доказано, что спектр Z_1 без фиксации P_Σ – тот же, что и при фиксации, но имеет дополнительное бесконечное вырождение¹⁾.
3. Установлена структура спектра оператора энергии системы $Z_2 = (C_1, C_2)$ при фиксации P_Σ и без нее.

Для получения этих результатов мы применяем геометрические методы [2], [3], не повторяя здесь их стандартную часть, связанную с оценками энергии рассматриваемых систем в областях, отвечающих различным распадам системы Z_1 . В то же время мы подробно описываем новые идеи, относящиеся к перестройке кинетической части операторов энергии, и их реализацию в соответствующих оценках.

¹⁾ Это принципиально отличает задачи с однородным магнитным полем от задач без поля, где отсутствие фиксации хотя бы одной компоненты момента приводит к замазыванию спектра относительного движения, а не к его дополнительному бесконечному вырождению.

Результаты данной статьи были частично анонсированы в работе [4].

В заключение заметим, что выше мы говорили о фиксации суммы компонент псевдомомента, однако фактически в работе мы делаем следующую – эквивалентную – процедуру: после подходящего калибровочного преобразования мы фиксируем сумму компонент *момента*. Такой подход не дает преимуществ при рассмотрении исходного гамильтониана, но облегчает исследование спектров операторов составных систем Z_2 .

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

2.1. Пусть $Z_1 = \{1, 2, \dots, n\}$ – квантовая система n частиц с конечными массами m_j , зарядами e_j и координатами $r_j = (x_j, y_j, z_j)$, находящаяся в однородном магнитном поле $\mathcal{F} = (0 \div 0.2B)$, где $B > 0$ – произвольная константа. Оператор энергии системы Z_1 имеет вид

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{m_j} \left(\frac{1}{i} \nabla_j - e_j A_j \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{s,t=1; s \neq t}^n V_{st}(r_{st}), \quad (2.1)$$

где $\nabla_j = (\partial/\partial x_j, \partial/\partial y_j, \partial/\partial z_j)$, $A_j = B(-y_j, x_j, 0)$ – магнитный вектор-потенциал, $r_{ij} = r_i - r_j$, $V_{st}(r_{st}) = V_{ts}(r_{ts})$ – потенциалы взаимодействия частиц. Мы предполагаем, что они вещественны и удовлетворяют условиям²⁾

$$a) \ V_{st}(r_1) \in \mathcal{L}_{2,\text{loc}}(R^3), \quad б) \ V_{st}(r_1) \rightarrow 0 \text{ при } |r_1| \rightarrow \infty. \quad (2.2)$$

В данной работе рассматриваются только заряженные системы, т.е. предполагается, что

$$Q = \sum_{j=1}^n e_j \neq 0.$$

2.2. Пусть $M = \sum_{j=1}^n m_j$, $r_c = (\alpha_{01}, \alpha_{02}, \alpha_{03})$, где $\alpha_{01} = \sum_{j=1}^n m_j x_j M^{-1}$, $\alpha_{02} = \sum_{j=1}^n m_j y_j M^{-1}$, $\alpha_{03} = \sum_{j=1}^n m_j z_j M^{-1}$. Очевидно, что r_c – радиус-вектор центра масс системы Z_1 . Введем в (2.1) относительные координаты $q_j = (q_{j1}, q_{j2}, q_{j3}) := r_j - r_c$, координаты $\xi_0 = (\alpha_{01} - \alpha_{02})/2$, $\eta_0 = (\alpha_{01} + \alpha_{02})/2$, $\zeta_0 = \alpha_{03}$ и отделим движение центра масс Z_1 в направлении оси z . Тогда мы получим оператор энергии относительного движения системы Z_1 в направлении оси z

$$\mathcal{H}_0 = T_{\perp} + T_{03} + V(q), \quad (2.3)$$

где

$$\begin{aligned} T_{\perp} &= \sum_{j=1}^n \sum_{p=1}^2 \frac{1}{m_j} \left[B_{jp} + \frac{m_j}{2Mi} \left(\frac{\partial}{\partial \eta_0} - (-1)^p \frac{\partial}{\partial \xi_0} \right) + \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{p+1} B e_j q_{j\bar{p}} + B e_j ((-1)^{p+1} \eta_0 - \xi_0) \right]^2, \\ T_{03} &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{m_j} B_{j3}^2, \quad B_{jp} = \frac{1}{i} \sum_{s=1}^n \frac{\partial}{\partial q_{sp}} \left(\delta_{sj} - \frac{m_j}{M} \right), \\ V(q) &= \frac{1}{2} \sum_{s,t=1; s \neq t}^n V_{st}(q_s - q_t), \quad q = q_1, \dots, q_n, \end{aligned}$$

²⁾Условие (2.16) может быть несколько ослаблено, но мы не стремимся здесь к максимальной общности.

$\bar{p} = 1$ при $p = 2$, $\bar{p} = 2$ при $p = 1$.

Оператор $\mathcal{H}_0$ определен в $(3n-1)$ -мерном пространстве $\overline{R}_0^{(3n-1)}$ переменных q, ξ_0, η_0 , где $\sum_{j=1}^n m_j q_j = 0$.

Далее с помощью подходящего калибровочного преобразования приведем оператор $\mathcal{H}_0$ к такому виду, в котором коэффициент перед η_0 равен нулю. Положим $D_{\pm} = D_{\pm}(q) = B \sum_{j=1}^n e_j(q_{j1} \pm q_{j2})$, $\omega_0 = D_- + 2QB\xi_0$,

$$\mathcal{H}\left(\frac{\partial}{i\partial\eta_0}\right) = e^{i\eta_0\omega_0}\mathcal{H}_0e^{-i\eta_0\omega_0}.$$

Очевидно, что

$$\mathcal{H}\left(\frac{\partial}{i\partial\eta_0}\right) = T_{\perp}\left(\frac{\partial}{\partial\eta_0}\right) + T_{03} + V(q), \quad (2.4)$$

где

$$\begin{aligned} T_{\perp}\left(\frac{\partial}{\partial\eta_0}\right) &= \sum_{j=1}^n \sum_{p=1}^2 \frac{1}{m_j} \left(A_{jp} + h_{jp0} + \frac{m_j}{2Mi} \frac{\partial}{\partial\eta_0} \right)^2, \\ h_{jp0} &= \frac{m_j}{2Mi} (-1)^{p+1} \frac{\partial}{\partial\xi_0} - F_j \xi_0, \\ A_{jp} &= B_{jp} - \frac{m_j D_-}{2M} + (-1)^{p+1} B e_j q_{j\bar{p}}, \quad F_j = B e_j + \frac{BQm_j}{M}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\int \mathcal{H}_0\left(\frac{\partial}{i\partial\eta_0}\right) e^{-i\eta_0\lambda_0} d\eta_0 = \mathcal{H}_0(\lambda_0), \quad \lambda \in R^1, \quad (2.5)$$

где оператор $\mathcal{H}_0(\lambda_0)$ определяется равенством (2.4), если $\partial/(i\partial\eta_0)$ заменить на λ_0 . По построению оператор $\mathcal{H}_0(\lambda_0)$ в пространстве $R_0^{(3n-1)} = \{q, \xi_0, \lambda_0\}$ унитарно эквивалентен оператору $\mathcal{H}_0$ в $\overline{R}_0^{(3n-1)}$.

2.3. Отметим, что перейти от оператора (2.3) к оператору (2.5) можно было иначе, используя подход, связанный с оператором псевдомомента [1]. Действительно, пусть $P = (P_x, P_y)$ – оператор псевдомомента системы Z_1 (выражения для P_x, P_y см. в работе [5]). Обозначим через $U_{2\lambda_0}$ собственное подпространство оператора $P_{\Sigma} = (P_x + P_y)/2$, отвечающее его собственному значению $2\lambda_0$. Легко видеть, что $U_{2\lambda_0} = \{\tilde{\psi}\}$, где $\tilde{\psi} = e^{-i\eta_0(\omega_0 + \lambda_0)}\psi(q, \xi_0, \lambda_0)$ и ψ – произвольная функция из области определения P_{Σ} . При $\tilde{\psi} \in U_{2\lambda_0}$ $\mathcal{H}_0\tilde{\psi} = e^{-i\eta_0(\omega_0 + \lambda_0)}\mathcal{H}_0(\lambda_0)\psi(q, \xi_0, \lambda_0)$, где оператор $\mathcal{H}_0(\lambda_0)$ определяется формулой (2.5). Таким образом, исследование спектра оператора $\mathcal{H}_0$ после сужения его на собственное подпространство $U_{2\lambda_0}$ оператора P_{Σ} приводит к изучению спектра полученного ранее оператора $\mathcal{H}_0(\lambda_0)$ на функциях $\psi(q, \xi_0, \lambda_0)$ при фиксированном λ_0 . Если λ_0 не фиксировать, то мы получим оператор, унитарно эквивалентный исходному.

2.4. Оператор $\mathcal{H}_0(\lambda_0)$ мы будем рассматривать как в пространстве $R_0^{(3n-1)} = \{q, \xi_0, \lambda_0\}$, так и в пространстве $R_0^{(3n-2)} = \{q, \xi_0\}$ при фиксированном λ_0 . В последнем случае вместо $\mathcal{H}_0(\lambda_0)$ мы будем писать $\hat{\mathcal{H}}_0(\lambda_0)$. Операторы $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_0(\lambda_0)$ и $\hat{\mathcal{H}}_0(\lambda_0)$ определим на функциях из C_0^2 соответственно в пространствах $\mathcal{L}_2(R_0^{-(3n-1)})$, $\mathcal{L}_2(R_0^{(3n-1)})$

и $\mathcal{L}_2(R_0^{(3n-2)})$. Они будут полуограничены снизу, и мы расширим их до самосопряженных, сохраняя прежние обозначения. Всюду далее обозначим через $\sigma_{\text{ess}}(W)$, $\sigma_d(W)$, $\sigma_{\text{pp}}(W)$, $\sigma_p(W)$ и $\sigma(W)$ соответственно существенный, дискретный, чисто точечный, точечный и весь спектр произвольного оператора W ; D_W – область определения W .

ТЕОРЕМА 2.1. *Спектр $\sigma(\hat{\mathcal{H}}_0(\lambda_0))$ не зависит от λ_0 . Спектр $\sigma(\mathcal{H}_0)$ совпадает с $\sigma(\hat{\mathcal{H}}(\lambda_0))$, однако каждая точка ν из $\sigma(\mathcal{H}_0)$ имеет дополнительное бесконечное вырождение по сравнению с этой же точкой из $\sigma(\hat{\mathcal{H}}_0(\lambda_0))$.*

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *Дискретный спектр $\sigma_d(\mathcal{H}_0)$ всегда пуст.*

СЛЕДСТВИЕ 2.2. *Каждая точка из $\sigma_p(\hat{\mathcal{H}}_0(\lambda_0))$ является бесконечно вырожденным собственным значением оператора $\mathcal{H}_0$, причем если $\nu \in \sigma_d(\hat{\mathcal{H}}_0(\lambda_0))$, то $\nu \in \sigma_{\text{pp}}(\mathcal{H}_0)$.*

В силу теоремы 2.1 достаточно изучать далее спектр оператора

$$H = \hat{\mathcal{H}}_0(0) = T_{\perp}(0) + T_{03} + V(q). \quad (2.6)$$

2.5. Для описания спектра H нам понадобятся операторы $H(Z_k)$ составных систем $Z_k = (C_1, \dots, C_k)$, получающихся из Z_1 разбиением на k , $2 \leq k \leq n$, не взаимодействующих между собой кластеров C_i ($Z_1 = \bigcup_{j=1}^k C_j$, $C_j \cap C_i = \emptyset$, $j \neq i$). Пусть

$$H(Z_k) = H - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1, i \neq j}^k \sum_{s \in C_i, t \in C_j} V_{st}(q_s - q_t), \quad (2.7)$$

$$\mu = \min_{Z_k, k \geq 2} \inf H(Z_k). \quad (2.8)$$

Если $\tilde{Z}_{k-1} = (C_1, \dots, C_{k-2}, \tilde{C}_{k-1})$, где $\tilde{C}_{k-1} = C_{k-1} \cup C_k$, то очевидно, что $\inf H(\tilde{Z}_{k-1}) \leq \inf H(Z_k)$. Поэтому в (2.8) можно брать лишь $k = 2$, т.е.

$$\mu = \min_{Z_2} \inf H(Z_2).$$

ТЕОРЕМА 2.2. *Существенный спектр $\sigma_{\text{ess}}(H)$ состоит из всех точек луча $[\mu, +\infty)$.*

Теорема 2.2 описывает структуру существенного спектра $\sigma_{\text{ess}}(H)$ в обычной ХВЖ-формулировке. Эквивалентный результат для оператора, вычисленного при фиксации одной компоненты псевдомомента, получен в работе [1] другим методом и в значительно более сложной формулировке.

2.6. Пусть $O' = \{Z_2 \mid Z_2 = (C_1, C_2), \inf H(Z_2) = \mu\}$.

При изучении $\sigma_d(H)$ важно знать свойства нижней границы спектра операторов $H_0(Z_2)$, $Z_2 \in O'$, полученных из операторов $H(Z_2)$ после введения относительных координат частиц в кластерах C_j и отделения движения ЦМ этих кластеров в направлении оси z . Далее мы выпишем явные выражения операторов $H_0(Z_2)$ и сформулируем результаты работы о спектре $\sigma(H_0(Z_2))$.

Пусть $Z_2 = (C_1, C_2)$, $M_j = \sum_{s \in C_j} m_s$, $Q_j = \sum_{s \in C_j} e_s$, $\alpha_j = (\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \alpha_{j3}) = \sum_{s \in C_j} m_s q_s M_j^{-1}$, т.е. M_j, Q_j, α_j – масса, заряд и радиус-вектор ЦМ кластера C_j , соответственно. Введем относительные координаты $q^{(1)} = (q_1^{(1)}, \dots, q_n^{(1)})$ частиц в кластерах C_j

$$q_s^{(1)} = (q_{s1}^{(1)}, q_{s2}^{(1)}, q_{s3}^{(1)}) = q_s - \alpha_j, \quad s \in C_j,$$

и, кроме того, положим

$$\xi_1 = \frac{\alpha_{11} - \alpha_{12}}{2}, \quad \eta_1 = \frac{\alpha_{11} + \alpha_{12}}{2}, \quad \zeta_1 = \alpha_{13} - \alpha_{23}. \quad (2.9)$$

Ясно, что

$$\sum_{s \in C_j} m_s q_s^{(1)} = 0, \quad j = 1, 2. \quad (2.10)$$

Кроме того, поскольку $\sum_{j=1}^n m_j q_j = 0$, то $M_1 \alpha_1 + M_2 \alpha_2 = 0$ и $\alpha_2 = -M_1 M_2^{-1} \alpha_1$. С учетом этого

$$\begin{aligned} q_{s1} &= q_{s1}^{(1)} + \xi_1 + \eta_1, & q_{s2} &= q_{s2}^{(1)} + \eta_1 - \xi_1, \\ q_{s3} &= q_{s3}^{(1)} + M_2 M^{-1} \zeta_1, & \text{если } s \in C_1, \\ q_{s1} &= q_{s1}^{(1)} - M_1 M_2^{-1} (\eta_1 + \xi_1), & q_{s2} &= q_{s2}^{(1)} - M_1 M_2^{-1} (\eta_1 - \xi_1), \\ q_{s3} &= q_{s3}^{(1)} - M_1 M \zeta_1, & \text{если } s \in C_2. \end{aligned} \quad (2.11)$$

В новых координатах

$$H(Z_2) = H_0(Z_2) + H_c(Z_2), \quad (2.12)$$

где

$$\begin{aligned} H_0(Z_2) &= T(Z_2) + V_{Z_2}, & H_c(Z_2) &= -M M_1^{-1} M_2^{-1} \frac{d^2}{d\zeta_1^2}, \\ T(Z_2) &= \sum_{k=1}^2 T[C_k], & V_{Z_2} &= \sum_{k=1}^2 V[C_k], & T[C_k] &= T_\perp[C_k] + T_{03}[C_k], \\ T_\perp[C_k] &= \sum_{j \in C_k} \sum_{p=1}^2 m_j^{-1} \left\{ \tilde{A}_{jp}(k) + h_{jp0} - (-1)^k \frac{m_j M_2}{2M M_k i} \left[(-1)^{p+1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \frac{\partial}{\partial \eta_1} \right] + \right. \\ &\quad \left. + (-1)^k B e_j M_1 M_k^{-1} [\xi_1 + (-1)^p \eta_1] - \right. \\ &\quad \left. - m_j M^{-1} M_2^{-1} (Q_1 M_2 - Q_2 M_1) B \xi_1 \right\}^2, \\ T_{03}[C_k] &= \sum_{j \in C_k} m_j^{-1} B_{j3}^2(k), \\ \tilde{A}_{jp}(k) &= B_{jp}(k) - \frac{1}{2} m_j M^{-1} D_- (q^{(1)}) - (-1)^p B e_j q_{jp}^{(1)}, \quad p = 1, 2, \\ B_{jp}(k) &= \frac{1}{i} \sum_{s \in C_k} \frac{\partial}{\partial q_{sp}^{(1)}} \left(\delta_{sj} - \frac{m_j}{M_k} \right), \quad p = 1, 2, 3, \\ V[C_k] &= \frac{1}{2} \sum_{s, t \in C_k, s \neq t} V_{st} (q_s^{(1)} - q_t^{(1)}). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Если один из кластеров, скажем C_2 , состоит из единственной частицы, например, с номером t , то выражение оператора $H_0(Z_2)$ и все полученные из него упрощаются, ибо тогда $\alpha_2 = q_t$, $q_t^{(1)} = (0, 0, 0)$; следовательно, производные по $q_{tp}^{(1)}$ будут отсутствовать и $\tilde{A}_{tp}(2) = V[C_2] = 0$. Оператор $H_0(Z_2)$ определен в пространстве $\overline{R}_0^{(3n-3)} = \{q, \xi_0, \xi_1, \eta_1\}$. Преобразуем его аналогично оператору $\mathcal{H}_0$. Найдем сначала такую функцию ω_1 , что

$$H_0\left(Z_2, \frac{\partial}{i\partial\eta_1}\right) := e^{i\eta_1\omega_1} H_0(Z_2) e^{-i\eta_1\omega_1} \quad (2.14)$$

не будет содержать членов вида $c\eta_1$, а потом рассмотрим оператор

$$\int H_0\left(Z_2, \frac{\partial}{i\partial\eta_1}\right) e^{-i\lambda_1\eta_1} d\eta_1 = H_0(Z_2, \lambda_1). \quad (2.15)$$

Пусть

$$D_{\pm}(q^{(1)}, k) = (-1)^{k+1} M_1 M_k^{-1} B \sum_{t \in C_k} e_t(q_{t1}^{(1)} \pm q_{t2}^{(1)}),$$

$$\gamma_{k-1} = 2BQ_1 + 2(-1)^k BQ_2 M_1^2 M_k^{-1} M^{-1}, \quad k = 1, 2.$$

Тогда при $\omega_1 = D_-(q^{(1)}, 1) + D_-(q^{(1)}, 2) + \gamma_0 \xi_0 + \gamma_1 \xi_1$ оператор (2.14) не будет содержать членов с η_1 и

$$H_0(Z_2, \lambda_1) = \sum_{k=1}^2 (T[C_k, \lambda_1] + V[C_k]), \quad (2.16)$$

где

$$T[C_k, \lambda_1] = T_{\perp}[C_k, \lambda_1] + T_{03}[C_k],$$

$$T_{\perp}[C_k, \lambda_1] = \sum_{j \in C_k} \sum_{p=1}^2 \frac{1}{m_j} \left\{ A_{jp}(k) + \sum_{s=0}^1 h_{jps}(k) + (-1)^{k+1} \frac{m_j M_2}{2M_k M} \lambda_1 \right\}^2,$$

$$h_{jp0}(k) = (-1)^{p+1} \frac{1}{i} \frac{m_j}{2M} \frac{d}{d\xi_0} - F_j(k) \xi_0,$$

$$h_{jp1}(k) = (-1)^k \frac{M_1}{M_k} \left(\frac{1}{2i} \frac{m_j M_2}{M_1 M} (-1)^p \frac{d}{d\xi_1} + F_j(k) \xi_1 \right),$$

$$F_j(k) = e_j + \frac{Q_k}{M_k} m_j, \quad A_{jp}(k) = B_{jp}(k) - m_j (2M_k)^{-1} D_-(q^{(1)}, k) - (-1)^p B e_j q_{jp}^{(1)}.$$

Оператор $H_0(Z_2, \lambda_1)$ определен в пространстве $R_0^{(3n-3)} = \{q^{(1)}, \xi_0, \xi_1, \lambda_1\}$ и по построению унитарно эквивалентен $H_0(Z_2)$.

Если оператор $H_0(Z_2, \lambda_1)$ будет рассматриваться в пространстве $R_0^{(3n-4)} = \{q^{(1)}, \xi_0, \xi_1\}$ при фиксированном λ_1 , то мы будем обозначать его через $\hat{H}_0(Z_2, \lambda_1)$.

2.7. Следующие теоремы (2.3 и 2.4) описывают спектральные свойства операторов $H_0(Z_2)$ и $\hat{H}_0(Z_2, \lambda_1)$ распадения $Z_2 = (C_1, C_2)$, для которых

$$Q_1 Q_2 \neq 0. \quad (2.17)$$

ТЕОРЕМА 2.3. *Спектр $\sigma(\hat{H}_0(Z_2, \lambda_1))$ не зависит от λ_1 . Спектр $\sigma(H_0(Z_2))$ совпадает со спектром $\sigma(\hat{H}_0(Z_2, 0))$, однако каждая точка $\nu \in \sigma(H_0(Z_2))$ имеет дополнительное бесконечное вырождение по сравнению с этой же точкой из $\sigma(\hat{H}_0(Z_2, 0))$.*

СЛЕДСТВИЕ 2.3. *Спектр $\sigma_d(H_0(Z_2))$ всегда пуст.*

СЛЕДСТВИЕ 2.4. *Каждая точка ν из $\sigma_p(\hat{H}_0(Z_2, 0))$ является бесконечно вырожденным собственным значением оператора $H_0(Z_2)$, причем если $\nu \in \sigma_d(\hat{H}_0(Z_2, 0))$, то $\nu \in \sigma_{pp}(H_0(Z_2))$.*

СЛЕДСТВИЕ 2.5. $\inf H_0(Z_2) = \inf \hat{H}_0(Z_2, 0)$.

2.8. Для произвольного фиксированного $Z_2 = (C_1, C_2)$ обозначим через $Z'_3 = (C'_1, C'_2, C'_3)$ любое разбиение исходной системы Z_3 , получающееся из Z'_2 дроблением какого-либо из кластеров C_k , и положим

$$G(Z'_3) = \hat{H}_0(Z_2, 0) - \sum_{s \in C'_i, t \in C'_j} V_{st}(q_s^{(1)} - q_t^{(1)}), \quad \mu(Z_2) = \min_{Z'_3} \inf G(Z'_3),$$

где $C'_i \cup C'_j = C_k$, C_k – тот кластер из $\in Z_2$, дроблением которого получалось Z'_3 .

ТЕОРЕМА 2.4. *Существенный спектр $\sigma_{\text{ess}}(\hat{H}_0(Z_2,))$ совпадает с полуосью $[\mu(Z_2), +\infty)$.*

Теоремы 2.3, 2.4 служат фундаментом для исследования структуры спектра $\sigma_d(H_0)$ (и совпадающего с ним бесконечно вырожденного спектра $\sigma_{pp}(\mathcal{H})$). Дело в том, что доказательство того, что дискретный спектр гамильтонианов квантовых систем не пуст, существенно облегчается, если $\mu \in \sigma_p(H_0(Z_2))$. А из теорем 2.3, 2.4 следует достаточное условие этого включения – неравенство

$$\mu < \mu(Z_2). \quad (2.18)$$

Разумеется, оно верно не всегда, но даже когда выполняется, доказать его весьма трудно. Мы займемся проверкой неравенства (2.18) для конкретных систем в отдельной работе.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 2.1–2.4

3.1. Докажем теорему 2.1. Пусть a_{sp} , b – некоторые числа, $\varkappa = \sum_{s=1}^n \sum_{p=1}^2 a_{sp} q_{sp}$. Проведем калибровочное преобразование

$$e^{i\varkappa\lambda_0} \mathcal{H}_0(\lambda_0) e^{-i\varkappa\lambda_0} \quad (3.1)$$

и затем перейдем в операторе (3.1) к новым переменным, полагая

$$q' = q, \quad \lambda'_0 = \lambda_0, \quad \xi'_0 = \xi_0 - b_0 \lambda_0. \quad (3.2)$$

Обозначим полученный оператор через $\mathcal{H}'_0(\lambda'_0)$. Элементарные выкладки показывают, что

$$\mathcal{H}'_0(\lambda'_0) = \sum_{j=1}^n \sum_{p=1}^2 (A'_{jp} + d_{jp} \lambda'_0 + h'_{jp0})^2 + T'_{03} + V', \quad (3.3)$$

где штрихи указывают на замену $q \rightarrow q'$, $\xi_0 \rightarrow \xi'_0$;

$$d_{jp} = - \sum_{s=1}^n a_{sp} (\delta_{sj} - m_j M^{-1}) + m_j (2M)^{-1} - b_0 M^{-1} (Q m_j + M e_j) B.$$

Покажем, что выбором чисел a_{sp} и b_0 можно добиться выполнения равенств

$$d_{jp} = 0 \quad (3.4)$$

при $j = 1, 2, \dots, n$, $p = 1, 2$.

Суммируя (3.4) по j , видим, что $1/2 - 2b_0 BQ = 0$, т.е. $b_0 = (4BQ)^{-1}$. Подставив это выражение в (3.4), получим систему уравнений

$$a_{jp} - m_j M^{-1} \sum_{s=1}^n a_{sp} + m_j (4M)^{-1} - e_j (4Q)^{-1} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad p = 1, 2.$$

Будем искать a_{jp} в виде $a_{jp} = a e_j + \tilde{a} m_j$, где a и $\tilde{a}$ — неизвестные числа. Тогда из последней системы уравнений получается, что $a = (4Q)^{-1}$, $\tilde{a}$ — произвольно; мы возьмем $\tilde{a} = 0$. Таким образом, в результате калибровочного преобразования (3.1) с $\varkappa = (4BQ)^{-1} D_+$ и замены (3.2) с $b_0 = (4BQ)^{-1}$ мы получим оператор (3.3) с $d_{jp} = 0$, $j = 1, \dots, n$, $p = 1, 2$. Этот оператор, если отвлечься от штрихов у переменных, совпадает с $\mathcal{H}(0)$. Поэтому далее мы будем рассматривать $\mathcal{H}(0)$. По построению $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}(\lambda_0)$ и $\mathcal{H}(0)$ унитарно эквивалентны. Поскольку оператор $\mathcal{H}(0)$ не зависит от λ_0 , то его спектры в $\mathcal{L}_2(R_0^{(3n-1)})$ и в $\mathcal{L}_2(R_0^{(3n-2)})$ совпадают, но спектр в $\mathcal{L}_2(R_0^{(3n-1)})$ имеет дополнительное бесконечное вырождение по сравнению со спектром в $\mathcal{L}_2(R_0^{(3n-2)})$. Наконец, если рассматривать оператор $\hat{\mathcal{H}}_0(\lambda_0)$ (см. п. 2.4), то аналогично предыдущему убеждаемся, что $\hat{\mathcal{H}}_0(\lambda_0)$ унитарно эквивалентен $\mathcal{H}(0)$ в $\mathcal{L}_2(R_0^{(3n-2)})$. Теорема 2.1 доказана. Отметим, что для нейтральных систем (т.е. при $Q = 0$) это доказательство не подходит, и утверждения теоремы 2.1, по-видимому, не верны.

3.2. Доказательство теоремы 2.2 состоит из двух частей. Пусть $H = \hat{\mathcal{H}}_0(0)$. Труднее установить, что если $\nu \in \sigma_{\text{ess}}(H)$, то $\nu \geq \mu$; более легко показать, что если $\nu \geq \mu$, то $\nu \in \sigma_{\text{ess}}(H)$. Мы приведем доказательство того раздела “трудной” части, который является новым по сравнению с работой [2] (п. 3.3–3.8). Для “легкой” части ограничимся лишь описанием схемы доказательства.

Пусть $Z_2 = (C_1, C_2) \in O'$. Так как $\inf H_0(Z_2) = \inf H(Z_2)$, то $\mu \in \sigma(H_0(Z_2))$. Поэтому для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\psi_\varepsilon(q, \xi_0, \eta_0)$, $\|\psi_\varepsilon\| = 1$ такая, что

$$\|H_0(Z_2)\psi_\varepsilon - \mu\psi_\varepsilon\| \leq \varepsilon. \quad (3.5)$$

Пусть $\nu > \mu$, $\delta^2 = \nu - \mu$, $N > 0$ и функция $\tilde{g}_N(\zeta_1)$ такова, что $\tilde{g}_N \in C_0^2$, $\tilde{g}_N(\zeta_1) = \sin \delta(M_1 M_2 M^{-1})^{1/2} \zeta_1$ при $|\zeta_1| \leq N$, $\tilde{g}_N(\zeta_1) \equiv 0$ при $|\zeta_1| > N + 1$ и

$$\sup_N \left(\max_{\zeta_1} (|\tilde{g}_N| + |\tilde{g}'_N| + |\tilde{g}''_N|) \right) < +\infty. \quad (3.6)$$

Положим $g_N = \tilde{g}_N / \|\tilde{g}_N\|$, $E_N = \{\zeta \mid N \leq |\zeta| \leq N + 1\}$. Очевидно, что

$$\|H_c(Z_2)g_N - \delta^2 g_N\| = \|H_c(Z_2)g_N - \delta^2 g_N\|_{E_N} \rightarrow 0 \quad (3.7)$$

при $N \rightarrow \infty$, ибо в силу (3.6) $\sup_N (\|H_c(Z_2)\tilde{g}_N\|_{E_N} + \|\tilde{g}_N\|_{E_N}) < +\infty$, а $\|\tilde{g}_N\| \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$. Громоздкие оценки, которые мы здесь приводить не будем, показывают, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|V_{st}\psi_\varepsilon g_N\| = 0, \quad s \in C_i, \quad t \in C_j, \quad i \neq j. \quad (3.8)$$

В силу (3.5), (3.7), (3.8), (2.7) и (2.12) $\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \|H\psi_\varepsilon g_N - \nu\psi_\varepsilon g_N\| \leq \varepsilon$; так как значение ε произвольно, то $\nu \in \sigma(H)$.

3.3. Пусть теперь $\nu \in \sigma_{\text{ess}}(H)$. Докажем, что $\nu \geq \mu$. Так как $\nu \in \sigma_{\text{ess}}(H)$, то существуют $g_k(q, \xi_0) \in D_H$ такие, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|Hg_k - \nu g_k\| = 0, \quad g_k \rightharpoonup 0 \text{ в } \mathcal{L}_2(R_0^{(3n-2)}), \quad \|g_k\| = 1. \quad (3.9)$$

Ясно, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (Hg_k, g_k) = \nu.$$

Из последнего уравнения, (3.9) и теорем вложения Соболева вытекает, что последовательность g_k компактна в $\mathcal{L}_2(\Omega)$ для любой ограниченной области $\Omega \subset R_0^{(3n-2)}$. Отсюда и из (3.9) следует, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|g_k\|_\Omega = 0. \quad (3.10)$$

Легко видеть, что такую последовательность g_k можно выбрать из C_0^2 . Поэтому для справедливости неравенства $\nu \geq \mu$ достаточно доказать, что для любой последовательности $g_k \in C_0^2$, удовлетворяющей (3.9), (3.10) выполняется неравенство

$$\underline{\lim} (Hg_k, g_k) \geq \mu. \quad (3.11)$$

3.4. Опишем общую идею доказательства (3.11), используя физическую терминологию. Равенство (3.10) означает, что волновые функции g_k описывают последовательность состояний системы, для которой вероятность нахождения всей системы Z_1 в любой ограниченной области Ω пространства $R_0^{(3n-2)}$ стремится к нулю. Следовательно, g_k описывает либо одно из распадений $Z_s = (C_1, \dots, C_s)$ системы Z_1 на $s \geq 2$ кластеров или суперпозицию таких распадений, либо движение всей системы как целого. Ясно, что в первом случае для доказательства достаточно, грубо говоря, разложить состояние g_k на состояния g_{k,Z_s} , отвечающие всевозможным распадениям Z_s исходной системы, провести оценку снизу значений энергии системы по состояниям g_{k,Z_s} и затем собрать вместе полученные оценки. В то же время во втором случае нет никаких шансов доказать, что $\nu \geq \mu$, ибо последовательность g_k не отвечает распадению системы и значение энергии может быть меньше, чем минимальное из значений энергии по всем распадениям, т.е. ничто не запрещает неравенство $\nu = \lim (Hg_k, g_k) < \mu$, противоположное (3.11). Таким образом, для доказательства (3.11) второй случай необходимо исключить. Пусть $b \gg 1$ — произвольное число, χ_b — характеристическая функция области $|q| \geq b$ в $R_0^{(3n-2)}$, $\bar{\chi}_b = 1 - \chi_b$. Поскольку $\sum_{j=1}^n m_j q_j = 0$, то $\sum_{s=1}^n \left| \sum_{j=1}^n m_j (q_j - q_s) \right|^2 = M^2 |q|^2 \geq M^2 b^2$ при $q \in \text{supp } g_k \chi_b$. Поэтому при $q \in \text{supp } g_k \chi_b$ и $b \rightarrow \infty$ хотя бы одна из величин $|q_j - q_s|^2$ стремится к бесконечности, т.е. последовательность $g_k \chi_b$ при больших b описывает первый

случай и, следовательно, для нее оценка вида (3.11) в принципе может быть доказана. Но $g_k = g_k \chi_b + g_k \bar{\chi}_b$, и для исключения второго случая достаточно показать, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \|g_k \bar{\chi}_b\| = 0$ при любом b , т.е. что по последовательности g_k система *уходит* из области $|q| < b$ в область $|q| > b$, отвечающую первому случаю. Равенство $\lim_{k \rightarrow \infty} \|g_k \bar{\chi}_b\| = 0$ не есть прямое следствие (3.10), ибо область $\text{supp } \bar{\chi}_b$ не ограничена в $R_0^{(3n-2)}$ из-за переменной ξ_0 . Именно необходимость доказательства оценки $\lim_{k \rightarrow \infty} \|g_k \bar{\chi}_b\| = 0$ для последовательности g_k отличает задачи с магнитным полем, в которых полное отделение движения ЦМ невозможно, от задач без поля, в которых гамильтонианы и волновые функции зависят только от относительных координат q , область $|q| \leq b$ ограничена и соотношение (3.10) эквивалентно соотношению $\|g_k \bar{\chi}_b\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

3.5. Доказательство (3.10), (3.11) начнем с перестройки *кинетической части* гамильтониана H , отвечающей движению в плоскости x, y . Предварительно проведем простые алгебраические рассуждения, которые будут нужны и для доказательства теоремы 2.3. Пусть n_0 – натуральное число, $1 \leq n_0 \leq n$; $f_j = (f_{j1}, f_{j2})$, $\tilde{f}_j = (\tilde{f}_{j1}, \tilde{f}_{j2})$, $j = 1, 2, \dots, n_0$, – произвольные двумерные векторы, возможно с симметричными операторными компонентами; $f = (f_1, \dots, f_{n_0})$, $\tilde{f} = (\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_{n_0})$; $\mathcal{M} = \sum_{j=1}^{n_0} m_j$. Положим $(f_j, \tilde{f}_j)_2 = \sum_{p=1}^2 f_{jp} \tilde{f}_{jp}$, $(f, \tilde{f})_0 = \sum_{j=1}^{n_0} m_j (f_j, \tilde{f}_j)_2$, $f_{cp} = \sum_{j=1}^{n_0} m_j f_{jp} \mathcal{M}^{-1}$, $f_j^{(c)} = f^{(c)} = (f_{c1}, f_{c2})$, $f_j^{(0)} = f_j - f^{(c)}$, $f_c = (f_1^{(c)}, \dots, f_{n_0}^{(c)})$, $f_0 = (f_1^{(0)}, \dots, f_{n_0}^{(0)})$. Очевидно, что $f = f_0 + f_c$, $\sum_{j=1}^{n_0} m_j f_j^{(0)} = 0$ и $(f_c, f_0)_0 = 0$. Поэтому

$$(f, f)_0 = (f_0, f_0)_0 + (f_c, f_c)_0 = \sum_{j=1}^{n_0} \sum_{p=1}^2 m_j (f_{jp} - f_{cp})^2 + \mathcal{M} \sum_{p=1}^2 f_{cp}^2. \quad (3.12)$$

Далее возьмем $n_0 = n$, $\mathcal{M} = M$. Тогда разложение $f = f_0 + f_c$ можно рассматривать как разбиение f на два “ортогональных” слагаемых, принадлежащих пространствам “относительного движения” (f_0) и “движения центра масс” (f_c) .

3.6. Применим (3.12) для перестройки оператора (2.6). Пусть $f_{jp} = (A_{jp} + h_{jp0})/m_j$. Тогда $T_{\perp}(0) = (f, f)_0$ и в силу (3.12)

$$H = T_{0\perp} + T_{c\perp} + T_{03} + V, \quad (3.13)$$

где

$$T_{0\perp} = \sum_{j=1}^n \sum_{p=1}^2 (f_{jp} - f_{cp})^2 m_j, \quad T_{c\perp} = M(f_{c1}^2 + f_{c2}^2),$$

$$f_{cp} = \left(h_{cp0} - \frac{1}{2} D_- - (-1)^p B \sum_{j=1}^n e_j q_{j\bar{p}} \right), \quad h_{cp} = \frac{(-1)^{p+1}}{2i} \frac{d}{d\xi_0} - 2BQ\xi_0.$$

3.7. Используя (3.13), докажем сначала (3.10). В силу неравенств подчинения [5]

$$\inf \{ 2^{-1}(T_{0\perp} + T_{03} + T_{c\perp}) + V \} > -\infty. \quad (3.14)$$

Поэтому из условия $\lim_{k \rightarrow \infty} (H g_k, g_k) = \nu$ вытекает, что

$$\overline{\lim} (W g_k, g_k) < +\infty, \quad W = T_{0\perp}, T_{03}, T_{c\perp},$$

и, значит,

$$\sup_k (\|(f_{jp} - f_{cp})g_k\|^2 + \|f_{cp}g_k\|^2 + \|B_{j3}g_k\|^2) < +\infty$$

при любых j, p , поскольку операторы f_{jp} , f_{cp} и B_{j3} симметричны. Поэтому для любой ограниченной области $\Omega \subset R_0^{(3n-2)}$

$$\sup_k \left\| \frac{\partial g_k}{\partial \xi_0} \right\|_{\Omega} < +\infty, \quad \sup_k \|B_{jp}g_k\|_{\Omega} < +\infty, \quad 1 \leq j \leq n, \quad p = 1, 2, 3. \quad (3.15)$$

Операторы B_{jp} записаны в *зависимых* координатах $q_1, \dots, q_n$. Выберем в качестве независимых координат $q'_j = q_j$, $j = 1, \dots, n-1$. Тогда

$$q_{np} = - \sum_{s=1}^{n-1} (m_s q'_{sp}) m_n^{-1}, \quad B_{jp} = B'_{jp} = \sum_{s=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial q'_{sp}} \left(\delta_{sj} - \frac{m_j}{M} \right).$$

В силу (3.15)

$$\sup_k \|B'_{jp}g'_k\|_{\Omega'} < +\infty, \quad j = 1, \dots, n-1,$$

где $g'_k(q'_1, \dots, q'_{n-1}, \xi_0) = g_k(q_1, \dots, q_n, \xi_0)$ и Ω' — любая ограниченная область изменения переменных q'_j , ξ_0 , $j = 1, \dots, n-1$, следовательно, величины $\|\partial g'_k / \partial q'_{sp}\|_{\Omega'}$ равномерно ограничены по k . Отсюда и из теорем вложения Соболева следует компактность g'_k в $\mathcal{L}_2(\Omega')$, а значит, и компактность g_k в $\mathcal{L}_2(\Omega)$, что при учете (3.9) приводит к (3.10).

3.8. Пусть $b(1) > a(1) \gg 1$ и вещественные функции $u_1(\tau)$, $v_1(\tau)$ из $C^2(R^{(1)})$ таковы, что $u_1(\tau) = 1$ при $\tau \in [0; a(1)]$, $0 < u_1(\tau) < 1$ при $a(1) < \tau < b(1)$, $u_1(\tau) \equiv 0$ при $\tau \geq b(1)$, $u_1^2(\tau) + v_1^2(\tau) = 1$. Положим $|q|_0^2 = \sum_{j=1}^n |q_j|^2 m_j$, $\tau_{Z_1} = |q|_0$, $u_{Z_1} = u_1(\tau_{Z_1})$, $v_{Z_1} = v_1(\tau_{Z_1})$. Пусть число k велико и фиксировано, $\psi_{0,Z_1} = g_k u_{Z_1}$, $\hat{\psi}_1 = g_k v_{Z_1}$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существуют $a(1)$, $b(1)$ и функция $u_1(\tau)$ такая, что для всех k

$$(Hg_k, g_k) \geq (H\psi_{0,Z_1}, \psi_{0,Z_1}) + (H\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_1) - \varepsilon. \quad (3.16)$$

Далее форму $(H\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_1)$ оцениваем так же, как в работе [2] (см. с. 420–421), в результате чего получаем

$$(H\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_1) \geq \mu \|\hat{\psi}_1\|^2 - \varepsilon. \quad (3.17)$$

Остается оценить величину $(H\psi_{0,Z_1}, \psi_{0,Z_1})$. Это нельзя сделать аналогично работе [1], ибо в рассматриваемом нами случае область $\text{supp } \psi_{0,Z_1}$ не ограничена. Пусть $\varphi_{k,b} \equiv \psi_{0,Z_1} = g_k u_{Z_1}$. Покажем, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\varphi_{k,b}\| = 0 \quad (3.18)$$

(тем самым мы исключаем второй случай п. 3.4). В силу (3.14)

$$(H\varphi_{k,b}, \varphi_{k,b}) \geq c_0 \|\varphi_{k,b}\|^2 + \frac{1}{2} (T_{c\perp} \varphi_{k,b}, \varphi_{k,b}). \quad (3.19)$$

Здесь и далее c_i , $i = 0, 1, 2, \dots$, – константы, величины которых для нас не существенны. Так как операторы f_{cp} симметричны на C_0^2 , то $(T_{c\perp} \varphi_{k,b}, \varphi_{k,b}) = M(\|f_{c1} \varphi_{k,b}\|^2 + \|f_{c2} \varphi_{k,b}\|^2)$. Поэтому

$$(T_{c\perp} \varphi_{k,b}, \varphi_{k,b}) = (4M)^{-1} \left\| \frac{d\varphi_{k,b}}{d\xi_0} \right\|^2 + M^{-1} 4B^2 Q^2 \|\xi_0 \varphi_{k,b}\|^2 + (\Phi \varphi_{k,b}, \varphi_{k,b}), \quad (3.20)$$

где Φ есть линейная комбинация членов вида $q_{sp} q_{tp}$, $q_{sp} i d/d\xi_0$ и $q_{sp} \xi_0$. Поскольку при $(q, \xi_0) \in \text{supp } \varphi_{k,b}$ выполняется неравенство $|q|_0 \leq b(1)$, то

$$|(\Phi \varphi_{k,b}, \varphi_{k,b})| \leq \varepsilon \left\| \frac{d\varphi_{k,b}}{d\xi_0} \right\|^2 + \varepsilon \|\xi_0 \varphi_{k,b}\|^2 + c_1 \varepsilon^{-1} \|\varphi_{k,b}\|^2, \quad (3.21)$$

где ε произвольно и c_1 зависит от $b(1)$. Фиксируем $\varepsilon < (4M)^{-1} + 2B^2 Q^2 M^{-1}$. Тогда из (3.19)–(3.21) вытекает, что

$$(H \varphi_{k,b}, \varphi_{k,b}) \geq Q^2 B^2 M^{-1} \|\xi_0 \varphi_{k,b}\|^2 - c_3. \quad (3.22)$$

В силу (3.16), (3.17) и условия $\lim_{k \rightarrow \infty} (H g_k, g_k) = \nu$ выполняется $\sup_k (H \varphi_{k,b}, \varphi_{k,b}) < +\infty$. Поэтому и вследствие (3.22) $K := \overline{\lim} \|\xi_0 \varphi_{k,b}\| < +\infty$. Но так как для любого $N > 0$ $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\xi_0 \varphi_{k,b}\|_{|\xi_0| \leq N}^2 = 0$ согласно (3.10), то $\overline{\lim} \|\xi_0 \varphi_{k,b}\|^2 \geq N^2 \overline{\lim} \|\varphi_{k,b}\|^2$ и, значит, $\overline{\lim} \|\varphi_{k,b}\| \leq K N^{-1}$ при любом $N > 0$, т.е. $\overline{\lim} \|\varphi_{k,b}\| = 0$, что доказывает (3.18). Следовательно, при больших k

$$(H \varphi_{k,b}, \varphi_{k,b}) \geq \mu \|\varphi_{k,b}\|^2 - \varepsilon.$$

Отсюда и из (3.16), (3.17) следует, что

$$\underline{\lim} (H g_v, g_k) \geq \mu - \varepsilon. \quad (3.23)$$

Так как значение $\varepsilon > 0$ произвольно, то неравенство (3.11) можно считать доказанным.

3.9. Доказательство теоремы 2.3 проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 2.1. Пусть a_{sp} , b_0 , b_1 – некоторые числа, $\varkappa = \sum_{j=1}^n \sum_{p=1}^2 a_{jp} q_{jp}^{(1)}$. Проведем калибровочное преобразование

$$e^{i\varkappa \lambda_1} H_0(Z_2, \lambda_1) e^{-i\varkappa \lambda_1}, \quad (3.24)$$

а затем перейдем в операторе (3.24) к новым переменным, полагая

$$q'_{sp} = q_{sp}^{(1)}, \quad s = 1, \dots, n, \quad p = 1, 2, 3, \quad \lambda'_1 = \lambda_1, \quad \xi'_0 = \xi_0 - b_0 \lambda_1, \quad \xi'_1 = \xi_1 - b_1 \lambda_1.$$

Обозначим полученный оператор через $H'_0(Z_2, \lambda'_1)$. Очевидно, что

$$H'_0(Z_2, \lambda'_1) = \sum_{k=1}^2 (T'[C_k, \lambda'_k] + V'[C_k]),$$

где

$$\begin{aligned} T'[C_k, \lambda'_k] &= T'_\perp[C_k, \lambda'_1] + T'_{03}[C_k], \\ T'_\perp[C_k, \lambda'_1] &= \sum_{j \in C_k} \sum_{p=1}^2 \frac{1}{m_j} \left[A'_{jp}(k) + \sum_{\ell=0}^1 h_{jp\ell}(k) + d_{jp}(k) \lambda'_1 \right], \\ d_{jp}(k) &= \sum_{t \in C_k} a_{tp} \left(\delta_{jt} - \frac{m_j}{M_k} \right) - \frac{m_j}{2M_k} \frac{M_2}{M} (-1)^k + F_j(k) \left(\frac{M_1}{M_k} b_1 (-1)^k - b_0 \right), \end{aligned}$$

а $A'_{jp}(k)$, $h'_{jp\ell}$, $T'_{03}[C_k]$ отличаются от $A_{jp}(k)$, $h_{jp\ell}$ и $T_{03}[C_k]$ только штрихами у переменных. Подберем числа a_{tp} , b_0 и b_1 так, чтобы выполнялось равенство

$$d_{jp}(k) = 0, \quad j \in C_k, \quad k = 1, 2, \quad p = 1, 2. \quad (3.25)$$

Суммируя уравнения (3.25) по $j \in C_k$, получаем уравнения для b_0 и b_1 :

$$b_0 + b_1 = M_2(4MBQ_1)^{-1}, \quad b_0 - b_1 M_1 M_2^{-1} = -M_2(4MBQ_2)^{-1}.$$

Найдя отсюда b_0 и b_1 , подставим их в (3.25), после чего отыщем a_{jp} в виде $a_{jp} = a(k)e_j + \tilde{a}(k)m_j$, где $a(k)$, $\tilde{a}(k)$ — неизвестные константы. В результате получаем, что $a(k) = M_2(-1)^k(4MQ_k)^{-1}$, а $\tilde{a}(k)$ может быть любым; мы возьмем $\tilde{a}(k) = 0$. Таким образом, преобразование (3.24) и последующая замена переменных с найденными значениями b_0 , b_1 , a_{jp} приводят к оператору $H'_0(Z_2, \lambda'_1)$ с $d_{jp}(k) = 0$ при $j \in C_k$, $k = 1, 2$, $p = 1, 2$. Этот оператор, если отвлечься от штрихов у переменных, совпадает с $H_0(Z_2, 0)$. По построению $H_0(Z_2, \lambda_1)$, $H'_0(Z_2, \lambda'_1)$ и $H_0(Z_2, 0)$ унитарно эквивалентны. Пусть $R_0^{(3n-3)} = \{q^{(1)}, \xi_0, \xi_1, \lambda_1\}$, $R_0^{(3n-4)} = \{q^{(1)}, \xi_0, \xi_1\}$. Поскольку оператор $H_0(Z_2, 0)$ не зависит от λ_1 , то его спектры в $\mathcal{L}_2(R_0^{(3n-3)})$ и $\mathcal{L}_2(R_0^{(3n-4)})$ совпадают, но спектр в $\mathcal{L}_2(R_0^{(3n-3)})$ имеет дополнительное бесконечное вырождение по сравнению со спектром в $\mathcal{L}_2(R_0^{(3n-4)})$. Наконец, если рассматривать оператор $\hat{H}_0(Z_2, \lambda_1)$ в $\mathcal{L}_2(R_0^{(3n-4)})$, то действуя аналогично предыдущему, но без замены $\lambda'_1 = \lambda_1$, мы убеждаемся, что оператор $\hat{H}_0(Z_2, \lambda_1)$ унитарно эквивалентен $\hat{H}_0(Z_2, 0)$. Теорема 2.3 доказана. Далее будем считать Z_2 фиксированным и положим $G = \hat{H}_0(Z_2, 0)$.

3.10. Доказательство теоремы 2.4, как и доказательство теоремы 2.2, состоит из двух частей. Сначала надо показать, что если $\nu \geq \mu(Z_2)$, то $\nu \in \sigma_{\text{ess}}(G)$. Поскольку это делается аналогично п. 3.2, то мы опускаем соответствующие рассуждения. Далее необходимо доказать, что если $\nu \in \sigma_{\text{ess}}(G)$, то

$$\nu \geq \mu(Z_2). \quad (3.26)$$

Так же, как в п. 3.2, 3.3, убеждаемся, что для доказательства (3.26) достаточно показать, что для любой последовательности $g_m = g_m(q^{(1)}, \xi_0, \xi_1)$ из C_0^2 , для которой

$$\sup_m (Gg_m, g_m) < +\infty, \quad g_m \rightharpoonup 0 \text{ в } \mathcal{L}_2(R_0^{(3n-4)}), \quad \|g_m\| = 1, \quad (3.27)$$

выполняется неравенство

$$\liminf (Gg_m, g_m) \geq \mu(Z_2). \quad (3.28)$$

Пусть $\Omega_b = \{q^{(1)}, \xi_0, \xi_1 \mid |q^{(1)}| \leq b\}$. Ключевую роль в доказательстве (3.28) играет равенство

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|g_m\|_{\Omega_b} = 0, \quad (3.29)$$

которое мы сейчас докажем для любых $b > 0$. Для получения (3.29) проведем перестройку кинетической части оператора $H_0(Z_2, 0)$, используя построения п. 3.5. Положим

$$f_{jp}(k) = \left(A_{jp}^{(1)}(k) + \sum_{s=0}^1 h_{jps}(k) \right) m_j^{-1}, \quad p = 1, 2; \quad f_j(k) = (f_{j1}(k), f_{j2}(k)).$$

Тогда

$$T_{\perp}[C_k] = \sum_{j \in C_k} \sum_{p=1}^2 m_j f_{jp}^2(k) = T_{0\perp}[C_k] + T_{c\perp}[C_k],$$

где

$$T_{0\perp}[C_k] = \sum_{j \in C_k} \sum_{p=1}^2 (f_{jp}(k) - f_{cp}(k))^2 m_j, \quad T_{c\perp}[C_k] = M_k (f_{c1}(k)^2 + f_{c2}(k)^2),$$

$$f_{cp}(k) = \sum_{g \in C_k} m_g f_{gp}(k) M_k^{-1} = \sum_{j \in C_k} \left(A_{jp}^{(1)}(k) + \sum_{\ell=0}^1 h_{jpe\ell}(k) \right) M_k^{-1}.$$

Используя (3.27) и симметричность операторов $f_{jp}(k)$ и $f_{cp}(k)$, аналогично п. 3.7 получаем

$$L := \sup_{m,j,p} \left(\|(f_{jp}(k) - f_{cp}(k))g_m\|^2 + \|f_{cp}(k)g_m\|^2 + \|B_{j3}^{(1)}(k)g_m\|^2 \right) < +\infty. \quad (3.30)$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \sum_{p,k=1}^2 \|f_{cp}(k)g_m\|^2 M_k &\geq \sum_{p,k=1}^2 \|f_{cp}(k)g_m\|_{\Omega_b}^2 M_k = \\ &= (4M)^{-1} \left\| \frac{dg_m}{d\xi_0} \right\|_{\Omega_b}^2 + (4M M_1)^{-1} M_2 \left\| \frac{dg_m}{d\xi_1} \right\|_{\Omega_b}^2 + \\ &+ \sum_{k=1}^2 4Q_k^2 B^2 M_k^{-1} \|(\xi_1 M_1 M_k^{-1} - (-1)^k \xi_0)g_m\|_{\Omega_b}^2 + (\Phi_1 g_m, g_m)_{\Omega_b}, \end{aligned} \quad (3.31)$$

где Φ_1 — линейная комбинация членов вида $q_{jp}^{(1)} q_{j'p'}^{(1)}$, $(q_{jp}^{(1)}/i)(d/d\xi_t)$, $q_{jp} \xi_t$. В силу (3.30), (3.31) существует $\delta_0 > 0$ такое, что

$$L \geq \delta_0 \left(\left\| \frac{dg_m}{d\xi_0} \right\|_{\Omega_b}^2 + \left\| \frac{dg_m}{d\xi_1} \right\|_{\Omega_b}^2 + \|\xi_1 g_m\|_{\Omega_b}^2 + \|\xi_0 g_m\|_{\Omega_b}^2 \right) - c \quad (3.32)$$

при любых $b = b(1) \gg 1$; здесь $c = c(b)$. Пусть величина $N > 0$ произвольна и

$$\Omega_{b,N} = \{q^{(1)}, \xi_0, \xi_1 \mid |q^{(1)}| \leq b(1), \xi_0^2 + \xi_1^2 \leq N^2\}.$$

В силу (3.30), (3.31)

$$\sup_{m,j} \left(\|B_{jp}^{(1)}(k)g_m\|_{\Omega_{b,N}}^2 + \left\| \frac{dg_m}{d\xi_0} \right\|_{\Omega_{b,N}}^2 + \left\| \frac{dg_m}{d\xi_1} \right\|_{\Omega_{b,N}}^2 \right) < +\infty, \quad p, k = 1, 2, \quad j \in C_k$$

и, значит, к последовательности g_m в $\Omega_{b,N}$ применима теорема вложения Соболева. Используя ее и (3.27), получаем, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|g_m\|_{\Omega_{b,N}} = 0 \quad (3.33)$$

для любых значений b и N . В силу (3.32), (3.33) при фиксированном b и любом N выполняется неравенство $\overline{\lim} \|g_m\|_{\Omega_b}^2 \leq (L+c)/(\delta_0 N)$, откуда и следует (3.29) при любых $b > 0$.

3.11. Пусть числа $a(1)$, $b(1)$ и функции $u_1(\tau)$, $v_1(\tau)$ те же, что в п.3.8, $\tau_{C_k}^2 = \sum_{j \in C_k} m_j |q_j^{(1)}|^2$, $u_{C_k} = u_1(\tau_{C_k})$, $v_{C_k} = v_1(\tau_{C_k})$. Положим $\psi_{0,C_1} = g_m u_{C_1}$, $\hat{\psi}_{1,1} = g_m v_{C_1}$, $\psi_{0,Z_2} = \psi_{0,C_1} u_{C_2}$, $\hat{\psi}_{1,2} = \psi_{0,C_1} v_{C_2}$, где номер m будем считать фиксированным. Тогда, выбирая при $\varepsilon > 0$ числа $a(1)$ и $b(1)$ и функцию $u_1(\tau)$ аналогично (3.16), получим

$$(Gg_m, g_m) \geq (G\psi_{0,C_1}, \psi_{0,C_1}) + (G\hat{\psi}_{1,1}, \hat{\psi}_{1,1}) - \varepsilon \|g_m\|^2, \quad (3.34)$$

$$(G\psi_{0,C_1}, \psi_{0,C_1}) \geq (G\psi_{0,Z_2}, \psi_{0,Z_2}) + (G\hat{\psi}_{1,2}, \hat{\psi}_{1,2}) - \varepsilon \|\psi_{0,C_1}\|^2. \quad (3.35)$$

Поскольку $\sum_{j \in C_k} q_j^{(1)} m_j = 0$, а при $q^{(1)} \in \text{supp } \hat{\psi}_{1,k}$ выполняется неравенство $\tau_{C_k}^2 \geq a(1)$, то оценка членов с $\hat{\psi}_{1,k}$ в (3.34) и (3.35) может быть проведена в точности так же, как оценка членов $(H\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_1)$ в (3.16), с той разницей, что интегралы по $R_0^{(3n-4)}$ в скалярном произведении $(G\hat{\psi}_{1,k}, \hat{\psi}_{1,k})$ надо записать как повторные: сначала по пространству $R_0[C_k]$ всех $q_j^{(1)}$, $j \in C_k$, $\sum_{j \in C_k} m_j q_j = 0$, а потом по остальным переменным. Тогда, оценивая для больших $a(1)$ интегралы по $R_0[C_k]$ при фиксированных ξ_0, ξ_1 и $q_j^{(1)}$, $j \notin C_k$ аналогично (3.16) и (3.17), а потом интегрируя по фиксированным переменным, получим

$$(G\hat{\psi}_{1,k}, \hat{\psi}_{1,k}) \geq \mu_k(Z_2) \|\hat{\psi}_{1,k}\|^2 - \varepsilon \|\hat{\psi}_{1,k}\|^2, \quad (3.36)$$

где $\mu_k(Z_2) = \min_{Z'_{3,k}} \inf G(Z'_{3,k})$ (см. п.2.8) и через $Z'_{3,k} = (C'_1, C'_2, C'_3)$ обозначены те разбиения системы Z_1 , которые получены из $Z_2 = (C_1, C_2)$ дроблением кластера C_k . Очевидно, что $\mu_k(Z_2) \geq \mu(Z_2)$. Таким образом в (3.34) и (3.35) нам остается оценить только член с ψ_{0,Z_2} . По определению и в силу (3.29) при больших m

$$(G\psi_{0,Z_2}, \psi_{0,Z_2}) \geq \mu \|\psi_{0,Z_2}\|^2 \geq \mu(Z_2) \|\psi_{0,Z_2}\|^2 - \varepsilon. \quad (3.37)$$

Из (3.34)–(3.37) следует, что $\underline{\lim} (Gg_m, g_m) \geq \mu(Z_2) - 3\varepsilon$; тем самым теорема 2.4 доказана.

Список литературы

- [1] J. E. Avron, J. W. Herbst, B. Simon. Ann. Phys. 1978. V. 114. P. 431–451.
- [2] С. А. Вугальтер, Г. М. Жислин. ТМФ. 1997. Т. 113. № 3. С. 413–431.
- [3] Г. М. Жислин. ТМФ. 1999. Т. 118. № 1. С. 15–39; Т. 120. № 2. С. 291–308.
- [4] Г. М. Жислин. Докл. РАН. 2001. Т. 377. № 3. С. 301–304.
- [5] J. E. Avron, J. W. Herbst, B. Simon. Duke Math. J. 1978. V. 45. P. 874–883.

Поступила в редакцию 18.I.2002 г.