Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Заксе, Образующие Сильвестра–’т Хоофта для алгебр Ли $\mathfrak{sl}(n)$ и $\mathfrak{gl}(n|n)$ и соотношения между ними, *ТМФ*, 2006, том 149, номер 1, 3–17

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf3823>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 11:54:22

© 2006 г.

К. Заксе*

ОБРАЗУЮЩИЕ СИЛЬВЕСТРА–’Т ХООФТА ДЛЯ АЛГЕБР ЛИ $\mathfrak{sl}(n)$ И $\mathfrak{gl}(n|n)$ И СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ НИМИ

Среди простых конечномерных алгебр Ли только $\mathfrak{sl}(n)$ имеет два автоморфизма конечного порядка, у которых нет общего ненулевого собственного вектора с собственным значением 1. Оказывается, что эти автоморфизмы являются внутренними и представляют собой пару образующих, позволяющих породить всю алгебру $\mathfrak{sl}(n)$ с помощью скобки. По-видимому, Сильвестр был первым, кто отметил эти образующие, однако он использовал их как образующие ассоциативной алгебры всех $(n \times n)$ -матриц $\text{Mat}(n)$. Эти образующие появляются в описании эллиптических решений классического уравнения Янга–Бакстера, ортогональных разложений алгебр Ли, в работах ’т Хоофта по операторам конформного преобразования в КХД и в ряде других случаев. Нами предложен алгоритм, который, с одной стороны, порождает $\mathfrak{sl}(n)$, а с другой – явно описывает набор определяющих соотношений. Для простых (с точностью до центра) супералгебр Ли аналоги образующих Сильвестра существуют только для $\mathfrak{gl}(n|n)$. Для этого случая соотношения также получены.

Ключевые слова: определяющие соотношения, алгебры Ли, супералгебры Ли.

1. ВВЕДЕНИЕ

При работе с заданной алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ и модулями над ней, особенно при q -квантовании, необходимо удобное представление для $\mathfrak{g}$, т.е. описание в терминах образующих и определяющих соотношений. Очевидно, базисные элементы (которые порождают алгебру как линейное пространство) являются образующими, но их слишком много. Хорошо известно [1], что для любой нильпотентной алгебры Ли $\mathfrak{n}$ естественным набором образующих является базис в $\mathfrak{n}/[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] = H_1(\mathfrak{n})$; соотношения между этими образующими можно описать в терминах базиса в $H_2(\mathfrak{n})$. Простая (супер)алгебра Ли $\mathfrak{g}$ (конечномерная, Каца–Мули или алгебра полиномиальных векторных полей) стандартным образом расщепляется в сумму $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ двух максимальных нильпотентных подалгебр $\mathfrak{n}_{\pm}$ (положительной и отрицательной) и коммутативной подалгебры Картана. Соответствующие образующие в $\mathfrak{n}_{\pm}$ и $\mathfrak{g}$ называются образующими Шевалле, соотношения между ними также известны

*Max-Planck Institute for Mathematics in the Sciences, Leipzig, Germany.
E-mail: sachse@mis.mpg.de

(см. [2], [3]). Этих соотношений много ($3n$ образующих для алгебры ранга n и $\sim n^2$ соотношений), но они просты и потому удобны.

Для сравнения отметим, что в простейшем случае $\mathfrak{gl}(n)$ матричные элементы, очевидно, являются образующими, и соотношения между ними являются простыми, но их слишком много (n^2 образующих и $\sim n^4$ соотношений).

Джекобсон был, вероятно, первым, кто заметил, что каждую простую конечномерную алгебру Ли можно породить с помощью всего лишь пары образующих, однако он не указал эти пары, а потому соотношения и не обсуждались. Грозман и Лейтес [4] ввели пару образующих, связанных с главным вложением $\mathfrak{sl}(2)$, с достаточно простыми (по крайней мере, для расчетов на компьютере) соотношениями между ними. Имеются и другие образующие, аналогичные выбранным Грозманом и Лейтесом, однако пока что эксперименты показали, что те, которые рассмотрели Грозман и Лейтес, наиболее удобны и притом связаны с различными приложениями [1], [5].

Имеются, однако, некоторые пары образующих, присущие только $\mathfrak{sl}$ -серии и только над алгебраически замкнутым полем (например, $\mathbb{C}$). Ниже мы описываем такую пару образующих для $\mathfrak{sl}(n)$ и их аналоги для $\mathfrak{gl}(n|n)$ и приводим соотношения между ними.

Положим $a = e^{2i\pi/n}$ и определим образующие Сильвестра (также называемые *вращательно-поступательные образующие*, или *матрицы 'т Хоофта*) как

$$D = \text{diag}(1, a, a^2, \dots, a^{n-1}), \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Захос отмечал [6], что “по-видимому, Сильвестр [7] был первым, кто изучал эти образующие¹⁾ (1) алгебры $\mathfrak{sl}(n)$; он первым вывел их для $\mathfrak{sl}(3)$ и назвал их “нионионами” (по аналогии с кватернионами), а затем обобщил на $\mathfrak{sl}(n)$. Они стали популярными в 30-е годы в контексте квантовой механики на окружности, т.е. на дискретной периодической решетке из N точек (см. [8]). Эти усилия продолжались до настоящего времени в работах Швингера, Сантанамы, Толара, Флоратоса и других. Они также стали популярными среди теоретиков, занимающихся физикой высоких энергий, ввиду работ 'т Хоофта [9] об операторах конфайнмента для порядка-беспорядка в КХД, так что многие ученые в моем уголке мира называли их “матрицами 'т Хоофта”. Я прибегал к их помощи каждые несколько лет, начиная с работы [10], для отождествления случаев $\sin$ -алгебры, найденных тогда, с $\mathfrak{sl}(N)$, а также для алгебры скобок Мойяла [11] на тороидальном фазовом пространстве, переходя к пределу

¹⁾Точнее, Сильвестр использовал их как образующие ассоциативной алгебры, где они приводят к алгебре $(n \times n)$ -матриц $\text{Mat}(n)$. Заменяя обычное произведение скобкой, мы снабжаем пространство $\text{Mat}(n) = \text{Mat}(V)$ структурой алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n)$; вводя четность в $\text{Mat}(n)$ путем присвоения четности каждому базисному вектору $v \in V$ (и, таким образом, каждой строке и столбцу) и заменяя произведение суперскобкой, мы снабжаем суперпространство $\text{Mat}(n; \text{Par})$, где Par – упорядоченный набор четностей, структурой супералгебры Ли $\mathfrak{gl}(\text{Par})$. В качестве образующих алгебры Ли образующие Сильвестра могут породить только $\mathfrak{sl}$, но не $\mathfrak{gl}$.

$N \rightarrow \infty$, для более непосредственного получения скобок Пуассона на сферическом фазовом пространстве, чем в первоначальном выводе Хоппа [12]. Последний раз мы использовали их, когда недавно отвлеклись [13] на алгебры Ли с кольцевыми индексами. Они дают, по-видимому, наиболее систематический базис для работы со всеми алгебрами $\mathfrak{sl}(N)$ на равной основе и для взятия наивных пределов $N \rightarrow \infty$.

Чтобы перейти от обозначений, которые использовали Захос с соавторами, к нашим обозначениям, заметим, что, например, в работе [10] авторы порождают алгебру $\mathfrak{gl}(n)$ из образующих Сильвестра D, S (1) вида

$$J_{(m_1, m_2)} = a^{m_1 m_2 / 2} D^{m_1} S^{m_2},$$

которые представляют собой n^2 линейно независимых матриц, занумерованных двумя целыми числами $0 \leq m_1, m_2 < n$. На единичную матрицу $J_{(0,0)}$ натягивается центр. Таким образом, факторизация по нему оставляет $\mathfrak{sl}(n)$ со скобкой

$$[J_{(m_1, m_2)}, J_{(k_1, k_2)}] = -2i \sin\left(\frac{2\pi}{n}(m_1 k_2 - m_2 k_1)\right) J_{(m_1 + k_1, m_2 + k_2)}.$$

Другим важным применением образующих Сильвестра является классическое уравнение Янга–Бакстера на функцию, принимающую значения в простой алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Оказывается [14], [15], что, для того чтобы это уравнение имело эллиптические решения, алгебра $\mathfrak{g}$ должна обладать двумя автоморфизмами конечного порядка, не имеющими общего ненулевого собственного вектора с собственным значением 1. Образующие Сильвестра являются такими автоморфизмами для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$. Действительно, в работах [14], [15] доказано, что любая алгебра Ли $\mathfrak{g}$, обладающая такими автоморфизмами, должна быть изоморфна $\mathfrak{sl}(n)$, и эллиптические решения могут характеризоваться образами образующих Сильвестра (1) при этом изоморфизме. Они также играют ключевую роль в изучении ортогональных разложений алгебр Ли [16]–[18] и теории представлений [19].

Наконец, область, в которой эти образующие применяются наиболее часто, – это гидродинамика и статистическая теория турбулентных жидкостей и газов, в частности изучение решеточных моделей невязких жидкостей – эйлеровых жидкостей (см., например, [20]–[22]).

Цель настоящей работы заключается в формулировке алгоритма, который позволяет породить $\mathfrak{sl}(n)$ и $\mathfrak{gl}(n|n)$ из образующих Сильвестра, а также задает представление этих алгебр образующими и соотношениями. Это представление избыточно, однако может оказаться интересным с практической точки зрения, поскольку позволяет проводить быстрые и легкие вычисления в присоединенном представлении. Сформулируем основные утверждения работы.

ТЕОРЕМА 1. *Зафиксируем целое число $n \geq 2$. Тогда матрицы (1) являются образующими для алгебры $\mathfrak{sl}(n)$:*

$$\mathfrak{sl}(n) = \text{Span}(D, S, T_m^k \mid 1 \leq k, m \leq n, \text{ где } k \neq n \text{ при } m = 1, n \text{ и } k \neq 1 \text{ при } m = n), \quad (2)$$

где при $1 \leq k, m \leq n$ мы положили

$$\begin{aligned} T_m^k &= (\text{ad } D)^{k-1}((\text{ad } S)^{m-1}(\text{ad } D(S))), \\ T_n^k &= \text{ad } S(T_{n-1}^k). \end{aligned} \quad (3)$$

Определяющий набор соотношений для образующих (1) можно получить следующим образом. Соотношения

$$(\text{ad } D)^n(S) = (1 - a)^n S, \quad (4)$$

$$(\text{ad } D)^n((\text{ad } S)^{m-1}(\text{ad } D(S))) = (1 - a)^m (1 - a^m)^n (-1)^{m+1} (\text{ad } S)^{m-1}(\text{ad } D(S)), \quad (5)$$

$$\text{ad } S(T_{n-1}^1) = (1 - a)^n (-1)^n D, \quad (6)$$

$$\text{ad } S(T_{n-1}^n) = 0, \quad (7)$$

$$\text{ad } S(T_n^k) = (-1)^n (1 - a^k)^2 (1 - a^{n-1})^{k-1} (1 - a)^{n-k} T_1^k, \quad (8)$$

$$\text{ad } D(T_n^k) = 0 \quad (9)$$

запрещают порождение элементов порядка выше n как по D , так и по S . Кроме того, для каждого T_m^k с $2 \leq m \leq n-1$, кроме T_2^2 , должны выполняться $m-1$ соотношений, которые можно записать как

$$(\text{ad } S)^{s_1}((\text{ad } D)^{k-1}((\text{ad } S)^{s_2}(T_1^1))) = \left(\frac{1 - a^k}{1 - a} \right)^{s_1} \left(\frac{1 - a^{s_1}}{1 - a^{m-1}} \right)^{k-1} T_m^k,$$

где $s_1 + s_2 = m-1$ и $s_1 = 1, 2, \dots, m-1$.

ТЕОРЕМА 2. Рассматриваемые как $(2n \times 2n)$ -суперматрицы на суперпространстве с чередующейся четностью базисных векторов (четный, нечетный, четный, нечетный, ...), образующие (1) являются образующими для $\mathfrak{gl}(n|n)$:

$$\mathfrak{gl}(n|n) = \text{Span}(D, S, T_m^k \mid 1 \leq k, m \leq 2n, \text{ где } k \neq 2n \text{ при } m = 1 \text{ и } k \neq 1 \text{ при } m = 2n)$$

где T_m^k определены в (3). Определяющим набором соотношений в этом случае являются приведенные ниже формулы (15)–(19) и $m-1$ соотношений для каждого T_m^k при $2 \leq m \leq 2n-1$, которые можно записать как

$$(\text{ad } S)^{s_1}(T_{s_2+1}^k) = \begin{cases} (-1)^{s_1} (a^{2k} - 1)^{(s_1-1)/2} \frac{a^k + 1}{1 - a} \times \\ \quad \times \left(\frac{1 - a^{s_1}}{1 - a^{m-1}} \right)^{k-1} \left(-\frac{1 - a}{1 + a} \right)^{(s_1-1)/2} \tilde{T}_m^k & \text{при } s_1 \text{ нечетном} \\ & \text{и } s_2 \text{ четном,} \\ (-1)^{s_1} (a^{2k} - 1)^{(s_1-1)/2} \frac{a^k - 1}{1 - a} \times \\ \quad \times \left(\frac{1 - a^{s_1}}{1 - a^{m-1}} \right)^{k-1} \left(-\frac{1 - a}{1 + a} \right)^{(s_1-1)/2} \tilde{T}_m^k & \text{при } s_1, s_2 \text{ нечетных,} \\ (-1)^{s_1} \frac{(a^{2k} - 1)^{s_1/2}}{1 - a} \times \\ \quad \times \left(\frac{1 - a^{s_1}}{1 - a^{m-1}} \right)^{k-1} \left(-\frac{1 - a}{1 + a} \right)^{s_1/2} \tilde{T}_m^k & \text{при } s_1, s_2 \text{ четных} \\ & \text{или } s_1 \text{ четном и} \\ & s_2 \text{ нечетном,} \end{cases}$$

где $s_1 + s_2 = m-1$ и $s_1 = 1, 2, \dots, m-1$.

Далее мы покажем, почему набор соотношений, указанный в теоремах 1, 2, является определяющим. Тем самым автоматически получим также верхнюю границу числа независимых соотношений для образующих Сильвестра.

2. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ОБРАЗУЮЩИМИ СИЛЬВЕСТРА ДЛЯ $\mathfrak{sl}(n)$

Полагая

$$T_1^k := (\text{ad } D)^k(S), \quad k = 1, 2, \dots, n-1,$$

получаем матрицы

$$T_1^k = (1-a)^k \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a^{k(n-2)} \\ a^{k(n-1)} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

которые, очевидно, все являются линейно независимыми. Для $k = n$ получаем соотношение (4). Действуя аналогичным образом, мы порождаем базис для $\mathfrak{sl}(n)$. Положим

$$T_m^k = (\text{ad } D)^{k-1}((\text{ad } S)^{m-1}(T_1^1)) = (\text{ad } D)^{k-1}((\text{ad } S)^{m-1}(\text{ad } D(S))),$$

где $m = 1, 2, \dots, n-1$ и $k = 1, 2, \dots, n$, или в матричном виде

$$T_m^k = (1-a)^m (1-a^m)^{k-1} (-1)^{m+1} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a^k & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & a^{k(n-m-1)} \\ a^{k(n-m)} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a^{k(n-1)} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Это все недиагональные матрицы, необходимые для построения базиса алгебры $\mathfrak{sl}(n)$. Их линейная независимость легко проверяется. Мы также немедленно получаем соотношение (5) при $k = n+1$.

Остается породить $n-2$ диагональных матрицы, что мы сделаем следующим образом:

$$T_n^k = \text{ad } S(T_{n-1}^k) = \text{ad } S((\text{ad } D)^{k-1}((\text{ad } S)^{n-2}(\text{ad } D(S)))),$$

где $k = 2, 3, \dots, n-1$, и мы получаем соотношения (6)–(9).

Поскольку мы получили $n^2 - 1$ линейно независимых матриц, мы тем самым нашли базис для $\mathfrak{sl}(n)$ (см. (2)). Можно, однако, пожелать описывать $\mathfrak{sl}(n)$ как фактор

свободной алгебры Ли, порожденной двумя образующими Сильвестра, по модулю некоторых определяющих соотношений. Поскольку нам известно, что матрицы T_m^k линейно порождают $\mathfrak{sl}(n)$, нам тем самым известно, что любой их коммутатор должен приводить к соотношению. Указанные выше соотношения представляют собой просто-напросто соотношения, встречающиеся, в первую очередь, при применении выбранного нами алгоритма для порождения базиса алгебры $\mathfrak{sl}(n)$. Нахождение числа и явного представления *минимальных* определяющих соотношений оказывается достаточно сложным, несмотря на кажущуюся простоту задачи. Грозман [23] сумел найти эти минимальные соотношения для $n = 2, 3, 4$:

$$\begin{aligned} \underline{n=2}: \quad & (\text{ad } S)^2(D) = 4D, \quad (\text{ad } D)^2S = 4S; \\ \underline{n=3}: \quad & (\text{ad } S)^3(D) = -3(a - a^2)D, \quad (\text{ad } D)^3(S) = 3(a - a^2)S, \quad [T_2^1, T_1^2] = 0; \\ \underline{n=4}: \quad & (\text{ad } S)^4(D) = -4D, \quad (\text{ad } D)^4(S) = -4S, \quad [T_1^1, T_2^1] = [D, T_3^1], \\ & [T_1^1, [T_2^1, T_3^1]] = -4T_1^2, \quad [T_3^1, T_3^1] = 0, \quad 2[T_2^1, T_1^1] = [T_1^2, [D, T_2^1]], \\ & 2[T_1^2, T_3^1] = [T_2^1, [S, T_1^1]], T_1^2 = [S, T_1^1], \quad [T_1^2, T_1^3] = 4T_1^1, \end{aligned} \quad (10)$$

с помощью пакета программ Mathematica и своего пакета SuperLie, однако ему не удалось вывести из этих соотношений общую формулу. С другой стороны, ни явный вид *минимального* набора соотношений, ни их число не имеют большого практического значения при работе с этими образующими. Что скорее хотелось бы получить, так это, например, формулу, описывающую действие произвольных произведений элементов алгебры $\mathfrak{sl}(n)$ в присоединенном представлении. Такая формула будет дана ниже, и в дополнение к ней будет предложен набор соотношений, который, хотя и избыточен, позволяет провести немедленную редукцию произвольного выражения вида

$$\text{ad } X_1(\text{ad } X_2(\dots (\text{ad } X_q(Y)) \dots)),$$

где X_i и Y – произвольные элементы из $\mathfrak{sl}(n)$, к линейной комбинации базисных элементов, полученных с помощью нашего алгоритма.

С помощью явного вычисления проверим прежде всего, что

$$[T_m^k, T_{m'}^{k'}] = \frac{(1 - a^m)^{k-1} (1 - a^{m'})^{k'-1}}{(1 - a^{m+m'})^{k+k'-1}} (a^{k'm'} - 1) T_{m+m'}^{k+k'},$$

для любой из определенных выше матриц $T_m^k, T_{m'}^{k'}$. Здесь и далее $k + k'$ и $m + m'$ следует понимать по модулю n . Таким образом мы непосредственно докажем следующее утверждение.

ЛЕММА 1. *Результат применения произвольного произведения элементов в присоединенном представлении к T_m^k зависит с точностью до множителя только от числа элементов S и D , содержащихся в этих элементах, т.е.*

$$\text{ad } X_1(\text{ad } X_2(\dots \text{ad } X_N(T_m^k)) \dots) = C(k, k', m, m', n) T_{m+m'}^{k+k'}, \quad (11)$$

где m_i и k_i – соответственно числа элементов S и D , содержащихся в X_i , $m' = \sum_i m_i$, $k' = \sum_i k_i$, а $C(k, k', m, m', n)$ – константа.

Рис. 1. Два пути, порождающих T_2^2 в $\mathfrak{sl}(3)$.

Таким образом, мы приходим к заключению, что достаточно проверить только соотношения между элементами степени не выше n по S и D вместе взятым. Если мы знаем все соотношения этого типа, то любое соотношение более высокой степени будет следовать из этих соотношений и из соотношений (4)–(9).

Чтобы найти эти соотношения, удобнее всего представить себе порождаемый базис как решетку из точек. На рис. 1 показан базис алгебры $\mathfrak{sl}(3)$, начинающийся из элементов D и S в верхнем левом углу. Под ними находится $T_1^1 = [D, S]$. Другие темные кружки – это те элементы, которые порождаются с помощью нашего алгоритма при движении только горизонтально на каждом уровне и только вертикально вдоль левого края. Светлые кружки – это точки, которые исключены в силу соотношений (4)–(9), т.е. они не представляют собой базисные элементы алгебры $\mathfrak{sl}(3)$. Теперь произвольное произведение r штук $\text{ad } D$ и s штук $\text{ad } S$, примененных к T_1^1 , соответствует пути на решетке, который начинается с T_1^1 и достигает T_{s+1}^{r+1} , но, вообще говоря, дает только матрицу, пропорциональную T_{s+1}^{r+1} , с множителем, не равным единице. Горизонтальный шаг пути описывает действие $\text{ad } D$, а вертикальный – действие $\text{ad } S$. На рис. 1 сплошной линией показан путь, которым наш алгоритм действует для порождения T_2^2 , а штриховой – альтернативный путь, т.е.

$$\text{сплошная линия} \quad \Leftrightarrow \quad \text{ad } D(\text{ad } S(\text{ad } D(S))), \quad (12)$$

$$\text{штриховая линия} \quad \Leftrightarrow \quad \text{ad } S((\text{ad } D)^2(S)). \quad (13)$$

Ясно, что любое выражение, которое нам следует изучить, можно представить как путь из T_1^1 к некоторым допустимым T_m^k , причем путь сдвигается только вправо и вниз (ср. с рис. 1). Вообще говоря, имеются $\binom{m+k-2}{k}$ путей из T_1^1 в T_m^k . Однако можно исключить некоторые из них. Алгоритм всегда использует пути, в которых сначала совершаются все вертикальные шаги, а затем все горизонтальные (в дальнейшем мы используем термин *алгоритмический путь*). Соотношение получается путем прохождения произвольного другого пути и сравнения результата с тем, что алгоритмический путь дал бы на данной вершине.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для того чтобы путь, заканчивающийся в T_s^r , давал независимое соотношение, он должен:

- а) заканчиваться вертикальным шагом, если $s < n$;
- б) заканчиваться горизонтальным шагом, если $s = n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала рассмотрим случай $s < n$. Мы знаем, что в вершине, где заканчивается последний вертикальный шаг, мы получим матрицу, пропорциональную матрице, которую здесь должен был бы дать алгоритмический путь (см. лемму 1). Таким образом, в этой вершине мы получаем соотношение. Однако если за этим следуют горизонтальные шаги, то они тривиальным образом также приведут к матрице, пропорциональной матрицам, которые дал бы алгоритмический путь. Таким образом, соотношения, которые мы можем получить из этих вершин, вытекают из соотношения, полученного в конце последнего вертикального шага.

Аналогичная аргументация имеет место в случае $s = n$, за исключением того, что последний шаг алгоритма является вертикальным, так что путь, дающий независимое соотношение, не может иметь вертикальный шаг в конце.

СЛЕДСТВИЕ. Путь, который приводит к T_s^r и дает независимое соотношение при $s < n$, должен содержать все вертикальные шаги в конце, за исключением тех, которые лежат на левом ребре решетки. При $s = n$ единственным путем, приводящим к нетривиальному соотношению, является алгоритмический путь к T_n^{r-1} , за которым выполняется горизонтальный шаг.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В качестве контрпримера для случая $s < n$ рассмотрим рис. 2. До вершины a он следует алгоритмическому пути, а затем переход к b дал бы со-

Рис. 2. Пример пути, исключаемого следствием леммы 1.

отношение. Однако дальнейшее горизонтальное продвижение после b дает только зависимые соотношения, как мы видели выше.

Согласно лемме 1 в случае $s = n$ последний шаг пути, приводящего к соотношению, должен быть горизонтальным. Поскольку прохождение горизонтального шага в n -й строке всегда дает нуль (см. (9)), нетривиальный путь может иметь только ровно один горизонтальный участок на конце. Поэтому предпоследний шаг всегда является последним шагом алгоритма, приводящего к T_n^{r-1} , и поэтому любой другой путь, ведущий к T_n^{r-1} и продолжаемый горизонтальным шагом, должен тривиально приводить к результату, пропорциональному тому, что дает алгоритмический путь,

продолжаемый горизонтальным шагом. Таким образом, полученные соотношения являются в точности соотношениями (9).

Данное следствие значительно уменьшает возможное число независимых соотношений: для любой вершины T_m^k при $m < n$ теперь может быть не более $m - 1$ независимых соотношений, к которым приводят пути, ведущие в эту вершину и заканчивающиеся не более чем $m - 1$ вертикальными шагами. Для T_n^k может быть только одно соотношение. Среди полученных таким образом соотношений все еще остаются избыточности, которые на первый взгляд кажутся неочевидными. Чтобы их обнаружить, следует применить тождество Якоби и другие соотношения, которые уже были получены. Рассмотрим в качестве примера T_2^2 в алгебре $\mathfrak{sl}(n)$ при $n \geq 3$. В T_2^2 ведут два пути, описываемых соотношениями (12) и (13). Поскольку оба они являются допустимыми в смысле доказанного выше предложения, можно подумать, что мы получим соотношение между T_2^2 , порожденным алгоритмом, и результатом другого пути. Однако

$$\mathrm{ad} D(\mathrm{ad} S(\mathrm{ad} D(S))) = \mathrm{ad} S((\mathrm{ad} D)^2(S)) + \mathrm{ad}(\mathrm{ad} D(S))(\mathrm{ad} D(S))$$

в силу тождества Якоби, а последний член имеет вид $\mathrm{ad} z(z) \equiv 0$. Поэтому два пути тривиально дают одинаковый результат, и мы не получаем соотношения. Покажем теперь, что для T_2^2 не существует других зависимостей такого типа, кроме описанной выше.

ЛЕММА 2. *Невозможно отождествить результат двух путей, ведущих к некоторому заданному T_s^r , организовав их по-другому с использованием тождества Якоби, кроме случая $r = s = 2$, где мы имеем*

$$\mathrm{ad} D(\mathrm{ad} S(\mathrm{ad} D(S))) = \mathrm{ad} S((\mathrm{ad} D)^2(S)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Любой допустимый путь в смысле леммы 1 и ее следствия имеет вид

$$T_s^r = (\mathrm{ad} S)^{s_2}((\mathrm{ad} D)^{r-1}((\mathrm{ad} S)^{s_1}(T_1^1))), \quad (14)$$

где $s_1 + s_2 = s - 1$. При $s_2 = 0$ мы получаем алгоритмический путь. Чтобы показать, что два пути дают одинаковый результат, мы применим тождество Якоби

$$\mathrm{ad}(\mathrm{ad} x(y))z = \mathrm{ad} x(\mathrm{ad} y(z)) - \mathrm{ad} y(\mathrm{ad} x(z))$$

таким образом, чтобы его левая часть стала равной нулю, т.е. приняла вид $\mathrm{ad} z(z)$. Это должно исключить одно из соотношений, производимых этими путями. Видно, что, для того чтобы это имело место для операторов x, y, z в присоединенном представлении, элемент z должен содержать столько же D и S , сколько их содержат x и y вместе взятые. Рассматривая выражение (14), которое мы хотели бы отождествить с $\mathrm{ad} x(\mathrm{ad} y(z))$, можно видеть, что если такое отождествление возможно, то $r = s$. Нам надо разбить путь (14) на два одинаковых по длине подпути с началом (включающим T_1^1) в z и концом в $\mathrm{ad} x(\mathrm{ad} y(z))$, причем каждый из подпутей содержит по $s/2$ штук D и S (для этого s должно быть четным).

В случае $r = s = 2$ получаем, что $z = T_1^1$, $x = \text{ad } S$ и $y = \text{ad } D$ удовлетворяют этим требованиям.

Пусть теперь $r = s = 2n$, $n > 1$, и пусть x, y, z удовлетворяют приведенным выше условиям. Тогда z представляет собой алгоритмический путь к $T_{s/2}^{s/2}$, а $\text{ad } x(\text{ad } y)$ имеет вид $(\text{ad } S)^{s/2}((\text{ad } D)^{s/2})$. Однако мы видим, что тогда невозможно найти такие x, y , чтобы путь $\text{ad } y((\text{ad } x)(z))$ снова был допустимым.

Важно отметить, что этот результат еще не исключает всех возможных зависимостей между соотношениями, которые дают различные допустимые пути. С помощью подходящего переупорядочения может оказаться возможным привести скобку двух элементов к виду, который при разложении по путям дает несколько допустимых путей и несколько других путей, которые проходят по уже исключенным участкам. Мы не смогли найти способа исключить все такие возможности. По-видимому, это можно сделать только с помощью компьютеров. Однако, как было отмечено выше, минимальное число может и не представлять практического интереса. Предыдущее обсуждение дает нам также верхнюю границу числа соотношений.

ТЕОРЕМА 3. *Число $R(n)$ независимых соотношений между образующими Сильвестра ограничено сверху:*

$$R(n) \leq \begin{cases} 2, & n = 2, \\ n^2 - 3, & n \geq 3. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай $n = 2$ приведен на рис. 3. Светлые кружки исклю-

Рис. 3. Решетка базисных элементов для $\mathfrak{sl}(2)$.

чаются соотношениями (4)–(9), но точка в нижнем правом углу не является независимой. Таким образом, единственные соотношения имеют вид

$$(\text{ad } D)^2(S) = 4S, \quad (\text{ad } S)^2(D) = 4D,$$

что совпадает с результатом Грозмана (10).

Случай $n \geq 3$. В качестве примера случая общего положения рассмотрим решетку с $n = 5$ (рис. 4). Получим следующие соотношения:

- 1) два соотношения для n -х степеней $\text{ad } D$ и $\text{ad } S$;
- 2) $n - 2$ соотношений, ограничивающих применение $\text{ad } D$ (самые правые светлые кружки);
- 3) $n - 2$ соотношений, ограничивающих применение $\text{ad } S$ (самые нижние светлые кружки);

Рис. 4. Решетка базисных элементов для $\mathfrak{sl}(5)$.

4) одно соотношение, соответствующее соотношению (7) (светлый кружок в нижнем правом углу);

5) $n - 3$ соотношений для вертикальных путей из первой строки во вторую;

6) $(n - 3)(n - 1)$ соотношений для вертикальных путей между второй и третьей строками, третьей и четвертой строками и так далее до $(n - 1)$ -й строки;

7) $n - 2$ соотношений для горизонтальных путей в n -й строке.

Это дает всего $n^2 - 3$ соотношений. Лемма 1 и ее следствие исключают возможность того, что одно из соотношений получается из другого применением $\text{ad } D$ или $\text{ad } S$. Лемма 2 показывает, что ни одно из соотношений не является следствием другого посредством реорганизации с использованием тождества Якоби.

Мы видим, что даже при $n = 3$ оценка завышает точное число соотношений. Однако найденное описанным выше способом число соотношений всего лишь порядка n^2 , и можно ожидать, что оно достаточно хорошо отражает истинное поведение $R(n)$, так что относительная ошибка будет уменьшаться с ростом n . Однако основным преимуществом нашего метода является то, что он дает явную *реализацию* (хотя и избыточную): все соотношения можно непосредственно получить из решеточного представления базиса алгебры $\mathfrak{sl}(n)$.

3. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ОБРАЗУЮЩИМИ СИЛЬВЕСТРА ДЛЯ $\mathfrak{gl}(n|n)$

Образующие Сильвестра можно также использовать для порождения базиса супералгебры Ли $\mathfrak{gl}(n|n)$, причем только для этой простой (с точностью до нетривиального центра) конечномерной супералгебры Ли (см. [24]). Наиболее удобно выбрать чередующийся формат базиса суперпространства, в котором мы записываем суперматрицы, т.е. если $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ является базисом этого векторного пространства, то e_{2k+1} полагаем нечетными, а e_{2k} – четными векторами для всех k . Этот формат

имеет то преимущество, что в качестве образующих Сильвестра можно использовать те же матрицы D , S , что и выше, где теперь D – четная суперматрица, а S – нечетная суперматрица. Результат, полученный ниже, остается справедливым для любого формата, но выглядит проще в выбранном нами. Чтобы иметь возможность сравнивать матрицы, полученные для случаев $\mathfrak{sl}(n)$ и $\mathfrak{gl}(n|n)$, пометим суперматрицы тильдой: $\tilde{D}$, $\tilde{S}$.

Как и выше, мы полагаем

$$\tilde{T}_1^1 = [\tilde{D}, \tilde{S}],$$

что теперь представляет собой нечетную суперматрицу, но с теми же элементами, что и в случае $\mathfrak{sl}(n)$. Аналогично

$$\tilde{T}_1^k = (\text{ad } \tilde{D})^{k-1}(\tilde{T}_1^1)$$

представляют собой нечетные суперматрицы, но выглядят так же, как и в случае $\mathfrak{sl}(n)$, и мы получаем аналог соотношения (4) в виде

$$(\text{ad } \tilde{D})^{2n}(\tilde{S}) = (1 - a)^{2n}\tilde{S}. \quad (15)$$

Будем следовать тому же алгоритму, что и для случая $\mathfrak{sl}(n)$, но теперь используя суперскобку. Положим

$$\tilde{T}_2^1 = [\tilde{S}, [\tilde{D}, \tilde{S}]] = [\tilde{S}, \tilde{T}_1^1],$$

что дает ту же матрицу, что и в случае $\mathfrak{sl}(n)$, за исключением множителя перед ней, который теперь равен $(1 - a^2)$ вместо $-(1 - a)^2$. Для $k = 1, 2, \dots, 2n$ и $m = 1, 2, \dots, 2n - 2$ имеем

$$\begin{aligned} (\text{ad } \tilde{D})^{k-1}([\tilde{D}, \tilde{S}]) &= \tilde{T}_1^k = T_1^k, \quad k = 1, 2, \dots, 2n - 1, \\ (\text{ad } \tilde{D})^{k-1}((\text{ad } S)(\tilde{T}_m^1)) &= \tilde{T}_{m+1}^k = \begin{cases} -\left(-\frac{1+a}{1-a}\right)^{(m+1)/2} T_{m+1}^k, & m \text{ нечетное,} \\ -\left(-\frac{1+a}{1-a}\right)^{m/2} T_{m+1}^k, & m \text{ четное.} \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, матрица $\tilde{T}_m^k$ пропорциональна T_m^k . Множители $(1 + a)$ возникают из-за применения антикоммутаторов. Мы получаем аналог соотношения (5) для $k = 2n + 1$ и $2 \leq m \leq 2n - 1$:

$$\begin{aligned} (\text{ad } \tilde{D})^{2n}((\text{ad } \tilde{S})^{m-1}((\text{ad } \tilde{D})(\tilde{S}))) &= \\ &= \left(-\frac{1+a}{1-a}\right)^{(m+1)/2} (1 - a^m)^{2n} (-1)^m (\text{ad } \tilde{S})^{m-1}(\text{ad } \tilde{D})(\tilde{S}). \end{aligned} \quad (16)$$

Для диагональных базисных элементов полагаем

$$\tilde{T}_n^k = \text{ad } \tilde{S}(\tilde{T}_{n-1}^k), \quad 2 \leq k \leq n,$$

и получаем следующие соотношения:

$$\text{ad } \tilde{S}(\tilde{T}_{n-1}^1) = \left(-\frac{1+a}{1-a}\right)^n (-1)^{n+1} \tilde{D}, \quad (17)$$

$$\text{ad } \tilde{S}(\tilde{T}_n^k) = \left(-\frac{1+a}{1-a}\right)^{n-1} (1 - a)(a^{2k} - 1)(1 - a^{2n-1})^{k-1} (-1)^n \tilde{T}_1^k. \quad (18)$$

Заметим, что элемент $\tilde{T}_{2n}^{2n}$ здесь не равен нулю и пропорционален единичной матрице. На любом $(n|n)$ -мерном суперпространстве единичная матрица является супербесследовой. Таким образом, в суперслучае нет соотношений, соответствующих (7).

Нам следует добавить еще одно соотношение, которого нет в не-суперслучае, – суперкоммутатор $\tilde{S}$ с самим собой:

$$[\tilde{S}, \tilde{S}] = \frac{1}{(1+a)(1-a)^{2n-1}} \tilde{T}_2^{2n}, \quad n > 1. \quad (19)$$

При $n = 1$ оно не является соотношением, а в действительности порождает новый элемент.

Рассматривая набор базисных элементов как решетку из точек, мы видим, что мы получили соотношения того же типа, что и в случае $\mathfrak{sl}(n)$, за одним исключением: имеется еще один элемент, пропорциональный единичной матрице, представленный самой правой точкой в последней строке.

С помощью явного вычисления снова можно проверить, что коммутатор $[\tilde{T}_m^k, \tilde{T}_{m'}^{k'}]$ пропорционален $\tilde{T}_{m+m'}^{k+k'}$. Это распространяет справедливость леммы 1 на суперслучай. Нахождение границы для числа соотношений снова сводится к проверке всех путей из $\tilde{T}_1^1$ к остальным $\tilde{T}_m^k$. Это проводится аналогично тому, как делалось раньше, и ясно, что наш алгоритм оперирует теми же путями, что и в случае $\mathfrak{sl}(n)$, а предложение и следствие леммы 1 применимы также и в суперслучае.

Кроме того, лемма 2 обобщается на суперслучай с использованием супертождества Якоби. Однако здесь следует проявлять осторожность ввиду особенности суперслучая: суперкоммутатор элемента с самим собой не обязательно обращается в нуль. Рассматривая, например, $\tilde{T}_2^2$, имеем

$$\text{ad } \tilde{D}(\text{ad } \tilde{S}(\text{ad } \tilde{D}(\tilde{S}))) = -\text{ad}(\text{ad } \tilde{S}(\tilde{D}))(\text{ad } \tilde{D}(\tilde{S})) - \text{ad } \tilde{S}((\text{ad } \tilde{D})^2(\tilde{S})). \quad (20)$$

Здесь первый член в правой части не обращается в нуль. Поэтому соотношение между двумя путями к $\tilde{T}_2^2$, которое мы исключили как тривиальное в случае $\mathfrak{sl}(n)$, является нетривиальным в суперслучае. За исключением этого факта, лемма 2 остается справедливой.

ТЕОРЕМА 4. Для $\mathfrak{gl}(n|n)$ число $R(n)$ независимых соотношений между образующими Сильвестра ограничено:

$$R(n) \leq \begin{cases} 4, & n = 1, \\ (2n)^2 - 1, & n > 1. \end{cases} \quad (21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай $n = 1$ отличается от случая $\mathfrak{sl}(2)$ из-за соотношения

$$[\tilde{S}, \tilde{S}] = 2 \cdot \mathbf{1},$$

где $\mathbf{1}$ – единичная матрица. Базисные элементы для $\mathfrak{gl}(1|1)$ можно представить как

Рис. 5. Решетка базисных элементов для $\mathfrak{gl}(1|1)$.

решетку (см. рис. 5). Имеются четыре соотношения:

$$\begin{aligned}
 [\tilde{D}, [\tilde{D}, \tilde{S}]] &= 4\tilde{S}, \\
 [\tilde{S}, [\tilde{D}, \tilde{S}]] &= 0, \\
 [\tilde{D}, [\tilde{S}, \tilde{S}]] &= 0, \\
 [\tilde{S}, [\tilde{S}, \tilde{S}]] &= 0.
 \end{aligned} \tag{22}$$

При $n > 1$ решетка имеет вид, показанный на рис. 6. Заметим, что теперь имеется

Рис. 6. Решетка базисных элементов для $\mathfrak{gl}(2|2)$.

еще один темный кружок в нижнем правом углу (в квадратице), который мы порождаем из точки, расположенной над ним. Это дает еще одно соотношение. Другое дополнительное соотношение получается из двух путей к $\tilde{T}_2^2$, являющихся теперь независимыми. В остальном ситуация тождественна не-суперслучаю.

Благодарности. Автор благодарен International Max Planck Research School и Tschira Foundation за финансовую поддержку и Max Planck Institute for Mathematics in the Sciences за исключительно творческую атмосферу, а Д. А. Лейтесу за постановку задачи.

Список литературы

- [1] P. Grozman, D. Leites, “Lie superalgebras of supermatrices of complex size. Their generalizations and related integrable systems”, *Complex Analysis and Related Topics*, Proc. Internatnl. Symp. (Mexico, 1996), eds. E. Ramírez de Arellano, M. Shapiro, L. Tovar, N. Vasilevski, Birkhäuser, Basel, 2000, 73–105; [math.RT/0202177](#).
- [2] P. Grozman, D. Leites, *Czech. J. Phys.*, **51**:1 (2001), 1–22; [hep-th/9702073](#).
- [3] D. Leites, E. Poletaeva, *Math. Scand.*, **81**:1 (1997), 5–19; [math.RT/0510019](#); P. Grozman, D. Leites, E. Poletaeva, *Homology, Homotopy Appl.*, **4**:2 (2002), 259–275; [math.RT/0202152](#).
- [4] P. Grozman, D. Leites, “Defining relations associated with the principal $\mathfrak{sl}(2)$ -subalgebras”, *Contemporary Mathematical Physics*, (F. A. Berezin memorial volume), Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **175**, eds. R. Dobrushin, R. Minlos, M. Shubin, A. Vershik, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996, 57–67; [math-ph/0510013](#).
- [5] D. Leites, A. Sergeev, “Orthogonal polynomials of discrete variable and Lie algebras of complex size matrices”, *Proceedings of M. Saveliev memorial conference, MPIM, Bonn, February*, 1999, MPIM-1999-36, 49–70 (<http://www.mvim-bonn.mpg.de>); Д. А. Лейтес, А. Н. Сергеев, *ТМФ*, **123**:2 (2000), 205–236; [math.RT/0509528](#).
- [6] C. Zachos, “Hamiltonian flows, $SU(\infty)$, $SO(\infty)$, $USp(\infty)$, and strings”, *Differential Geometric Methods in Theoretical Physics: Physics and Geometry*, NATO ASI Series, Ser. B, **245**, eds. L.-L. Chau, W. Nahm, Plenum, N. Y., 1990, 423–430.
- [7] J. Sylvester, *Johns Hopkins University Circulars I*, 1882, 241; *Johns Hopkins University Circulars II*, 1883, 46; *Johns Hopkins University Circulars III*, 1884, 7; *The Collected Mathematical Papers of James Joseph Sylvester*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1909.
- [8] H. Weyl, *Z. Phys.*, **46** (1927), 1–46; *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*, Dover, N.Y., 1931.
- [9] G. 't Hooft, *Nucl. Phys. B*, **138** (1978), 1–25.
- [10] D. Fairlie, P. Fletcher, C. Zachos, *Phys. Lett. B*, **218** (1989), 203–206; D. Fairlie, C. Zachos, *Phys. Lett. B*, **224** (1989), 101–107; *J. Math. Phys.*, **31** (1990), 1088–1094.
- [11] J. Moyal, *Proc. Camb. Philos. Soc.*, **45** (1949), 99–124.
- [12] J. Hoppe, *Phys. Lett. B*, **215** (1988), 706–710.
- [13] D. Fairlie, C. Zachos, *Phys. Lett. B*, **620** (2005), 195–199; [hep-th/0505053](#).
- [14] А. А. Белавин, В. Г. Дринфельд, *Функц. анализ и его прилож.*, **16**:3 (1982), 1–29.
- [15] А. А. Belavin, V. G. Drinfeld, *Triangle equations and simple Lie algebras*, *Classic Reviews in Mathematics and Mathematical Physics*, **1**, Harwood Acad. Publ., Amsterdam, 1998.
- [16] А. И. Кострикин, И. А. Кострикин, В. А. Уфнаровский, *Тр. МИАН*, **158** (1981), 105–120.
- [17] A. I. Kostrikin, Pham Huu Tiep, *Orthogonal Decompositions and Integral Lattices*, de Gruyter Expositions in Mathematics, **15**, Walter de Gruyter, Berlin, 1994.
- [18] Л. А. Феррейра, Д. И. Олив, М. В. Савельев, *ТМФ*, **102** (1995), 17–31; [hep-th/9411036](#).
- [19] Y. Buhturin, A. Molev, *Czech. J. Phys.*, **54**:11 (2004), 1159–1164.
- [20] J. Miller, P. B. Weichman, M. C. Cross, *Phys. Rev. A*, **45** (1992), 2328–2359.
- [21] C.-Y. Mou, P. B. Weichman, *Phys. Rev. E*, **52** (1995), 3738–3796.
- [22] V. Zeitlin, *Physica D*, **49** (1991), 353–362.
- [23] P. Grozman, *SuperLie*, <http://www.equaonline.com/math/SuperLie>.
- [24] Д. А. Лейтес, В. В. Серганова, *ТМФ*, **58**:1 (1984), 26–37.

Поступила в редакцию 12.12.2005