Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

У. А. Розиков, Ш. А. Шоюсупов, Меры Гиббса для модели SOS с четырьмя состояниями на дереве Кэли, *ТМФ*, 2006, том 149, номер 1, 18–31

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf3825>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 12:39:30

© 2006 г.

У. А. Розиков*, Ш. А. Шоюсупов*

МЕРЫ ГИББСА ДЛЯ МОДЕЛИ SOS С ЧЕТЫРЬМЯ СОСТОЯНИЯМИ НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ

Проведен анализ модели SOS (solid-on-solid) со значениями спина 0, 1, 2, 3 на дереве Кэли порядка $k \geq 1$. Рассмотрены трансляционно-инвариантные и периодические расщепленные меры Гиббса для этой модели. Большинство построенных нами мер Гиббса являются зеркально-симметричными.

Ключевые слова: дерево Кэли, конфигурация, мера Гиббса, периодическая мера Гиббса.

1. ВВЕДЕНИЕ

Дерево Кэли $\Gamma^k = (V, L)$ порядка $k \geq 1$ есть бесконечное дерево (граф без циклов), из каждой вершины которого выходит равно $k + 1$ ребер, V – множество вершин, L – множество ребер.

Пусть $\Phi := \{0, 1, \dots, m\}$, $m \geq 1$, и конфигурация $\sigma \in \Phi^V$, т.е. $\sigma = \{\sigma(x) \in \Phi: x \in V\}$. Рассмотрим гамильтониан

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle x, y \rangle \in L} |\sigma(x) - \sigma(y)|, \quad (1)$$

где $J \in \mathbb{R}$ и $\langle x, y \rangle$ означает соседние вершины. Модель, соответствующая (1), называется моделью SOS (solid-on-solid).

Модель SOS можно рассматривать как обобщение модели Изинга [1], которая получается при $m = 1$. Модель SOS имеет зеркальную симметрию, т.е. при замене $\sigma(x) \rightarrow m - \sigma(x)$ значение гамильтониана не меняется.

В работе [2] для модели SOS на $\mathbb{Z}^d$ доказано, что существует $T_0 > 0$ такое, что при $T < T_0$ структура термодинамических фаз определяется через доминирующие основные состояния модели SOS: для четных m мера Гиббса (МГ) единственна, для нечетных m существуют две периодические МГ.

Модель SOS на дереве Кэли рассмотрена в работе [3], где при $m = 2$ найдена критическая температура T_c такая, что при $T < T_c$ для этой модели существуют три различные трансляционно-инвариантные расщепленные МГ (ТИРМГ). Также

*Институт математики АН РУз, Ташкент, Узбекистан. E-mail: rozikovu@yandex.ru, shokir79@mail.ru

в этой работе дано полное описание периодических МГ (ПМГ). Заметим, что при $m = 2$ модель SOS совпадает с моделью Блума–Капела [4].

В работе [5] для модели SOS, используя контурный метод на дереве Кэли, мы доказали, что при достаточно низких температурах существует $m+1$ различных МГ.

В настоящей работе мы изучаем модель SOS при $m = 3$, которая отличается от модели Блума–Капела. Результаты этой работы дополняют результат работы [5]: мы получим точное значение для критической температуры при $m = 3$. Кроме того, мы рассмотрим периодические и непериодические МГ. Поскольку в случае $\mathbb{Z}^d$ число трансляционно-инвариантных мер (ТИМ) зависит от четности m , результаты данной работы дают возможность сравнить числа ТИРМГ для m разной четности: в работе [3] рассмотрен случай $m = 2$, а в нашем случае $m = 3$.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

2.1. Дерево Кэли. Известно, что дерево Кэли G^k можно представить как свободное произведение $k + 1$ циклических групп второго порядка (см., например, [6]). Обозначим эту группу как G_k . Две вершины $x, y \in V$ называются соседними, если они представляют собой концевые точки некоторого ребра $l \in L$, и в этом случае мы будем писать $l = \langle x, y \rangle$.

Расстояние $d(x, y)$, $x, y \in V$, на дереве Кэли вводится следующим образом: $d(x, y) = d$, если d есть минимальное значение, при котором найдутся вершины $x = x_0, x_1, \dots, x_{d-1}, x_d = y$ такие, что $\langle x_0, x_1 \rangle, \dots, \langle x_{d-1}, x_d \rangle$ – соседи. Последовательность $\pi = \{x = x_0, x_1, \dots, x_{d-1}, x_d = y\} \subset V$, реализующая указанный минимум, называется *путем* из x в y . Положим $W_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) = n\}$, $V_n = \bigcup_{m=0}^n W_m$, где вершина $x^0 \in V$ фиксирована.

2.2. Пространство конфигурации и модель. Пусть спин принимает значения из множества $\Phi := \{0, 1, 2, 3\}$. Конфигурация σ на $A \subseteq V$ определяется как функция $x \in A \mapsto \sigma_A(x) \in \Phi$; множество всех конфигураций совпадает с $\Omega_A = \Phi^A$. Положим $\Omega = \Omega_V$ и $\sigma = \sigma_V$.

Периодическая конфигурация определяется как конфигурация $\sigma \in \Omega$, которая инвариантна относительно некоторой подгруппы $G_k^* \subset G_k$, другими словами, конфигурация $\sigma \in \Omega$ называется периодической, если $\sigma(yx) = \sigma(x)$ для любых $x \in G_k$ и $y \in G_k^*$. Для данной периодической конфигурации индекс подгруппы называется периодом конфигурации. Конфигурация, инвариантная относительно всех сдвигов на дереве, называется трансляционно-инвариантной. Гамильтониан $H: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ модели SOS определяется по формуле (1).

2.3. Мера Гиббса. Рассмотрим стандартную σ -алгебру $\mathcal{B}$ подмножеств Ω , порожденных цилиндрическими подмножествами, и вероятностные меры на $(\Omega, \mathcal{B})$. Вероятностная мера μ называется МГ с гамильтонианом H , если выполняется условие Добрушина–Лэнфорда–Рюэлла

$$\mu(\{\sigma \in \Omega: \sigma_{V_n} = \sigma_n\}) = \int_{\Omega} \mu(d\omega) \nu_{\omega_{W_{n+1}}}^{V_n}(\sigma_n),$$

где $\nu_{\omega_{W_{n+1}}}^{V_n}$ – условная вероятность:

$$\nu_{\omega_{W_{n+1}}}^{V_n}(\sigma_n) = \frac{1}{Z_n(\omega_{W_{n+1}})} \exp(-\beta H(\sigma_n | \omega_{W_{n+1}})).$$

Здесь

$$\begin{aligned} H(\sigma_n | \omega_{W_{n+1}}) &= -J \sum_{\substack{\langle x,y \rangle \in L \\ x,y \in V_n}} |\sigma_n(x) - \sigma_n(y)| - J \sum_{\substack{\langle x,y \rangle \in L \\ x \in V_n, y \in W_{n+1}}} |\sigma_n(x) - \omega(y)|, \\ Z_n(\omega_{W_{n+1}}) &= \sum_{\tilde{\sigma}_n \in \Omega_{V_n}} \exp(-\beta H(\tilde{\sigma}_n | \omega_{W_{n+1}})). \end{aligned}$$

Так как взаимодействуют только соседние вершины, МГ удовлетворяет свойству Маркова: если дана конфигурация ω_{W_n} , то конфигурации в V_{n-1} , т.е. внутри W_n , и в $V \setminus V_{n+1}$, т.е. вне W_n , являются (условно) независимыми.

Известно, что для любого $\beta > 0$ множество всех МГ образует непустое выпуклое компактное подмножество в пространстве всех вероятностных мер (см., например, [1], [7]).

Мы используем стандартное определение ТИМ (см., например, [7], [8]) и называем μ зеркально-симметричной мерой (ЗСМ), если значение этой меры сохраняется при одновременной замене $\sigma(x) \rightarrow m - \sigma(x)$ на каждой вершине $x \in V$.

2.4. Условия согласования. Зафиксируем $x^0 \in V$. Для $x, y \in V$ будем писать $x < y$, если путь от x^0 до y проходит через x . Вершина y называется прямым потомком x , если $y > x$ и x, y являются соседями. Через $S(x)$ обозначим множество прямых потомков x . Заметим, что в Γ_k всякая вершина $x \neq x^0$ имеет k прямых потомков, и x^0 имеет $k+1$ потомков.

Рассмотрим особый класс МГ, которые в работе [1] называются марковскими цепями, а в работе [3] – расщепленными МГ (РМГ).

Пусть $h: x \mapsto h_x = (h_{0,x}, h_{1,x}, \dots, h_{m,x}) \in \mathbb{R}^{m+1}$ – вектор-функция от $x \in V \setminus \{x^0\}$. Рассмотрим вероятностное распределение $\mu^{(n)}$ на Ω_{V_n} :

$$\mu^{(n)}(\sigma_n) = Z_n^{-1} \exp\left(-\beta H(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} h_{\sigma(x), x}\right), \quad (2)$$

где $\sigma_n \in \Omega_{V_n}$,

$$Z_n = \sum_{\tilde{\sigma}_n \in \Omega_{V_n}} \exp\left(-\beta H(\tilde{\sigma}_n) + \sum_{x \in W_n} h_{\tilde{\sigma}(x), x}\right).$$

Говорят, что вероятностное распределение $\mu^{(n)}$ согласовано, если для любых $n \geq 1$ и $\sigma_{n-1} \in \Omega_{V_{n-1}}$

$$\sum_{\omega_n \in \Omega_{W_n}} \mu^{(n)}(\sigma_{n-1} \cup \omega_n) = \mu^{(n-1)}(\sigma_{n-1}), \quad (3)$$

где $\sigma_{n-1} \cup \omega_n \in \Omega_{V_n}$.

В этом случае существует единственная мера μ на Ω такая, что $\mu(\{\sigma_{V_n} = \sigma_n\}) = \mu^{(n)}(\sigma_n)$ для всех n и $\sigma_n \in \Omega_{V_n}$. Такая мера называется РГМ, соответствующей гамильтониану H и функции $x \mapsto h_x$, $x \neq x^0$.

Следующее предложение дает условие на h_x , гарантирующее согласованность распределения $\mu^{(n)}(\sigma_n)$.

ТЕОРЕМА 1 [3]. *Вероятностное распределение $\mu^{(n)}(\sigma_n)$, $n = 1, 2, \dots$, заданное формулой (2), согласовано тогда и только тогда, когда для любого $x \in V \setminus \{x^0\}$ имеет место следующее уравнение:*

$$h_x^* = \sum_{y \in S(x)} F(h_y^*, m, \theta), \quad (4)$$

где $\theta = e^{J\beta}$, $\beta = 1/T$. Здесь $h_x^* = (h_{0,x} - h_{m,x}, h_{1,x} - h_{m,x}, \dots, h_{m-1,x} - h_{m,x})$ и $F(\cdot, m, \theta): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ – вектор-функция, т.е.

$$F(h, m, \theta) = (F_0(h, m, \theta), \dots, F_{m-1}(h, m, \theta)), \quad h = (h_0, h_1, \dots, h_{m-1}),$$

такая, что

$$F_i(h, m, \theta) = \ln \frac{\sum_{j=0}^{m-1} \theta^{|i-j|} e^{h_j} + \theta^{m-i}}{\sum_{j=0}^{m-1} \theta^{m-j} e^{h_j} + 1}, \quad i = 0, \dots, m-1. \quad (5)$$

3. ТРАНСЛЯЦИОННО-ИНВАРИАНТНЫЕ МЕРЫ

Из теоремы 1 вытекает, что для любого $h = \{h_x, x \in V\}$, удовлетворяющего (4), существует единственная МГ μ (с сужением $\mu^{(n)}$, заданным формулой (2)), и наоборот. Однако анализ решения уравнения (4) для произвольного m является нелегкой задачей.

В работе [3] проанализирован случай $m = 2$, мы предположим, что $m = 3$, т.е. $\Phi := \{0, 1, 2, 3\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Поскольку в случае модели SOS на $\mathbb{Z}^d$ число ТИМ зависит от четности m , то естественно возникает вопрос: как число ТИМ будет зависеть от четности m в случае модели SOS на дереве Кэли. В работе [3] рассмотрен случай четного $m = 2$, а в нашем случае $m = 3$, таким образом, результаты данной работы позволяют сравнить число ТИМ на дереве Кэли при различных значениях m .

Пусть $h_{3,x} \equiv 0$ для любого $x \in V$. При $m = 3$ из (4), (5) получим

$$\begin{aligned} h_{0,x} &= \sum_{y \in S(x)} \ln \frac{e^{h_{0,y}} + \theta e^{h_{1,y}} + \theta^2 e^{h_{2,y}} + \theta^3}{\theta^3 e^{h_{0,y}} + \theta^2 e^{h_{1,y}} + \theta e^{h_{2,y}} + 1}, \\ h_{1,x} &= \sum_{y \in S(x)} \ln \frac{\theta e^{h_{0,y}} + e^{h_{1,y}} + \theta e^{h_{2,y}} + \theta^2}{\theta^3 e^{h_{0,y}} + \theta^2 e^{h_{1,y}} + \theta e^{h_{2,y}} + 1}, \\ h_{2,x} &= \sum_{y \in S(x)} \ln \frac{\theta^2 e^{h_{0,y}} + \theta e^{h_{1,y}} + e^{h_{2,y}} + \theta}{\theta^3 e^{h_{0,y}} + \theta^2 e^{h_{1,y}} + \theta e^{h_{2,y}} + 1}. \end{aligned} \quad (6)$$

Естественно начать с трансляционно-инвариантного решения (6), т.е. считать, что $h_x = h \in \mathbb{R}^3$. Положим $z_i = e^{h_{i,x}} = e^{h_i}$, $i = 0, 1, 2$, и $z_3 = 1$ для любого $x \in V$. Из (6) мы имеем

$$z_0 = \left(\frac{z_0 + \theta z_1 + \theta^2 z_2 + \theta^3}{\theta^3 z_0 + \theta^2 z_1 + \theta z_2 + 1} \right)^k, \quad (7a)$$

$$z_1 = \left(\frac{\theta z_0 + z_1 + \theta z_2 + \theta^2}{\theta^3 z_0 + \theta^2 z_1 + \theta z_2 + 1} \right)^k, \quad (7b)$$

$$z_2 = \left(\frac{\theta^2 z_0 + \theta z_1 + z_2 + \theta}{\theta^3 z_0 + \theta^2 z_1 + \theta z_2 + 1} \right)^k. \quad (7b)$$

Заметим, что $z_0 = 1$, $z_1 = z_2 = z$ удовлетворяют уравнению (7a) независимо от k, θ . Подставляя $z_0 = 1$, $z_1 = z_2 = z$ в (7b) и (7b), получим

$$z = \left(\frac{\theta^2 + (\theta + 1)z + \theta}{\theta^3 + (\theta^2 + \theta)z + 1} \right)^k. \quad (8)$$

Введем обозначения

$$a = \theta^{k+1}, \quad b = \frac{1 - \theta + \theta^2}{\theta^2}, \quad x = \frac{z}{\theta}. \quad (9)$$

ЛЕММА 1 (Ср. с леммой 10.7 в [1]). Уравнение (8) при условиях $x > 0$, $k \geq 1$, $a, b > 0$ имеет единственное решение, если $k = 1$ или $b \leq \left(\frac{k+1}{k-1}\right)^2$. Если $k > 1$ и $b > \left(\frac{k+1}{k-1}\right)^2$, то существуют $\nu_1(b, k)$, $\nu_2(b, k)$, удовлетворяющие условиям $0 < \nu_1(b, k) < \nu_2(b, k)$, такие, что уравнение имеет три решения, если $\nu_1(b, k) < a < \nu_2(b, k)$, и имеет два решения, если $a = \nu_1(b, k)$ или $a = \nu_2(b, k)$. При этом

$$\nu_i(b, k) = \frac{1}{x_i} \left(\frac{1 + x_i}{b + x_i} \right)^k,$$

где x_1, x_2 – решения уравнения $x^2 + [2 - (b - 1)(k - 1)]x + b = 0$.

ЛЕММА 2. Если $J \geq 0$, то система (7) имеет единственное решение $(1, z_*, z_*)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A = z_0 + \theta z_1 + \theta^2 z_2 + \theta^3$, $B = \theta^3 z_0 + \theta^2 z_1 + \theta z_2 + 1$, $A_1 = \theta z_0 + z_1 + \theta z_2 + \theta^2$, $B_1 = \theta^2 z_0 + \theta z_1 + z_2 + \theta$. Из (7) имеем

$$\begin{aligned} [(1 - \theta^3)T - 1](z_0 - 1) + (\theta - \theta^2)T(z_1 - z_2) &= 0, \\ (\theta - \theta^2)T_1(z_0 - 1) + [(1 - \theta)T_1 - 1](z_1 - z_2) &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где $T = (A^{k-1} + \dots + B^{k-1})/B^k > 0$ и $T_1 = (A_1^{k-1} + \dots + B_1^{k-1})/B^k > 0$.

Заметим, что при $\theta \geq 1$ ($J \geq 0$) детерминант однородной системы (10) положителен, $\Delta = (\theta - 1)[(\theta^2 - 1)TT_1 + (1 + \theta + \theta^2)T + T_1] + 1 > 0$. Следовательно, система (10) имеет единственное решение $z_0 = 1$, $z_1 = z_2$.

Таким образом, доказано, что при $J \geq 0$ система (7) имеет только решения вида $(1, z, z)$. Так как $b = \frac{1 - \theta + \theta^2}{\theta^2} \leq 1 < \left(\frac{k+1}{k-1}\right)^2$, то в силу леммы 1 система (7) имеет единственное решение вида $(1, z_*, z_*)$. Лемма доказана.

При $\theta \neq 1$ из системы (10) получим

СЛЕДСТВИЕ. $z_0 = 1$ тогда и только тогда, когда $z_1 = z_2$.

Пусть

$$\beta_c = \frac{1}{J} \ln \frac{2(k-1)}{k-1 + \sqrt{k^2 + 14k + 1}}.$$

ЛЕММА 3. Если $J < 0$, то для $\beta \leq \beta_c$ система уравнений (7) имеет единственное решение вида $z^* = (1, z_*, z_*)$ (т.е. $z_0 = 1$), а для $\beta > \beta_c$ — точно три решения, $z_-^* = (1, z_{1,-}^*, z_{1,-}^*)$, $z_0^* = (1, z_{1,0}^*, z_{1,0}^*)$, $z_+^* = (1, z_{1,+}^*, z_{1,+}^*)$, причем $0 < z_{1,-}^* < z_{1,0}^* < z_{1,+}^*$ и $z_{1,i}^* = e^{h_{1,i}^*}$, $i = -, 0, +$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Значение β_c есть решение уравнения $b = (\frac{k+1}{k-1})^2$. Другие утверждения леммы 3 следуют из леммы 1.

Заметим, что z^*, z_-^*, z_0^*, z_+^* дают зеркально-симметричное решение системы (7). Следовательно, верна

ТЕОРЕМА 2. Для модели SOS при $J > 0$ и $m = 3$ зеркально-симметричная трансляционно-инвариантная расщепленная мера Гиббса (ЗСТИРМГ) существует и единственна для любого $\beta > 0$. При $J < 0$ и $m = 3$, если $k \geq 2$ и $0 < \beta \leq \beta_c$, то существует единственная ЗСТИРМГ μ^* ; если $k \geq 2$ и $\beta > \beta_c$, то существуют три ЗСТИРМГ $\mu_-^*, \mu_0^*, \mu_+^*$, соответствующие $h_i^* = \ln z_i^*$, $i = -, 0, +$.

Следующая лемма дает полезное свойство решения $h_x = (h_{0,x}, h_{1,x}, h_{2,x})$ системы (6) при $h_{0,x} \equiv 0$, $h_{1,x} = h_{2,x}$.

ЛЕММА 4. Для $J < 0$, $k \geq 2$ и $\beta > \beta_c$, если $h_x = (0, h_{1,x}, h_{1,x})$ является решением системы (6), то для любого $x \in V$

$$z_{1,-}^* \leq z_{1,x} \leq z_{1,+}^*, \quad (11)$$

где $z_{1,x} = e^{h_{1,x}}$ и $z_-^* < z_{1,+}^*$ определены в лемме 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $z_x = z_{1,x}$. Из (6) имеем

$$z_x = \prod_{i=1}^k \frac{\theta + z_{x_i}}{1 - \theta + \theta^2 + \theta z_{x_i}}, \quad z_{x_j} > 0, \quad j = \overline{1, k},$$

где x_j , $j = \overline{1, k}$, — прямые потомки точки $x \in V$.

Пусть $\varphi(x, \theta) = (\theta + x)/(1 - \theta + \theta^2 + \theta x)$, $\psi(x, \theta, k) = (\varphi(x, \theta))^k$,

$$G(u_1, \dots, u_k) = \prod_{i=1}^k \varphi(u_i, \theta), \quad u_j > 0, \quad j = \overline{1, k}.$$

Заметим, что $\psi(0, \theta, k) \leq G(u_1, \dots, u_k) \leq \psi(\infty, \theta, k)$.

Таким образом, для z_x имеем $\psi(0, \theta, k) \leq z_x \leq \psi(\infty, \theta, k)$. Теперь рассмотрим функцию $G(u_1, \dots, u_k)$ при $\psi(0, \theta, k) \leq u_j \leq \psi(\infty, \theta, k)$. Тогда аналогичным образом имеем

$$\psi(\psi(0, \theta, k), \theta, k) \leq z_x \leq \psi(\psi(\infty, \theta, k), \theta, k).$$

Итерируя эту процедуру, на n -м шаге получим

$$\psi^{(n)}(0, \theta, k) \leq z_x \leq \psi^{(n)}(\infty, \theta, k)$$

для любого $n \geq 1$ и $x \in V \setminus \{x^0\}$. Последовательность $\psi^{(n)}(\infty, \theta, k)$, $n = 1, 2, \dots$, убывает и ограничена снизу величиной $z_{1,+}^*$. Предел этой последовательности есть неподвижная точка для ψ , следовательно, совпадает с $z_{1,+}^*$. Оценка $z_{1,z}$ снизу в (11) получается аналогичным образом. Лемма доказана.

ЛЕММА 5. Для $J < 0$ и $\beta \leq \beta_c$ мера μ^* является единственной ЗСРМГ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В условиях леммы $z_{1,-}^* = z_{1,+}^* = z_1^*$, из (11) получаем, что $h_x = (0, z_1^*, z_1^*)$ – единственное решение. Лемма доказана.

4. ПОЛНОЕ ОПИСАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РМГ

Пусть G_k – групповое представление Γ^k (см. п. 2.1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $\widehat{G}_k$ – подгруппа группы G_k . Совокупность векторов $h = \{h_x : x \in G_k\}$ назовем $\widehat{G}_k$ -периодической, если $h_x = h_{yx}$ для любых $x \in G_k$ и $y \in \widehat{G}_k$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Мету, соответствующую $\widehat{G}_k$ -периодической совокупности векторов, назовем $\widehat{G}_k$ -периодической; G_k -периодическая мера называется трансляционно-инвариантной.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Используя взаимно-однозначное соответствие между множеством вершин V дерева Кэли и элементами группы G_k , в терминах самого дерева Кэли меру μ можно назвать $\widehat{G}_k$ -периодической, если значение этой меры сохраняется при сдвиге $x \rightarrow yx$ (на дереве Кэли) для любых $x \in G_k$, $y \in \widehat{G}_k$. Заметим, что определение сдвига на дереве Кэли с помощью группового представления дерева Кэли является естественным.

В этом разделе мы описываем РМГ, периодические относительно любого нормального делителя конечного индекса.

Пусть K – нормальный делитель индекса r группы G_k , введем также обозначение $G_k/K = \{K_0, K_1, \dots, K_{r-1}\}$, $K_0 = K$, для факторгруппы.

Положим

$$q_i(x) = |S(x) \cap K_i|, \quad i = 0, 1, \dots, r-1; \quad N(x) = |\{j : q_j(x) \neq 0\}|,$$

где $|\cdot|$ – число элементов множества. Пусть

$$Q(x) = (q_0(x), q_1(x), \dots, q_{r-1}(x)).$$

Заметим, что для любого $x \in G_k$ существует перестановка π_x координат вектора $Q(x)$ такая, что

$$\pi_x Q(e) = Q(x), \tag{12}$$

где $e \in G_k$ – единичный элемент [10]. Из равенства (12) следует, что $N(x) = N(e)$ для любого $x \in G_k$; K -периодическая совокупность векторов имеет следующий вид:

$$\{h_x = h_i \in \mathbb{R}^3, \text{ если } x \in K_i, i = 0, 1, \dots, r-1\}.$$

В силу (6) и равенства (12) векторы h_i , $i = 0, 1, \dots, r-1$, удовлетворяют системе уравнений

$$h_m = \sum_{j=1}^{N(e)} q_{ij}(e) F(h_{\pi_m(i_j)}; \theta) - F(h_{\pi_m(i_j)}; \theta), \quad (13)$$

где $m = \overline{0, r-1}$, $j_0 = \overline{1, N(e)}$, $N(e) = |\{i_1, i_2, \dots, i_{N(e)}\}|$.

Пусть функция $F: R^4 \rightarrow R^4$, $F(h, \theta) = (F_0(h, \theta), F_1(h, \theta), F_2(h, \theta))$, задается равенствами

$$\begin{aligned} F_0(h, \theta) &= \ln \frac{e^{h_0} + \theta e^{h_1} + \theta^2 e^{h_2} + \theta^3}{\theta^3 e^{h_0} + \theta^2 e^{h_1} + \theta e^{h_2} + 1}, \\ F_1(h, \theta) &= \ln \frac{\theta e^{h_0} + e^{h_1} + \theta e^{h_2} + \theta^2}{\theta^3 e^{h_0} + \theta^2 e^{h_1} + \theta e^{h_2} + 1}, \\ F_2(h, \theta) &= \ln \frac{\theta^2 e^{h_0} + \theta e^{h_1} + e^{h_2} + \theta}{\theta^3 e^{h_0} + \theta^2 e^{h_1} + \theta e^{h_2} + 1}. \end{aligned} \quad (14)$$

ЛЕММА 6. Если $\theta \neq 1$, то $F(h, \theta) = F(l, \theta)$ тогда и только тогда, когда $h = l$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $F(h, \theta) = F(l, \theta)$, тогда

$$\begin{aligned} &[1 + \theta^2 + \theta^4 + \theta^2 t_1 + \theta(1 + \theta^2) t_2](z_0 - t_0) + \\ &+ [\theta^2(t_2 - t_0) + \theta(1 + \theta^2)](z_1 - t_1) + \theta[\theta - (1 + \theta^2)t_0 - \theta t_1](z_2 - t_2) = 0, \\ &[\theta^2 t_2 + \theta(1 + \theta^2)](z_0 - t_0) + [1 + \theta^2 + \theta t_2](z_1 - t_1) + \theta[1 - t_1 - \theta t_2](z_2 - t_2) = 0, \\ &\theta^2(z_0 - t_0) + \theta(z_1 - t_1) + (z_2 - t_2) = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

где $z_i = e^{h_i}$, $t_i = e^{l_i}$, $i = 0, 1, 2$. Заметим, что детерминант однородной системы (15) положителен при $\theta \neq 1$, $\Delta = (1 + \theta^3 t_0 + \theta^2 t_1 + \theta t_2)^2 > 0$. Следовательно, (15) имеет единственное решение $z_i = t_i$, $i = 0, 1, 2$.

Достаточность очевидна. Лемма доказана.

Пусть $G_k^{(2)}$ – подгруппа группы G_k , состоящая из слов четной длины. Очевидно, что $G_k^{(2)}$ является подгруппой индекса два.

ТЕОРЕМА 3. Для любого нормального делителя конечного индекса K всякая K -периодическая МГ совпадает либо с ТИМ, либо с $G_k^{(2)}$ -периодической мерой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя (13), получим

$$F(h_{\pi(i_1)}, \theta) = F(h_{\pi(i_2)}, \theta) = \dots = F(h_{\pi(i_{N(e)})}, \theta).$$

Отсюда в силу леммы 6 имеем

$$h_{\pi_m(i_1)} = h_{\pi_m(i_2)} = \dots = h_{\pi_m(i_{N(e)})}.$$

Следовательно, $h_x = h_y = h_1$, если $x, y \in S_1(z)$, $z \in G_k^{(2)}$; $h_x = h_y = h_2$, если $x, y \in S_1(z)$, $z \in G_k \setminus G_k^{(2)}$, где $S_1(x) = \{y \in V: \langle x, y \rangle\}$. Таким образом, если $h_1 = h_2$, то h_x – постоянная функция; если $h_1 \neq h_2$, то функция h_x является $G_k^{(2)}$ -периодической. Теорема доказана.

Пусть K – нормальный делитель конечного индекса группы G_k . Возникает вопрос, при каком условии на K всякая K -периодическая мера Гиббса является ТИМ? Пусть $I(K) = K \cap \{a_1, \dots, a_{k+1}\}$.

ТЕОРЕМА 4. *Если $I(K) \neq \emptyset$, то всякая K -периодическая МГ для модели SOS является ТИМ.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $x \in K$, то для того чтобы $xa_i \in K$, необходимо и достаточно, чтобы $a_i \in K$. Так как $I(K) \neq \emptyset$, то существует $a_i \in K$. Следовательно, K содержит подмножество $Ka_i = \{xa_i: x \in K\}$. В силу теоремы 3 имеем $h_x = h_1$ и $h_{xa_i} = h_2$. Поскольку x и xa_i принадлежат классу K , то $h_x = h_{xa_i} = h_1 = h_2$. Теорема доказана.

В силу теорем 3, 4 задача описания K -периодических МГ при $I(K) \neq \emptyset$ сводится к описанию неподвижных точек отображения

$$h = kF(h; \theta), \quad (16)$$

а при $I(K) = \emptyset$ сводится к описанию решения системы

$$\begin{aligned} h &= kF(l; \theta), \\ l &= kF(h; \theta). \end{aligned} \quad (17)$$

Заметим, что отображение (16) описывает ТИМ (см. (7)). Система (17) описывает периодические меры с периодом два, точнее, $G_k^{(2)}$ -периодические меры.

Из (17) получим

$$\begin{aligned} z_0 &= \left(\frac{t_0 + \theta t_1 + \theta^2 t_2 + \theta^3}{\theta^3 t_0 + \theta^2 t_1 + \theta t_2 + 1} \right)^k, \\ z_1 &= \left(\frac{\theta t_0 + t_1 + \theta t_2 + \theta^2}{\theta^3 t_0 + \theta^2 t_1 + \theta t_2 + 1} \right)^k, \\ z_2 &= \left(\frac{\theta^2 t_0 + \theta t_1 + t_2 + \theta}{\theta^3 t_0 + \theta^2 t_1 + \theta t_2 + 1} \right)^k, \\ t_0 &= \left(\frac{z_0 + \theta z_1 + \theta^2 z_2 + \theta^3}{\theta^3 z_0 + \theta^2 z_1 + \theta z_2 + 1} \right)^k, \\ t_1 &= \left(\frac{\theta z_0 + z_1 + \theta z_2 + \theta^2}{\theta^3 z_0 + \theta^2 z_1 + \theta z_2 + 1} \right)^k, \\ t_2 &= \left(\frac{\theta^2 z_0 + \theta z_1 + z_2 + \theta}{\theta^3 z_0 + \theta^2 z_1 + \theta z_2 + 1} \right)^k. \end{aligned} \quad (18)$$

ЛЕММА 7. *Для $J < 0$ ($\theta < 1$) система (18) верна только при $z_i = t_i$, $i = 0, 1, 2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u_i = z_i^{1/k}$, $v_i = t_i^{1/k}$, $i = 0, 1, 2$. Тогда из (18) получим

$$\begin{aligned}
 & [A + B_0(1 + \theta^2 + \theta^4 + \theta^2 u_1^k + \theta(1 + \theta^2)u_2^k)](u_0 - v_0) + \\
 & + [B_1(\theta^2(u_2^k - u_0^k) + \theta^3 + \theta)](u_1 - v_1) + \\
 & + [B_2(\theta^2 - (\theta^3 + \theta)u_0^k - \theta^2 u_1^k)](u_2 - v_2) = 0, \\
 & [B_0(\theta^2 u_2^k + \theta^3 + \theta)](u_0 - v_0) + [A + B_1(\theta u_2^k + \theta^2 + 1)](u_1 - v_1) + \\
 & + [B_2(\theta - \theta u_1^k - \theta^2 u_0^k)](u_2 - v_2) = 0, \\
 & \theta^2 B_0(u_0 - v_0) + \theta B_1(u_1 - v_1) + (A + B_2)(u_2 - v_2) = 0,
 \end{aligned} \tag{19}$$

где

$$\begin{aligned}
 A &= (\theta^3 v_0^k + \theta^2 v_1^k + \theta v_2^k + 1)(\theta^3 u_0^k + \theta^2 u_1^k + \theta u_2^k + 1)(1 - \theta^2)^{-1} > 0, \\
 B_i &= u_i^{k-1} + \dots + v_i^{k-1} > 0, \quad i = 0, 1, 2.
 \end{aligned}$$

Нетрудный, но достаточно громоздкий анализ показывает, что детерминант системы (19) положителен, следовательно, $z_i = t_i$, $i = 0, 1, 2$. Лемма доказана.

Теперь рассмотрим антиферромагнитный случай $J > 0$ ($\theta > 1$). В этом случае в силу леммы 2 система (18) имеет единственное решение $(1, z_1^*, z_1^*, 1, t_1^*, t_1^*)$.

Пусть $z_0 = t_0 = 1$, $z_1 = z_2 = z$, $t_1 = t_2 = t$, тогда из (18) имеем

$$\begin{aligned}
 z &= \left(\frac{\theta + t}{1 - \theta + \theta^2 + \theta t} \right)^k, \\
 t &= \left(\frac{\theta + z}{1 - \theta + \theta^2 + \theta z} \right)^k.
 \end{aligned} \tag{20}$$

ЛЕММА 8. Пусть (z_*, z_*) – решение системы (20). Если

$$\frac{k z_*(\theta - 1)}{(\theta + z_*)(1 - \theta + \theta^2 + \theta z_*)} > 1, \tag{21}$$

то система (10) имеет три решения (z_-^*, z_+^*) , (z_*, z_*) , (z_+^*, z_-^*) , где $z_-^* = \psi(z_+^*, \theta, k)$

$$\psi(x, \theta, k) = \left(\frac{\theta + x}{1 - \theta + \theta^2 + \theta x} \right)^k.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если справедливо неравенство (21), то решение z_* – неустойчивая точка для ψ . Для любого $z \geq 1$ итерации $\psi^{(2n)}(z, \theta, k) > z_*$ монотонно убывают, следовательно, существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi^{(2n)}(z, \theta, k) = z_+^* \geq z_*$, который является решением уравнения

$$z = \psi(\psi(z, \theta, k), \theta, k). \tag{22}$$

Так как z_-^* – неустойчивая точка, $z_+^* > z_*$. Аналогично $z_-^* = \psi(z_+^*, \theta, k) < z_*$, что также является решением (22). Лемма доказана.

Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 5. Для модели SOS при $m = 3$ на дереве Кэли относительно любого нормального делителя конечного индекса K справедливы следующие утверждения:

- 1) в ферромагнитном случае ($J < 0$) и при $J = 0$ K -периодическая МГ совпадает с ТИМГ;
- 2) в антиферромагнитном случае ($J > 0$):
 - а) если $I(K) \neq \emptyset$, то K -периодическая МГ совпадает с ТИМГ;
 - б) если выполнено неравенство (21) и $I(K) = \emptyset$, то существуют три K -периодические МГ μ_{12} , μ_* , μ_{21} .

При этом μ_* есть ТИМ, а μ_{12} и μ_{21} – периодические меры с периодом два, т.е. $G_k^{(2)}$ -периодические меры.

5. НЕПЕРИОДИЧЕСКИЕ РМГ

В этом разделе мы рассмотрим случай $J < 0$, $m = 3$, $\beta > \beta_c$. Используя μ_i^* , $i = -, 0, +$, покажем, что система (6) имеет несчетное число непериодических решений.

Пусть дан бесконечный путь $\pi = \{x^0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots\}$ на дереве Кэли Γ^k . Этому пути стандартным образом [11], [12] можно поставить в соответствие $t \in [0, 1]$. Пусть $\pi_1 = \{x_0, x_1, \dots\}$ и $\pi_2 = \{y_0, y_1, \dots\}$ – два бесконечных пути с $x_0 = y_0 = x^0$. Мы отображаем пару (π_1, π_2) в вектор-функцию $h^{\pi_1 \pi_2} : x \in V \mapsto h_x^{\pi_1 \pi_2}$, удовлетворяющую (6).

Пути π_1 и π_2 разбивают Γ^k на три подграфа Γ_1^k , Γ_2^k , Γ_3^k , если $\pi_1 \neq \pi_2$, и на два подграфа Γ_1^k , Γ_3^k , если $\pi_1 = \pi_2$.

Вектор-функция $h^{\pi_1 \pi_2}$ задается следующим образом:

$$h_x^{\pi_1 \pi_2} = \begin{cases} h_-^*, & \text{если } x \in \Gamma_1^k, \\ h_0^*, & \text{если } x \in \Gamma_2^k, \\ h_+^*, & \text{если } x \in \Gamma_3^k, \end{cases} \quad (23)$$

векторы $h_i^* = (0, \ln z_{1,i}^*, \ln z_{1,i}^*)$, $i = -, 0, +$, определяются решениями системы (7).

Пусть $h = (h_0, h_1, h_2) \in \mathbb{R}^3$,

$$\|h\| = \max\{|h_0|, |h_1|, |h_2|\},$$

функция $h \mapsto F(h)$ определена равенствами (14). Введем обозначение

$$f(x, y, z) \equiv f(x, y, z, a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4) = \ln \frac{a_1 e^x + a_2 e^y + a_3 e^z + a_4}{b_1 e^x + b_2 e^y + b_3 e^z + b_4}, \quad (24)$$

где

$$a_i \geq 0, \quad b_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad a_1 + a_2 + a_3 + a_4 > 0, \quad b_1 + b_2 + b_3 + b_4 > 0. \quad (25)$$

ЛЕММА 9. *Имеют место следующие оценки:*

а) *если $a_1 a_2 a_3 a_4 b_1 b_2 b_3 b_4 > 0$, то*

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| &\leq \max \left\{ \frac{|a_1 b_2 - b_1 a_2|}{(\sqrt{a_1 b_2} + \sqrt{b_1 a_2})^2}, \frac{|a_1 b_3 - b_1 a_3|}{(\sqrt{a_1 b_3} + \sqrt{b_1 a_3})^2}, \frac{|a_1 b_4 - b_1 a_4|}{(\sqrt{a_1 b_4} + \sqrt{b_1 a_4})^2} \right\}, \\ \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| &\leq \max \left\{ \frac{|a_1 b_2 - b_1 a_2|}{(\sqrt{a_1 b_2} + \sqrt{b_1 a_2})^2}, \frac{|a_2 b_3 - b_2 a_3|}{(\sqrt{a_2 b_3} + \sqrt{b_2 a_3})^2}, \frac{|a_2 b_4 - b_2 a_4|}{(\sqrt{a_2 b_4} + \sqrt{b_2 a_4})^2} \right\}, \\ \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| &\leq \max \left\{ \frac{|a_1 b_3 - b_1 a_3|}{(\sqrt{a_1 b_3} + \sqrt{b_1 a_3})^2}, \frac{|a_2 b_3 - b_2 a_3|}{(\sqrt{a_2 b_3} + \sqrt{b_2 a_3})^2}, \frac{|a_3 b_4 - b_3 a_4|}{(\sqrt{a_3 b_4} + \sqrt{b_3 a_4})^2} \right\}; \end{aligned}$$

б) *если $a_1 a_2 a_3 a_4 b_1 b_2 b_3 b_4 = 0$, то*

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \leq 1, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq 1, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| \leq 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a, b, c, d \geq 0$, $a + b > 0$, $c + d > 0$. Введем обозначение $f_1(x) = \ln \frac{ae^x + b}{ce^x + d}$. Легко проверить, что

$$|f'_1(x)| \leq \begin{cases} \frac{|ad - bc|}{(\sqrt{ad} + \sqrt{bc})^2}, & \text{если } abcd \neq 0, \\ 1, & \text{если } abcd = 0. \end{cases} \quad (26)$$

Рассмотрим $f_2(x, y) = \ln \frac{a_1 e^x + a_2 e^y + a_3}{b_1 e^x + b_2 e^y + b_3}$. В силу неравенства (26)

$$\left| \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial x} \right| \leq \frac{|a_1(b_2 e^y + b_3) - b_1(a_2 e^y + a_3)|}{(\sqrt{a_1(b_2 e^y + b_3)} + \sqrt{b_1(a_2 e^y + a_3)})^2}. \quad (27)$$

Пусть $t = e^y$, $\varphi(t) = \frac{|a_1(b_2 t + b_3) - b_1(a_2 t + a_3)|}{(\sqrt{a_1(b_2 t + b_3)} + \sqrt{b_1(a_2 t + a_3)})^2}$. Тогда

$$\varphi'(t) = \sqrt{\frac{a_1 b_1}{(a_2 t + a_3)(b_2 t + b_3)}} \cdot \frac{a_3 b_2 - a_2 b_3}{(\sqrt{a_1(b_2 t + b_3)} + \sqrt{b_1(a_2 t + a_3)})^2}.$$

Следовательно, $\varphi(t)$ монотонно возрастает при $a_3 b_2 - a_2 b_3 \geq 0$ и монотонно убывает при $a_3 b_2 - a_2 b_3 < 0$.

Так как $t > 0$, из (27) имеем

$$\frac{\partial f_2(x, y)}{\partial x} \leq \max \{|\varphi(0)|, |\varphi(\infty)|\} = \max \left\{ \frac{|a_1 b_3 - b_1 a_3|}{(\sqrt{a_1 b_3} + \sqrt{b_1 a_3})^2}, \frac{|a_1 b_2 - b_1 a_2|}{(\sqrt{a_1 b_2} + \sqrt{b_1 a_2})^2} \right\}. \quad (28)$$

Используя (28), аналогичным образом для $\partial f(x, y, z)/\partial x$ получим первое неравенство пункта “а” леммы 9. Остальные два неравенства доказываются аналогично. Неравенства пункта “б” получаются из неравенств пункта “а”, если хотя бы один из параметров $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4$ равен нулю и при этом имеют место неравенства (25). Лемма доказана.

Заметим, что каждая координата функции F (см. (14)) имеет вид (24). Из леммы 9 вытекает

ЛЕММА 10. Для любого $h = (h_0, h_1, h_2) \in \mathbb{R}^3$ имеют место оценки

$$\left| \frac{\partial F_0}{\partial h_j} \right| \leq \frac{|1 - \theta^3|}{1 + \theta^3}, \quad \left| \frac{\partial F_1}{\partial h_j} \right| \leq \frac{|1 - \theta^2|}{1 + \theta^2}, \quad \left| \frac{\partial F_2}{\partial h_j} \right| \leq \frac{|1 - \theta|}{1 + \theta}; \quad (29a)$$

$$\|F(h, \theta) - F(l, \theta)\| \leq 3 \frac{|1 - \theta^3|}{1 + \theta^3} \|h - l\|, \quad h, l \in \mathbb{R}^3. \quad (29b)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенства (29a) суть следствия неравенств леммы 9. Для доказательства (29b) запишем

$$\begin{aligned} \|F(h) - F(l)\| &= \max_{i=0,1,2} \{|F_i(h) - F_i(l)|\} \leq \\ &\leq \max_{i=0,1,2} \left\{ \left| \frac{\partial F_i}{\partial h_0} \right| |h_0 - l_0| + \left| \frac{\partial F_i}{\partial h_1} \right| |h_1 - l_1| + \left| \frac{\partial F_i}{\partial h_2} \right| |h_2 - l_2| \right\} \leq \\ &\leq 3 \frac{|1 - \theta^3|}{1 + \theta^3} \|h - l\|. \end{aligned}$$

Используя лемму 10 (см. аналогичные рассуждения по поводу теоремы 3 в работе [12]), можно доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 6. Для любых бесконечных путей π_1, π_2 существует единственная вектор-функция $h^{\pi_1 \pi_2}$, удовлетворяющая соотношениям (6) и (23).

Отобразим (π_1, π_2) в пару $(t, s) \in [0, 1] \times [0, 1]$. Можно доказать (см. [11]–[13]), что $h^{\pi_1(t)\pi_2(s)}$ различны при разных $(t, s) \in D = \{(u, v) \in [0, 1]^2: u \leq v\}$.

По теореме 1 каждой совокупности $h^{\pi_1(t)\pi_2(s)}$ можно сопоставить РМГ на Γ^k , которую мы обозначим через $\mu(t, s)$. Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 7. Для любого $(t, s) \in D$ существует единственная РМГ $\mu(t, s)$. Более того, $\mu(0, 0) = \mu_+^*$, $\mu(0, 1) = \mu_0^*$, $\mu(1, 1) = \mu_-^*$.

6. ОБСУЖДЕНИЕ

Описание множества всех соответствующих гамильтониану (1) гиббсовских распределений является одной из основных задач. Но полностью решить ее пока не удается даже для достаточно простых гамильтонианов (см., например, [6], [10]–[14]).

Простота дерева Кэли позволяет описать достаточно широкий класс МГ для моделей без “хороших” симметрий [9], [15] и с конкурирующими взаимодействиями (см., например, [16]).

Результаты настоящей работы дают возможность указать явно значения β , при которых существуют периодические МГ. С другой стороны, имея в виду результаты работы [3] и настоящей работы, можно заметить, что число ТИРМГ одинаково и равно трем при $m = 2$ и $m = 3$. Это демонстрирует существенное различие между моделями SOS на $\mathbb{Z}^d$ и Γ^k , так как в случае $\mathbb{Z}^d$ число ТИМ зависит от четности m (см. [2]): для четных m МГ единственна, для нечетных m существуют две периодические МГ.

Благодарности. У. Розиков благодарит Университет La Sapienza (Рим, Италия) за неоднократные поддержки поездок в 2005 г., а также профессоров G. Gallavotti и M. Cassandro за приглашения в “La Sapienza”. Работа частично поддержана NATO (Reintegration Grant: Fel. RIG. 980771) и Центром по науке и технологиям Республики Узбекистан (грант Ф.-1.1.2). Авторы выражают благодарность рецензенту за полезные замечания по работе.

Список литературы

- [1] К. Престон, *Гиббсовские состояния на счетных множествах*, Мир, М., 1977.
- [2] A. E. Mazel, Yu. M. Suhov, *J. Statist. Phys.*, **64** (1991), 111–134.
- [3] U. A. Rozikov, Yu. M. Suhov, *Gibbs measures for SOS models on a Cayley tree*, math.PR/0409047.
- [4] R. Fernandez, *Contour ensembles and the description of Gibbsian probability distributions at low temperature*, <http://www.univ-rouen.fr/LMRS/Persopage/Fernandez/resucont.html>, 1998.
- [5] U. A. Rozikov, *Lett. Math. Phys.*, **71**:1 (2005), 27–38.
- [6] Н. Н. Ганиходжаев, У. А. Розиков, *ТМФ*, **111**:1 (1997), 109–117.
- [7] Я. Г. Синай, *Теория фазовых переходов: строгие результаты*, Наука, М., 1980.
- [8] Н. О. Georgii, *Gibbs Measures and Phase Transitions*, De Gruyter, Berlin, 1988.
- [9] Yu. M. Suhov, U. A. Rozikov, *Queueing Syst.*, **46** (2004), 197–212.
- [10] У. А. Розиков, *ТМФ*, **112**:1 (1997), 170–175.
- [11] П. М. Блехер, Н. Н. Ганиходжаев, *Теория вер. примен.*, **35**:2 (1990), 220–230.
- [12] У. А. Розиков, *ТМФ*, **118**:1 (1999), 95–104.
- [13] У. А. Розиков, *Сибирск. матем. журнал*, **39**:2 (1998), 427–435.
- [14] Н. Н. Ганиходжаев, *ТМФ*, **85**:2 (1990), 163–175.
- [15] J. B. Martin, U. A. Rozikov, Yu. M. Suhov, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **12**:3 (2005), 432–448.
- [16] F. M. Mukhamedov, U. A. Rozikov, *J. Statist. Phys.*, **114** (2004), 825–848; **119** (2005), 427–446.

Поступила в редакцию 16.01.2006,
после доработки 29.03.2006