Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Б. Алкалаев, Безмассовые калибровочные поля смешанного типа симметрии в AdS_5 , *ТМФ*, 2006, том 149, номер 1, 47–59

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf3829>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 16:39:31

© 2006 г.

К. Б. Алкалаев*

БЕЗМАССОВЫЕ КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПОЛЯ СМЕШАННОГО ТИПА СИММЕТРИИ В AdS_5

С использованием $su(2, 2)$ -спинорного языка описаны свободные безмассовые бозонные и фермионные калибровочные поля смешанного типа симметрии с произвольными спинами на пятимерном пространстве анти-де Ситтера. Построены явно ковариантные функционалы действия и выведены полевые уравнения.

Ключевые слова: высшие спины, смешанный тип симметрии, пространства анти-де Ситтера, диаграммы Юнга.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе мы продолжаем изучение пятимерной калибровочной теории полей высших спинов [1]–[5]. Нашей целью является формулировка явно ковариантных калибровочно-инвариантных действий, описывающих свободную полевую динамику безмассовых бозонных и фермионных калибровочных полей смешанного типа симметрии с произвольными спинами $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$.

Наше рассмотрение калибровочных полей смешанного типа симметрии на пятимерном пространстве анти-де Ситтера (AdS_5) основано на реперном подходе, предложенном в работах [6], [7]. Однако вместо (спин-)тензорного языка, использованного в [6], [7], мы пользуемся спинорным описанием AdS_5 -полей высших спинов, основанным на хорошо известном факте: AdS_5 -алгебра $o(4, 2)$ изоморфна алгебре $su(2, 2)$. Тем самым $o(4, 2)$ -(спин-)тензорные поля могут быть эквивалентным образом описаны как $su(2, 2)$ -мультиспиноры, и главное преимущество спинорного описания состоит в том, что бозонные и фермионные поля произвольного спина $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$ могут рассматриваться единым образом. Несмотря на тот факт, что d -мерный анализ работ [6], [7], конечно же, включает случай AdS_5 , переформулировка этих результатов на спинорном языке может быть интересна в нескольких отношениях. В целом она мотивирована желанием продвинуться в направлении нелинейной калибровочной теории полей высших спинов, которая вызывает интерес в контексте версии AdS_5/CFT_4 -соответствия с учетом полей высших спинов (см. обзоры [8]). На самом деле, на данный момент построены нелинейные уравнения

*Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия. E-mail: alkalaev@lpi.ru

движения для AdS_d полностью симметричных бозонных полей и отвечающие им калибровочные алгебры высших спинов [9], однако проблема их расширения на случай полей смешанного типа симметрии общего вида остается открытой. С другой стороны, в случае AdS_5 -динамики высших спинов существует реальная возможность построить нелинейную теорию полей высших спинов всех типов симметрии. Действительно, в пяти измерениях имеются преимущества использования изоморфизма $o(4, 2) \sim su(2, 2)$. В частности, в рамках спинорного языка (суперсимметричные) алгебры высших спинов были отождествлены с определенными $*$ -алгебрами с $su(2, 2)$ -спинорными образующими элементами [10], [11]. Также существуют явно ковариантные формулировки свободной AdS_5 -динамики высших спинов¹⁾ [1]–[4] и $\mathcal{N} = 0, 1$ (суперсимметричные) функционалы действия, которые описывают кубические взаимодействия AdS_5 полностью симметричных полей [2], [5].

Статья имеет следующую структуру. В разделе 2 описана фоновая AdS_5 -геометрия в спинорных обозначениях [2]. В разделе 3 рассмотрены AdS_5 калибровочные поля высших спинов смешанного типа симметрии и описаны их мультиспинорная и (спин-)тензорная формы. В разделе 4 вводятся тензоры высших рангов как функции вспомогательных спинорных переменных [2], строятся калибровочные преобразования и линеаризованные кривизны высших спинов. В разделе 5 построены явно калибровочно инвариантные действия высших спинов. В разделе 6 выводятся уравнения движения и обсуждаются связи для экстремальных полей. Заключительные замечания приведены в разделе 7.

2. AdS_5 ФОНОВАЯ ГЕОМЕТРИЯ В СПИНОРНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЯХ

Гравитационные поля²⁾ в AdS_5 отождествляются с 1-формой связности, которая принимает значения в AdS_5 -алгебре $su(2, 2)$

$$\Omega(x) = dx^{\underline{n}} \Omega_{\underline{n}}^{\alpha}{}_{\beta} t_{\alpha}^{\beta}, \quad (2.1)$$

где t_{α}^{β} являются базисными элементами $su(2, 2)$ и $\Omega^{\alpha}{}_{\alpha} = 0$. $su(2, 2)$ -Калибровочное поле (2.1) разлагается на поле репера и лоренцеву спинорную связность. Это разбиение может быть выполнено явно $su(2, 2)$ -ковариантным способом посредством введения поля компенсатора [2], [15], который является антисимметричным биспинором $V^{\alpha\beta} = -V^{\beta\alpha}$. Компенсатор нормирован так, что $V_{\alpha\gamma} V^{\beta\gamma} = \delta_{\alpha}^{\beta}$, $V_{\alpha\beta} = (1/2)\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\rho} \times V^{\gamma\rho}$. Подалгебра Лоренца отождествляется с алгеброй стабильности компенсатора.

¹⁾Уравнения движения для AdS_d безмассовых полей произвольных спинов в калибровке светового конуса были построены в работах [12]; действия в калибровке светового конуса для произвольных AdS_5 безмассовых полей смешанного типа симметрии – в работе [13]. Также существуют различные явно ковариантные лагранжевы формулировки для частных примеров AdS_d -калибровочных полей смешанного типа симметрии [14].

²⁾В данной работе мы пользуемся сигнатурой $(+ - \dots -)$ и обозначениями $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3, 4$ для $su(2, 2)$ -спинорных индексов, $\underline{m}, \underline{n} = 0, 1, 2, 3, 4$ для мировых индексов, $a, b, c = 0, 1, 2, 3, 4$ для касательных лоренцевых $so(4, 1)$ -векторных индексов и $A, B, C = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ для касательных $so(4, 2)$ -векторных индексов. Мы также используем конденсированные обозначения для набора симметричных спинорных индексов $\alpha(k) \equiv \alpha_1 \dots \alpha_k$. Индексы, обозначенные одинаковой буквой, считаются симметризованными как $X^{\alpha} Y^{\alpha} \equiv X^{\alpha_1} Y^{\alpha_2} + X^{\alpha_2} Y^{\alpha_1}$.

Это позволяет определить поле репера $E^{\alpha\beta}$ и лоренцеву спиновую связность $\omega^{\alpha(2)}$ следующим образом [2]:

$$\begin{aligned} E^{\alpha\beta} &= DV^{\alpha\beta} \equiv dV^{\alpha\beta} + \Omega^\alpha{}_\gamma V^{\gamma\beta} + \Omega^\beta{}_\gamma V^{\alpha\gamma}, & E^{\alpha\beta} V_{\alpha\beta} &= 0, \\ \omega^\alpha{}_\beta &= \Omega^\alpha{}_\beta + \frac{\lambda}{2} E^{\alpha\gamma} V_{\gamma\beta}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где λ – космологический параметр, $\lambda^2 > 0$. Отметим, что поскольку компенсатор является лоренц-инвариантным, мы рассматриваем $V^{\alpha\beta}$ как симплектическую метрику, позволяющую поднимать и опускать спинорные индексы лоренц-ковариантным образом: $X^\alpha = V^{\alpha\beta} X_\beta$, $Y_\alpha = Y^\beta V_{\beta\alpha}$.

AdS_5 -полевая напряженность, соответствующая калибровочному полю (2.1), имеет вид

$$R_\alpha{}^\beta = d\Omega_\alpha{}^\beta + \Omega_\alpha{}^\gamma \wedge \Omega_\gamma{}^\beta, \quad (2.3)$$

и фоновое пространство AdS_5 описывается полем 1-формы $\Omega_0^\alpha{}_\beta = (h^{\alpha\beta}, \omega_0^{\alpha(2)})$, которая удовлетворяет условию нулевой кривизны [16]

$$R_\alpha{}^\beta(\Omega_0) = 0. \quad (2.4)$$

3. ПОЛЯ ВЫСШИХ СПИНОВ

Для того чтобы описать калибровочное поле спина (s_1, s_2) , введем пару взаимно сопряженных³⁾ $su(2, 2)$ -бесследовых мультиспиноров, симметричных по нижним и верхним индексам [1]–[6],

$$\Omega^{\alpha(m)}{}_{\beta(n)}(x) \oplus \overline{\Omega}^{\beta(n)}{}_{\alpha(m)}(x), \quad \Omega^{\alpha(m-1)\gamma}{}_{\beta(n-1)\rho}(x) \delta_\gamma^\rho = 0, \quad (3.1)$$

являющихся 1-формами

$$\Omega^{\alpha(m)}{}_{\beta(n)}(x) = dx^{\underline{n}} \Omega_{\underline{n}}{}^{\alpha(m)}{}_{\beta(n)}(x) \quad (3.2)$$

с

$$m = s_1 + s_2 - 1, \quad n = s_1 - s_2 - 1. \quad (3.3)$$

Чтобы разложить представления (3.1) AdS_5 -алгебры $su(2, 2)$ на представления ее лоренцевой подалгебры, мы используем компенсатор $V^{\alpha\beta}$. Результат редукции имеет вид

$$\begin{aligned} \Omega^{\alpha(s_1+s_2-1)}{}_{\beta(s_1-s_2-1)}(x) &= \sum_{t=0}^{s_1-s_2-1} \omega^{\alpha(s_1+s_2-1)\gamma(t), \gamma(s_1-s_2-t-1)}(x) \times \\ &\times V_{\beta(s_1-s_2-1), \gamma(s_1-s_2-1)}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

³⁾Операция комплексного сопряжения определена правилом $\overline{X}_\alpha = X^\beta C_{\beta\alpha}$, $\overline{Y}^\alpha = C^{\alpha\beta} Y_\beta$, где черта означает комплексное сопряжение, а $C^{\alpha\beta} = -C^{\beta\alpha}$ и $C_{\alpha\beta} = -C_{\beta\alpha}$ есть некоторые вещественные матрицы, удовлетворяющие равенству $C_{\alpha\gamma} C^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\beta$ [2].

где введено конденсированное обозначение $V_{\alpha(k),\beta(k)} \equiv V_{\alpha_1\beta_1} V_{\alpha_2\beta_2} \dots V_{\alpha_k\beta_k}$. Неприходимые по отношению к алгебре Лоренца компоненты

$$\omega^{\alpha(s_1+s_2+t-1),\beta(s_1-s_2-t-1)}(x), \quad 0 \leq t \leq s_1 - s_2 - 1, \quad (3.5)$$

удовлетворяют условию юнговой симметрии

$$\omega^{\alpha(s_1+s_2+t-1),\alpha\beta(s_1-s_2-t-1)}(x) = 0, \quad (3.6)$$

и все свертки с $V_{\alpha\beta}$ являются нулями:

$$\omega^{\alpha(s_1+s_2+t-1),\beta(s_1-s_2-t-1)}(x)V_{\alpha\beta} = 0. \quad (3.7)$$

Согласно анализу, проведенному в работах [1], [2], мультиспиноры с $|m - n| = 0$ соответствуют полностью симметричным бозонным полям спина s_1 и являются самосопряженными. Другие поля с $|m - n| \geq 1$ описываются парой взаимно сопряженных мультиспиноров и соответствуют либо полностью симметричным фермионным полям спина s_1 , $|m - n| = 1$ [3], [4], либо бозонным и фермионным полям смешанного типа симметрии, $|m - n| \geq 2$ [2], [4]. Уместно сделать следующий комментарий: калибровочные поля смешанного типа симметрии с необходимостью появляются в спектре $\mathcal{N} \geq 2$ расширенных пятимерных калибровочных супералгебр высших спинов, в то время как $\mathcal{N} \leq 1$ (супер)алгебры описывают только полностью симметричные поля [11].

Для того чтобы связать спинорную и (спин-)тензорную формы динамики полей смешанного типа симметрии, рассмотрим $o(4, 1)$ -(спин-)тензорный вариант мультиспинорных полей (3.5)–(3.6) при $s_2 \neq 0$. Результат таков: набор $o(4, 1)$ -калибровочных полей представляется в виде комплекснозначных (спин-)тензорных полей вида

$$\omega^{a(s_1-1),b(s_2+t)} = dx^n \omega_n^{a(s_1-1),b(s_2+t)}, \quad 0 \leq t \leq s_1 - s_2 - 1, \quad (3.8)$$

для бозонных полей смешанного типа симметрии и вида

$$w^{\alpha|a(s_1-1),b(s_2+t)} = dx^n w_n^{\alpha|a(s_1-1),b(s_2+t)}, \quad \alpha = 1, 2, 3, 4, \quad 0 \leq t \leq s_1 - s_2 - 1, \quad (3.9)$$

для фермионных полей смешанного типа симметрии (α обозначает пятимерный дираковский спинорный индекс). В обоих случаях поля (3.8), (3.9) удовлетворяют юнговскому свойству симметрии и являются бесследовыми (бозоны) или гамма-поперечными (фермионы).

Согласно терминологии работы [6], поля (3.8) и (3.9) с параметром $t \geq 1$ называются экстрас полями. Фермионное поле (3.9) при $t = 0$ будет называться физическим полем. Чтобы классифицировать бозонное поле (3.8) с $t = 0$, мы разлагаем его на вещественную и мнимую части:

$$\omega^{a(s_1-1),b(s_2)} = \omega_1^{a(s_1-1),b(s_2)} + i\omega_2^{a(s_1-1),b(s_2)}. \quad (3.10)$$

С помощью пятимерного символа Леви-Чивита одно из полей (ω_1 или ω_2) может быть дуализовано в поле с одним индексом в третьей строке, например,

$$\omega^{a(s_1-1),b(s_2)} = \omega_1^{a(s_1-1),b(s_2)} + i\epsilon^{abcde}\omega_2^{a(s_1-2)}_{c, \quad b(s_2-1)}_{d,e}, \quad (3.11)$$

где дуальное поле с тремя строками $\omega_2^{a(s_1-1), b(s_2), e}$ является бесследовым и удовлетворяет юнговскому свойству симметрии. Мы называем вещественную часть поля (3.11) $\text{Re} \omega^{a(s_1-1), b(s_2)}$ физическим полем, а его мнимую часть $\text{Im} \omega^{a(s_1-1), b(s_2)}$ – вспомогательным полем. На самом деле, любое бозонное поле (3.8) может быть представлено в виде пары вещественных полей, одно из которых имеет один индекс в третьей строке. Получающийся набор вещественных лоренц-ковариантных полей описывается трехстрочными $o(4, 1)$ -диаграммами Юнга, появляющимися как разложение определенной $o(4, 2)$ -трехстрочной диаграммы Юнга [2], [6].

4. ЛИНЕАРИЗОВАННЫЕ КРИВИЗНЫ ВЫСШИХ СПИНОВ

Анализ линеаризованных кривизн в этом разделе близок к аналогичному анализу, содержащемуся в предыдущих работах по полностью симметричным полям [2], [3]. Оказывается, что общий вид калибровочных преобразований для полей смешанного типа симметрии остается таким же, за исключением дополнительной зависимости от спина s_2 и появления ненулевого оператора $\mathcal{T}_0$ для бозонных несимметричных полей (см. (4.18), (4.20)). Это последнее свойство нетипично для бозонных систем и является отражением неявного присутствия символа Леви-Чивита в определении вещественных бозонных компонент комплекснозначных полей (3.8). Вычисление бозонного оператора $\mathcal{T}_0$ является основным результатом этого раздела.

Введем вспомогательные коммутирующие переменные a_α и b^β , преобразующиеся как фундаментальное и сопряженное фундаментальному представления $su(2, 2)$. Удобно представить поля высших спинов (3.2) в виде функций от вспомогательных переменных

$$\Omega(a, b \mid x) = \Omega^{\alpha(s_1+s_2-1)}_{\beta(s_1-s_2-1)}(x) a_{\alpha(s_1+s_2-1)} b^{\beta(s_1-s_2-1)}, \quad (4.1)$$

где

$$a_{\alpha(m)} = a_{\alpha_1} \dots a_{\alpha_m}, \quad b^{\beta(n)} = b^{\beta_1} \dots b^{\beta_n}. \quad (4.2)$$

Соответствующая пятимерная линеаризованная кривизна высших спинов имеет вид

$$R(a, b \mid x) = d\Omega(a, b \mid x) + \Omega_0^\alpha{}_\beta \left(b^\beta \frac{\partial}{\partial b^\alpha} - a_\alpha \frac{\partial}{\partial a_\beta} \right) \wedge \Omega(a, b \mid x), \quad (4.3)$$

где $\Omega_0^\alpha{}_\beta$ – фоновая 1-форма связности, удовлетворяющая условию нулевой кривизны (2.4). Линеаризованные (абелевы) преобразования высших спинов есть

$$\delta\Omega(a, b \mid x) = D_0 \xi(a, b \mid x), \quad (4.4)$$

где фоновая ковариантная производная имеет вид

$$D_0 = d + \Omega_0^\alpha{}_\beta \left(b^\beta \frac{\partial}{\partial b^\alpha} - a_\alpha \frac{\partial}{\partial a_\beta} \right). \quad (4.5)$$

Из условия (2.4) следует, что $\delta R(a, b \mid x) = 0$. Тожества Бианки имеют вид

$$D_0 R(a, b \mid x) = 0. \quad (4.6)$$

В последующем анализе мы используем два набора дифференциальных операторов по вспомогательным переменным [2] –

$$S^- = a_\alpha \frac{\partial}{\partial b^\beta} V^{\alpha\beta}, \quad S^+ = b^\alpha \frac{\partial}{\partial a_\beta} V_{\alpha\beta}, \quad S^0 = N_b - N_a \quad (4.7)$$

и

$$T^- = \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial a_\alpha \partial b^\alpha}, \quad T^+ = a_\alpha b^\alpha, \quad T^0 = \frac{1}{4} (N_a + N_b + 4), \quad (4.8)$$

где

$$N_a = a_\alpha \frac{\partial}{\partial a_\alpha}, \quad N_b = b^\alpha \frac{\partial}{\partial b^\alpha}. \quad (4.9)$$

С помощью (4.7) и (4.8) условия неприводимости для $\Omega(a, b)$ переформулируются в виде

$$T^- \Omega(a, b) = 0, \quad (S^0 + 2s_2) \Omega(a, b) = 0. \quad (4.10)$$

Как показано в разделе 3, калибровочное поле высшего спина Ω разлагается на представления лоренцевой подалгебры согласно формуле (3.4). В терминах операторов (4.7) и (4.8) формула (3.4) переписывается в виде

$$\Omega(a, b | x) = \sum_{t=0}^{s_1+s_2-1} (S^+)^t \omega^t(a, b | x), \quad (4.11)$$

где

$$\omega^t(a, b | x) = \omega^{\alpha(s_1+s_2+t-1), \beta(s_1-s_2-t-1)}(x) a_{\alpha(s_1+s_2+t-1)} b_{\beta(s_1-s_2-t-1)} \quad (4.12)$$

суть лоренц-ковариантные калибровочные поля (3.5), и условия неприводимости (3.6), (3.7) принимают вид

$$S^- \omega^t(a, b) = 0, \quad T^- \omega^t(a, b) = 0. \quad (4.13)$$

Калибровочная симметрия высших спинов (4.4) требует, чтобы как бозонные, так и фермионные лоренц-ковариантные кривизны высших спинов r^t и калибровочные преобразования имели следующий вид:

$$r^t = \mathcal{D} \omega^t + T^- \omega^{t+1} + \lambda T^0 \omega^t + \lambda^2 T^+ \omega^{t-1}, \quad (4.14)$$

$$\delta \omega^t = \mathcal{D} \xi^t + T^- \xi^{t+1} + \lambda T^0 \xi^t + \lambda^2 T^+ \xi^{t-1}, \quad (4.15)$$

где 0-формы ξ^t – лоренц-ковариантные калибровочные параметры и $\mathcal{D}$ – фоновая лоренц-ковариантная производная

$$\mathcal{D} = d + w_0^\alpha{}_\beta \left(a_\alpha \frac{\partial}{\partial a_\beta} + b_\alpha \frac{\partial}{\partial b_\beta} \right). \quad (4.16)$$

Операторы T^- , T^+ и T^0 имеют вид

$$T^+ = \left(1 - \frac{\Delta^2}{(S^0)^2} \right) h^\alpha{}_\beta a_\alpha \frac{\partial}{\partial b_\beta}, \quad (4.17)$$

$$T^0 = -\frac{\Delta}{S^0} h^\alpha{}_\beta \left(b_\alpha \frac{\partial}{\partial b_\beta} - a_\alpha \frac{\partial}{\partial a_\beta} + \frac{2}{S^0 - 2} \left(b_\gamma \frac{\partial}{\partial a_\gamma} \right) a_\alpha \frac{\partial}{\partial b_\beta} \right), \quad (4.18)$$

$$T^- = \frac{1}{1 - S^0} h^\alpha{}_\beta \left((2 - S^0) b_\alpha \frac{\partial}{\partial a_\beta} + b_\gamma \frac{\partial}{\partial a_\gamma} \left(b_\alpha \frac{\partial}{\partial b_\beta} - a_\alpha \frac{\partial}{\partial a_\beta} \right) + \frac{1}{S^0 - 3} \left(b_\gamma \frac{\partial}{\partial a_\gamma} \right)^2 a_\alpha \frac{\partial}{\partial b_\beta} \right), \quad (4.19)$$

где параметр Δ принимает значения

$$\Delta = \begin{cases} 2s_2 & \text{для бозонов,} \\ 2s_2 + 1 & \text{для фермионов,} \end{cases} \quad (4.20)$$

и удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \{T^0, T^-\} &= \{T^0, T^+\} = 0, \\ (\mathcal{T}^-)^2 &= 0, \quad (\mathcal{T}^+)^2 = 0, \\ \mathcal{D}^2 + \lambda^2 \{T^-, T^+\} + \lambda^2 (T^0)^2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Отметим, что коэффициенты в (4.17)–(4.19) могут быть изменены переопределением полей вида $\tilde{\omega}^t = C(t, s)\omega^t$ при $C \neq 0$.

5. ДЕЙСТВИЕ ВЫСШИХ СПИНОВ

Прежде чем рассматривать действия для произвольных калибровочных полей смешанного типа симметрии, посмотрим, что происходит в случае простейшего несимметричного бозонного поля спина $(2, 1)$, описываемого 1-формой $\Omega^{\alpha(2)}(x)$. С точностью до вкладов с полными производными функционал действия имеет единственный вид

$$\mathcal{S}_2^{(2,1)} = \int_{\mathcal{M}^5} h^\alpha{}_\beta \wedge R^{\beta\gamma} \wedge \overline{R}_{\gamma\alpha}, \quad (5.1)$$

где $h^\alpha{}_\beta$ есть фоновое AdS_5 -поле репера и кривизна задается в виде

$$R^{\alpha(2)} = D_0 \Omega^{\alpha(2)} \equiv \mathcal{D} \Omega^{\alpha(2)} + \lambda h^\alpha{}_\gamma \wedge \Omega^{\gamma\alpha}. \quad (5.2)$$

Уравнения движения, получающиеся при варьировании действия (5.1), таковы:

$$H_2{}^\alpha{}_\gamma \wedge R^{\gamma\beta} + H_2{}^\beta{}_\gamma \wedge R^{\gamma\alpha} = 0, \quad (5.3)$$

плюс комплексно-сопряженные уравнения для $\overline{\Omega}_{\alpha\beta}$. Отметим, что эти бозонные уравнения являются уравнениями 1-го порядка, что делает их похожими на фермионные уравнения. Однако, как обсуждалось в разделе 3, вещественная и мнимая части комплекснозначного поля $\Omega^{\alpha(2)}(x)$ рассматриваются как физическое и вспомогательное поля (3.11), и вспомогательное поле выражается посредством своего уравнения движения через первые производные физического поля. Для того чтобы дать более детальное описание этого механизма, рассмотрим тензорную форму

действия (5.1). Согласно (3.10) $o(4, 1)$ -поле, изоморфное полю $\Omega^{\alpha(2)}(x)$, задается формулой

$$\omega^{[ab]} = \omega_1^{ab} + i\omega_2^{ab}. \quad (5.4)$$

Соответствующая линеаризованная кривизна и калибровочные преобразования имеют вид

$$R^{ab} = \mathcal{D}\omega^{ab} - \frac{i\lambda}{2}\epsilon^{abcde}h_c \wedge \omega_{de}, \quad \delta\omega^{ab} = \mathcal{D}\xi^{ab} - \frac{i\lambda}{2}\epsilon^{abcde}h_c \xi_{de}, \quad (5.5)$$

где $\mathcal{D}$ – фоновая лоренц-ковариантная производная, ξ^{ab} – 0-форма комплексного калибровочного параметра и h^a – фоновое поле репера. Отметим, что слагаемые в (5.5), содержащие символ Леви-Чивита, фактически являются оператором $\mathcal{T}^0$, заданным в спинорных обозначениях формулой (4.18). Тожества Бианки имеют вид

$$\mathcal{D}R^{ab} - \frac{i\lambda}{2}\epsilon^{abcde}h_c \wedge R_{de} = 0. \quad (5.6)$$

Действие можно записать аналогично выражению (5.5) как

$$\mathcal{S}_2^{(2,1)} = \int_{\mathcal{M}^5} \epsilon_{abcde} h^e \wedge R^{ab} \wedge \bar{R}^{cd}, \quad (5.7)$$

где $\bar{R}^{cd}$ – комплексно-сопряженная кривизна (5.5). Уравнения движения суть

$$H_a{}^c \wedge R_{cb} - H_b{}^c \wedge R_{ca} = 0, \quad H_{ab} \stackrel{\text{def}}{=} h_a \wedge h_b \quad (5.8)$$

плюс комплексно-сопряженные уравнения. Чтобы выявить динамическое содержание этих уравнений, вещественная либо мнимая часть поля ω^{ab} (5.4) рассматривается как дуализованное вспомогательное поле, например,

$$\omega_1^{ab} = \omega_1^{ab}, \quad \omega_2^{ab} = \frac{1}{\lambda}\epsilon^{abcde}\omega_2{}_{cde}, \quad (5.9)$$

где ω_1^{ab} и ω_2^{abc} – физическое и вспомогательное поля с антисимметричными индексами и множитель λ^{-1} введен для выражения того факта, что массовые размерности физического и вспомогательного полей различны. Эти поля могут быть объединены в одно $o(4, 2)$ -поле $\Omega^{[ABC]}$ [6]. Можно показать, что действие (5.7) может быть переписано как

$$\mathcal{S}_2^{(2,1)} = \frac{1}{\lambda^2} \int_{\mathcal{M}^d} \epsilon_{ABCDEFGF} h^E V^F \wedge R^{ABM} \wedge R^{CDN} V_M V_N, \quad (5.10)$$

и в этом виде оно совпадает с действием для AdS_d -поля “крюка”, подробно изученным в работе [6]. Стоит отметить, что плоский предел действия (5.7) (или, эквивалентно, действия (5.10)) приводит к дуальному описанию поля спина 2, что в точности соответствует действию Картрайта [17]. Заметим также, что процедура объединения физического и вспомогательного полей в одно комплекснозначное поле была использована при изучении так называемой самодуальности в нечетных размерностях для массивных антисимметричных тензорных полей в пространстве Минковского [18].

Действие для несимметричных AdS_5 калибровочных полей. Далее мы строим свободные действия, описывающие бозонные и фермионные калибровочные поля смешанного типа симметрии в AdS_5 . Случай полностью симметричных полей был рассмотрен в работах [2], [3].

Так же, как в работах [2], [3], [6], мы ищем функционалы действия для полей смешанного типа симметрии в виде

$$S_2^{(s_1, s_2)} = \int_{\mathcal{M}^5} \hat{H} \wedge R^{s_1, s_2}(a_1, b_1) \wedge \bar{R}^{s_1, s_2}(a_2, b_2)|_{a_i=b_i=0}, \quad (5.11)$$

где R^{s_1, s_2} – линейаризованная кривизна высшего спина (4.3) и 1-форма $\hat{H}$ является следующим дифференциальным оператором:

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \left(\alpha(p, q) h_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial a_{1\alpha} \partial a_{2\beta}} \hat{b}_{12} + \beta(p, q) h^{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial b_1^\alpha \partial b_2^\beta} \hat{a}_{12} + \right. \\ & \left. + \gamma(p, q) h_\alpha{}^\beta \frac{\partial^2}{\partial a_{2\alpha} \partial b_1^\beta} \hat{c}_{12} + \zeta(p, q) h_\alpha{}^\beta \frac{\partial^2}{\partial a_{1\alpha} \partial b_2^\beta} \hat{c}_{21} \right) (\hat{c}_{12})^{2s_2}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Здесь $h_\alpha{}^\beta$ – фоновое поле репера и коэффициенты α , β , γ и ζ являются функциями операторов

$$p = \hat{a}_{12} \hat{b}_{12}, \quad q = \hat{c}_{12} \hat{c}_{21}, \quad (5.13)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{a}_{12} &= V_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial a_{1\alpha} \partial a_{2\beta}}, & \hat{b}_{12} &= V^{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial b_1^\alpha \partial b_2^\beta}, \\ \hat{c}_{12} &= \frac{\partial^2}{\partial a_{1\alpha} \partial b_2^\alpha}, & \hat{c}_{21} &= \frac{\partial^2}{\partial a_{2\alpha} \partial b_1^\alpha}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Эти функции отвечают за различные типы индексных свертки между полем репера и кривизнами. Действие инвариантно относительно комплексного сопряжения $\bar{S}_2 = S_2$ при вещественных коэффициентах α , β , γ и ζ .

Так как вариация общего вида линейаризованных кривизн имеет вид $\delta R = D_0 \delta \Omega$ и действие сформулировано AdS_5 -ковариантным образом, при интегрировании по частям получается вариация

$$\delta S_2^{(s_1, s_2)} = \int_{\mathcal{M}^5} D_0 \hat{H} \wedge \delta \Omega(a_1, b_1) \wedge \bar{R}(a_2, b_2)|_{a_i=b_i=0} + \text{к.с.} \quad (5.15)$$

Производная D_0 дает поле репера каждый раз при действии на компенсатор, $D_0 V^{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta}$. Учитывая $D_0 h^{\alpha\beta} = 0$, $h_\alpha{}^\beta = h_{\alpha\gamma} V^{\beta\gamma}$ и обозначая $H^{\alpha\beta} = H^{\beta\alpha} = h^\alpha{}_\gamma \wedge h^{\beta\gamma}$, находим

$$\begin{aligned} D_0 \hat{H} = & \left(\rho_1 H_\alpha{}^\beta \frac{\partial^2}{\partial a_{2\alpha} \partial b_1^\beta} \hat{c}_{12} + \rho_2 H_\alpha{}^\beta \frac{\partial^2}{\partial a_{1\alpha} \partial b_2^\beta} \hat{c}_{21} + \right. \\ & \left. + \rho_3 H_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial a_{1\alpha} \partial a_{2\beta}} \hat{b}_{12} + \rho_3 H^{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial b_1^\alpha \partial b_2^\beta} \hat{a}_{12} \right) (\hat{c}_{12})^{2s_2}, \end{aligned} \quad (5.16)$$

где

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \frac{1}{2} \left(1 + p \frac{\partial}{\partial p} \right) (-2\gamma(p, q) + (\alpha + \beta)(p, q)), \\ \rho_2 &= \frac{1}{2} \left(1 + p \frac{\partial}{\partial p} \right) (-2\zeta(p, q) + (\alpha + \beta)(p, q)), \\ \rho_3 &= \frac{1}{2} q \frac{\partial}{\partial p} (\zeta(p, q) - \gamma(p, q)).\end{aligned}\tag{5.17}$$

Для тривиального решения $\rho_i = 0$, ковариантная производная от $\hat{H}$ равна нулю, $D_0 \hat{H} = 0$, и соответствующий функционал действия является полной производной. Из (5.17) следует, что $\rho_i = 0$ при условии

$$(\alpha + \beta)(p, q) = 2\gamma(p, q), \quad \zeta(p, q) = \gamma(p, q).\tag{5.18}$$

Очевидно, что добавлением полных производных с коэффициентами, удовлетворяющими (5.18), мы всегда можем положить $\gamma = 0$ и $\beta = 0$ в действии (5.11), (5.12).

В целом действие (5.11) не описывает безмассовые поля высших спинов по причине слишком большого количества нефизических динамических переменных, ассоциированных с экстра полями. Для того чтобы исключить соответствующие степени свободы, следует зафиксировать оператор $\hat{H}$ подходящим образом, наложив *условие отщепления* [6], [19]. Это условие требует, чтобы вариация квадратичного действия по отношению к экстра полям была тождественно равна нулю:

$$\frac{\delta \mathcal{S}_2^{(s_1, s_2)}}{\delta \omega^{t>0}} \equiv 0.\tag{5.19}$$

Чтобы проанализировать условие отщепления экстра полей, отметим, что все калибровочные поля экстра типа могут быть объединены в один неприводимый $su(2, 2)$ -тензор $\xi(a, b)$, удовлетворяющий уравнению $(N_a - N_b - 2s_2 - 2)\xi(a, b) = 0$. Тогда вариация экстра полей принимает вид

$$\delta \Omega^{\text{extra}}(a, b) = S^+ \xi(a, b),\tag{5.20}$$

и условие отщепления экстра полей (5.19) сводится к

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial q} \right) (q\rho_2) + \rho_3 &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial q} \right) \rho_3 &= 0, \\ \rho_1 + \rho_3 &= 0.\end{aligned}\tag{5.21}$$

По модулю вкладов с полными производными (5.18) общее решение системы (5.21) имеет вид

$$\begin{aligned}\gamma(p, q) &= 0, \quad \beta(p, q) = 0, \quad \zeta(p, q) = \zeta^{(0)} \frac{(p+q)^{s_1-s_2-1}}{q}, \\ \alpha(p, q) &= -\zeta^{(0)} (s_1 - s_2 - 1) \int_0^1 d\tau (p\tau + q)^{s_1-s_2-2} = \\ &= -\zeta^{(0)} \sum_{k=0}^{s_1-s_2-2} \frac{(s_1 - s_2 - 1)!}{(k+1)!(s_1 - s_2 - k - 2)!} p^k q^{s_1-s_2-k-2}.\end{aligned}\tag{5.22}$$

Появление q^{-1} в $\zeta(p, q)$ может быть удалено переопределением $\zeta(p, q) \rightarrow q\zeta(p, q)$. Эта операция действительно удаляет сингулярность, потому что последнее слагаемое в операторе $\hat{H}$ (5.12) содержит комбинацию $\hat{c}_{21}(\hat{c}_{12})^{2s_2}$, которая по определению q (5.14) всегда имеет вид $q(\hat{c}_{12})^{2s_2-1}$. Общий фактор $\zeta^{(0)}$ перед действием данного спина (s_1, s_2) не может быть зафиксирован при анализе свободного действия и является остаточным произволом в коэффициентах.

6. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И СВЯЗИ

Для получения уравнений движения нетривиальная часть вариации (5.15) переписывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \delta S_2^{(s_1, s_2)} = & -\frac{\zeta^{(0)}(s_1 - s_2 - 1)}{2} \int (p + q)^{s_1 - s_2 - 2} \left(\frac{(s_1 - s_2 + 1)q + 2(s_1 - s_2)p}{s_1 - s_2 - 1} \times \right. \\ & \times H_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial^2}{\partial a_{1\alpha} \partial b_{2\beta}} + H_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial^2}{\partial a_{2\alpha} \partial b_{1\beta}} (\hat{c}_{12})^2 - H_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial a_{1\alpha} \partial a_{2\beta}} \hat{b}_{12} \hat{c}_{12} - \\ & \left. - H^{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial b_{1\alpha} \partial b_{2\beta}} \hat{a}_{12} \hat{c}_{12} \right) (\hat{c}_{12})^{2s_2-1} \wedge r^0(a_1, b_1) \wedge \delta \bar{\omega}^0(a_2, b_2) + \text{к.с.} \end{aligned} \quad (6.1)$$

Подставляя в вариацию (6.1) поля

$$\begin{aligned} r^0(a_1, b_1) &= r^{0\alpha(s_1+s_2-1), \beta(s_1-s_2-1)} a_{1\alpha} a_{(s_1+s_2-1)} b_1^{\beta(s_1-s_2-1)}, \\ \bar{\omega}^0(a_2, b_2) &= \bar{\omega}^0_{\gamma(s_1+s_2-1), \rho(s_1-s_2-1)} a_{2\rho} a_{(s_1-s_2-1)} b_2^{\gamma(s_1+s_2-1)} \end{aligned} \quad (6.2)$$

и пользуясь их свойствами юнговской симметрии

$$\begin{aligned} Y_1 &\equiv S_1^- : \quad Y_1 r^0(a_1, b_1) = 0, \\ Y_2 &\equiv S_2^+ : \quad Y_2 \bar{\omega}^0(a_2, b_2) = 0, \end{aligned} \quad (6.3)$$

получаем уравнения движения, которые могут быть представлены в следующем удобном виде:

$$\hat{E} \wedge r^0(a, b) = 0, \quad (6.4)$$

где $\hat{E}$ – 2-форма, являющаяся дифференциальным оператором вида

$$\hat{E} = H_{\alpha}^{\beta} \left(a_{\alpha} \frac{\partial}{\partial a_{\beta}} + \kappa_2 b_{\alpha} \frac{\partial}{\partial b_{\beta}} + \kappa_3 S^+ a_{\alpha} \frac{\partial}{\partial b_{\beta}} + \kappa_4 T^+ \frac{\partial^2}{\partial a^{\alpha} \partial b_{\beta}} + \kappa_5 T^+ S^+ \frac{\partial^2}{\partial b^{\alpha} \partial b_{\beta}} \right) \quad (6.5)$$

с коэффициентами

$$\kappa_2 = \frac{1 + (s_1 + s_2 - 1)(s_2 + 1)}{1 - (s_1 - s_2 + 1)(s_2 + 1)}, \quad \kappa_3 = -\kappa_4 = \frac{1 - \kappa_2}{2(s_2 + 1)}, \quad \kappa_5 = \frac{\kappa_2 - 1}{4s_1(s_2 + 1)}. \quad (6.6)$$

Аналогичные уравнения имеют место для комплексно-сопряженного физического поля $\bar{\omega}^0$. Оператор $\hat{E}$ удовлетворяет условиям

$$[S^-, \hat{E}] = 0, \quad [T^-, \hat{E}] = 0, \quad (6.7)$$

т.е. сохраняет свойства юнговской симметрии и V -поперечности физической кривизны r^0 . Также по построению он удовлетворяет условию отщепления экстра полей, означающему, что слагаемое $\mathcal{T}^-\omega^1$, содержащее экстра поле ω^1 в кривизне $r^0 = \mathcal{D}\omega^0 + \mathcal{T}^0\omega^0 + \mathcal{T}^-\omega^1$, не дает вклада в уравнения движения, т.е. $\widehat{E} \wedge \mathcal{T}^-\omega^1 = 0$.

Так же, как в работах по полностью симметричным полям [19], мы полагаем, что связи для экстра полей должны иметь вид

$$\Upsilon_2^+ \wedge r^t(a, b) = 0, \quad 0 \leq t < s_1 - s_2 - 1, \quad (6.8)$$

где 2-форма Υ_2^+ является оператором, который увеличивает t и удовлетворяет условию

$$\mathcal{T}^+ \wedge \Upsilon_2^+ = 0. \quad (6.9)$$

Требуется, чтобы оператор Υ_2^+ обладал свойством (6.9), так как это гарантирует совпадение числа независимых алгебраических соотношений для кривизны r^t с числом компонент экстра полей $\omega^{t>0}$ по модулю чисто калибровочных компонент вида $\delta\omega^{t+1} = \mathcal{T}^-\epsilon^{t+2}$. Можно показать, что оператор Υ_2^+ единственным образом фиксируется в виде

$$\Upsilon_2^+ = \mathcal{T}^0 \wedge \mathcal{T}^+. \quad (6.10)$$

На основе связей (6.8) поле ω^{t+1} может быть выражено через производные поля ω^t для любого $t > 0$. И, наконец, можно получить поля ω^t , выраженные в терминах производных поля ω^0 с порядком старшей производной, равным t .

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой статье мы построили явно ковариантную лагранжеву формулировку для AdS_5 безмассовых калибровочных полей смешанного типа симметрии в рамках $su(2, 2)$ -спинорного формализма. Подход, который мы использовали, основан на реперной формулировке полей смешанного типа симметрии, разработанной в работах [6], [7]. Наши результаты могут рассматриваться как окончательный шаг в изучении явно ковариантной лагранжевой формулировки AdS_5 калибровочных полей высших спинов в $su(2, 2)$ -формализме. Важной проблемой для дальнейших исследований является развитие развернутой формы динамики свободных полей смешанного типа симметрии, основанной на тензорах Вейля, возникающих из уравнений движения и связей для экстра полей, проанализированных в разделе 6. Это позволит сформулировать центральную теорему массовой поверхности подобно случаю полностью симметричных калибровочных полей [2], [19] и установить связь с развернутой формулировкой полей смешанного типа симметрии, развитой в работе [4]. Построенная лагранжева формулировка делает также возможным изучение $\mathcal{N}$ -расширенных суперсимметричных кубических взаимодействий AdS_5 калибровочных полей на уровне функционалов действия, обобщая, таким образом, $\mathcal{N} = 0, 1$ результаты работ [2], [5].

Благодарности. Автор признателен М. А. Васильеву за полезные обсуждения. Работа частично поддержана РФФИ (грант № 02-02-16944), Программой поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-1578-2003-2), INTAS (грант № 03-51-6346).

Список литературы

- [1] E. Sezgin, P. Sundell, *JHEP*, 2001, № 09, 036; [hep-th/0105001](#).
- [2] M. A. Vasiliev, *Nucl. Phys. B*, **616** (2001), 106; Erratum, **652** (2003), 407; [hep-th/0106200](#).
- [3] K. B. Alkalaev, *Phys. Lett. B*, **519** (2001), 121; [hep-th/0107040](#).
- [4] E. Sezgin, P. Sundell, *JHEP*, 2001, № 09, 025; [hep-th/0107186](#).
- [5] K. B. Alkalaev, M. A. Vasiliev, *Nucl. Phys. B*, **655** (2003), 57; [hep-th/0206068](#).
- [6] K. B. Alkalaev, O. V. Shaynkman, M. A. Vasiliev, *Nucl. Phys. B*, **692** (2004), 363; [hep-th/0311164](#); K. B. Алкалаев, *ТМФ*, **140** (2004), 424; [hep-th/0311212](#).
- [7] K. B. Alkalaev, O. V. Shaynkman, M. A. Vasiliev, *JHEP*, 2005, № 08, 069; [hep-th/0501108](#).
- [8] E. Sezgin, P. Sundell, *Nucl. Phys. B*, **644** (2002), 303; Err., **660** (2003), 403; [hep-th/0205131](#); M. Bianchi, *Fortschr. Phys.*, **53** (2005), 665; [hep-th/0409304](#).
- [9] M. A. Vasiliev, *Phys. Lett. B*, **567** (2003), 139; [hep-th/0304049](#); *JHEP*, 2004, № 12, 046; [hep-th/0404124](#).
- [10] E. S. Fradkin, V. Y. Linetsky, *Mod. Phys. Lett. A*, **4** (1989), 2363.
- [11] M. A. Vasiliev, *Phys. Rev. D*, **66** (2002), 066006; [hep-th/0106149](#).
- [12] R. R. Metsaev, *Phys. Lett. B*, **354** (1995), 78; **419** (1998), 49; [hep-th/9802097](#); *Arbitrary spin massless bosonic fields in d-dimensional anti-de Sitter space*, [hep-th/9810231](#).
- [13] R. R. Metsaev, *Phys. Lett. B*, **531** (2002), 152; [hep-th/0201226](#).
- [14] L. Brink, R. R. Metsaev, M. A. Vasiliev, *Nucl. Phys. B*, **586** (2000), 183; [hep-th/0005136](#); T. Biswas, W. Siegel, *JHEP*, 2002, № 07, 005; [hep-th/0203115](#); Yu. M. Zinoviev, *On massive mixed symmetry tensor fields in Minkowski space and (A)dS*, [hep-th/0211233](#); *First order formalism for mixed symmetry tensor fields*, [hep-th/0304067](#); P. de Medeiros, *Class. Quant. Grav.*, **21** (2004), 2571; [hep-th/0311254](#).
- [15] K. Stelle, P. West, *Phys. Rev. D*, **21** (1980), 1466; C. R. Preitschopf, M. A. Vasiliev, “The superalgebraic approach to supergravity”, *Proc. 31th Intern. Ahrenshoop Symp. on the Theory of Elementary Particles (Buckow, September 2–6, 1997)*, eds. H. Dorn, D. Lüst, G. Weight, Wiley-VCH, Weinheim, 1998, 483; [hep-th/9805127](#).
- [16] M. A. Vasiliev, “Higher spin gauge theories: star-product and AdS Space”, *“The Many Faces of the Superworld”*, Yuri Golfand Memorial Volume, ed. M. Shifman, World Scientific, Singapore, 2000, 533; [hep-th/9910096](#).
- [17] T. Curtright, *Phys. Lett. B*, **165** (1985), 304.
- [18] P. K. Townsend, K. Pilch, P. van Nieuwenhuizen, *Phys. Lett. B*, **136** (1984), 38; Add., **137** (1984), 443.
- [19] V. E. Lopatin, M. A. Vasiliev, *Mod. Phys. Lett. A*, **3** (1988), 257; M. A. Vasiliev, *Nucl. Phys. B*, **301** (1988), 26.

Поступила в редакцию 15.03.2006