Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ли Гу-Цян, Квантовая энтропия полей Дирака в черных дырах, *ТМФ*, 2006, том 149, номер 1, 60–64

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf3830>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 13:17:33

© 2006 г.

Гу-Цян Ли*

КВАНТОВАЯ ЭНТРОПИЯ ПОЛЕЙ ДИРАКА В ЧЕРНЫХ ДЫРАХ

С использованием модели жесткой стенки исследуется квантовая энтропия дираковских полей в статической черной дыре, содержащей монополь или космическую струну. Показано, что выражение для энтропии поля Дирака содержит квадратично-расходящийся член и два логарифмически-расходящихся члена, поэтому она не пропорциональна энтропии скалярного поля. Вклад логарифмического члена в энтропию зависит от характеристик черной дыры и всегда отрицателен.

Ключевые слова: квантовая энтропия, поле Дирака, модель жесткой стенки, черная дыра.

1. ВВЕДЕНИЕ

Начиная с того момента, как Бекенштейн и Хокинг [1] открыли с помощью сравнения физики черных дыр и термодинамики пропорциональность энтропии черной дыры площади горизонта событий, и с момента открытия эффекта испарения черных дыр были приложены немалые усилия для исследования статистического происхождения энтропии черных дыр [2]–[4]. При этом широко применялся метод “жесткой стенки”, предложенный т Хоофтом, с использованием которого он впервые исследовал вклад в энтропию черной дыры Шварцшильда, обусловленный присутствием скалярного поля [2]. Впоследствии при помощи этого метода были исследованы скалярные поля в различных фоновых полях черной дыры [3]. Недавно этот же метод был успешно применен при исследованиях структуры расходимостей статистической энтропии статических сферически-симметричных и аксиально-симметричных черных дыр, обусловленных присутствием спиновых полей [4]. Для статической черной дыры с глобальным монополем или с космической струной Джинг [5] исследовал энтропию скалярного поля с использованием модели жесткой стенки и евклидова интеграла по путям, а Лу [6] – энтропию поля Дирака с использованием модели жесткой стенки, но ни один из исследователей не рассматривал логарифмические поправки от следующего порядка пертурбативного разложения.

*School of Information Technology and Science, Zhanjiang Normal College, Zhanjiang, Guangdong, China. E-mail: zsgqli@hotmail.com

Цель данной работы состоит в изучении квантовой энтропии поля Дирака в статической черной дыре с глобальным полем монополя или с космической струной и исследовании с применением модели жесткой стенки того, как наличие спина у дираковской частицы влияет на эту энтропию.

Метрики снаружи черной дыры с глобальным монополем или с космической струной соответственно имеют вид [5], [6]

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(1 - 8\pi\eta^2)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (1)$$

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2[d\theta^2 + (1 - \mu^2)\sin^2\theta d\varphi^2], \quad (2)$$

где M – массовый параметр Шварцшильда, η – масштаб нарушения симметрии, а μ – удельная масса на единицу длины струны.

2. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПОЛЯ ДИРАКА

В искривленном пространстве-времени уравнения для безмассового спинорного поля Дирака имеют вид

$$\begin{aligned} (D + \varepsilon - \rho)F_1 + (\bar{\delta} + \pi - \alpha)F_2 &= 0, \\ (\Delta + \mu - \gamma)F_2 + (\delta + \beta - \tau)F_1 &= 0, \\ (D + \varepsilon^* - \rho^*)G_2 + (\delta + \pi^* - \alpha^*)G_1 &= 0, \\ (\Delta + \mu^* - \gamma^*)G_1 + (\bar{\delta} + \beta^* - \tau^*)G_2 &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\Phi = (F_1, F_2, G_1, G_2)^T$ – четырехкомпонентный спинор, $D = l^\mu \partial_\mu$, $\Delta = n^\mu \partial_\mu$, $\delta = m^\mu \partial_\mu$ – обыкновенные дифференциальные операторы, а $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ – спиновые коэффициенты Ньюмана–Пенроуза.

Рассмотрим статическую сферически-симметричную черную дыру общего вида, метрика которой может быть записана как

$$ds^2 = B dt^2 - B^{-1} dr^2 - C(d\theta^2 + b \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (4)$$

где $B = 1 - 2M/r$ и b – константа.

Чтобы записать уравнения (3) в вышеприведенном пространстве-времени черной дыры, выберем нулевую тетраду в виде

$$\begin{aligned} l^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2B}}(1, -B, 0, 0), \\ n^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2B}}(1, B, 0, 0), \\ m^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2C}}\left(0, 0, -1, -i\frac{\operatorname{cosec}\theta}{\sqrt{b}}\right). \end{aligned} \quad (5)$$

Из уравнений (4) и (5) можно получить ненулевые спиновые коэффициенты, если применить формулу Ньюмана–Пенроуза [7]:

$$\rho = \mu = \frac{\sqrt{BC'}}{2\sqrt{2C}}, \quad \gamma = \varepsilon = -\frac{B'}{4\sqrt{2B}}, \quad \alpha = -\beta = \frac{\operatorname{ctg}\theta}{2\sqrt{2C}}. \quad (6)$$

С использованием этой формулы и с помощью преобразований

$$\begin{aligned} F_1 &= C^{-1/2} R_{-1/2}(r) e^{-iEt} Y_{-1/2}(\theta, \varphi), \\ F_2 &= R_{+1/2}(r) e^{-iEt} Y_{+1/2}(\theta, \varphi), \\ G_1 &= R_{+1/2}(r) e^{-iEt} Y_{-1/2}(\theta, \varphi), \\ G_2 &= C^{-1/2} R_{-1/2}(r) e^{-iEt} Y_{+1/2}(\theta, \varphi) \end{aligned} \quad (7)$$

получим, что уравнения для поля Дирака (3) могут быть теперь приведены к виду

$$CB^2 \frac{d^2 R_{-1/2}}{dr^2} + \frac{(CB^2)'}{2} \frac{dR_{-1/2}}{dr} + \left[CE^2 + \frac{iE(C'B - B'C)}{2} + \frac{C'B' + 2CB''}{8} B - \lambda^2 B \right] R_{-1/2} = 0, \quad (8)$$

$$CB^2 \frac{d^2 R_{+1/2}}{dr^2} + \frac{(CB^2)'}{2} \frac{dR_{+1/2}}{dr} + \left[CE^2 + \frac{iE(C'B - B'C)}{2} + \frac{4BC'' + 5C'B' + 2CB''}{8} B - \lambda^2 B \right] R_{+1/2} = 0, \quad (9)$$

$$\left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{b \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \pm \frac{i \cos \theta}{\sqrt{b} \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\operatorname{ctg}^2 \theta}{4} - \frac{1}{2} + \lambda^2 \right) Y_{\pm 1/2} = 0. \quad (10)$$

Уравнение (10) показывает, что $Y_{\pm 1/2}(\theta, \varphi)$ представляют собой сферические гармоники со спиновыми весами, а константу разделения переменных следует выбрать равной $\lambda^2 = (l + 1/2)^2$ [8]. Здесь l, m – целые числа, удовлетворяющие неравенствам $l \geq s$ и $-l \leq m \leq l$.

3. КВАНТОВАЯ ЭНТРОПИЯ

Применяя приближение Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна с $R_{\pm}(r) = e^{i\phi_{\pm}(r)}$, получим, что уравнения (8) и (9) определяют радиальное волновое число $k(r, l, E) \equiv \partial \phi / \partial r$:

$$k_{-1/2} = \frac{1}{B\sqrt{C}} \left[CE^2 + \frac{C'B' + 2CB''}{8} B - B \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (11)$$

$$k_{+1/2} = \frac{1}{B\sqrt{C}} \left[CE^2 + \frac{4BC'' + 5C'B' + 2CB''}{8} B - B \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (12)$$

Условия жесткой стенки имеют вид $R_{-1/2} = R_{+1/2} = 0$ при $r = r_H + \varepsilon$ и при $r = r_H + L$, где $0 < \varepsilon \ll r_H$, $L \gg r_H$, а $r_H = 2M$ – горизонт событий. Тогда число мод с энергиями, меньшими E , равно

$$\begin{aligned} g(E) &= \int (2l + 1) dl \frac{1}{\pi} \int_{r_H + \varepsilon}^{r_H + L} 2[k_{-1/2}(r, l, E) + k_{+1/2}(r, l, E)] dr = \\ &= \frac{4}{3\pi} \int_{r_H + \varepsilon}^{r_H + L} \frac{C dr}{B^2} \left\{ \left[E^2 + \frac{B}{C} \left(\frac{C'B' + 2CB''}{8} - 1 \right) \right]^{3/2} + \right. \\ &\quad \left. + \left[E^2 + \frac{B}{C} \left(\frac{4BC'' + 5C'B' + 2CB''}{8} - 1 \right) \right]^{3/2} \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Свободная энергия термического ансамбля спинорных дираковских частиц с обратной температурой β имеет вид

$$-\beta F = \sum_E \ln(1 + e^{-\beta E}). \quad (14)$$

Применяя уравнение (13) для нахождения плотности состояний и опуская стандартный вклад от вакуума, окружающего систему, получим главный вклад в свободную энергию:

$$\begin{aligned} F &= -\frac{1}{\beta} \int_0^\infty dE \frac{dg(E)}{dE} \ln(1 + e^{-\beta E}) = -\int_0^\infty \frac{e^{-\beta E}}{1 + e^{-\beta E}} g(E) dE = \\ &= -\frac{7\pi^3}{45\beta^4} \int_{r_H+\epsilon}^{r_H+L} \frac{C}{B^2} dr - \frac{\pi}{6\beta^2} \int_{r_H+\epsilon}^{r_H+L} \frac{dr}{B} \left[\frac{2BC'' + 3C'B' + 2CB''}{4} - 2 \right] = \\ &= -\frac{7\pi^3 r_H^2 C(r_H)}{45\beta^4 \epsilon} - \frac{7\pi^3 [r_H^2 C'(r_H) + 2r_H C(r_H)]}{45\beta^4} \ln \frac{L}{\epsilon} - \\ &\quad - \frac{\pi}{6\beta^2} \left(\frac{3C'(r_H)}{4} - \frac{C(r_H)}{r_H} - 2r_H \right) \ln \frac{L}{\epsilon}. \end{aligned} \quad (15)$$

Применяя формулу $S = \beta^2 (\partial F / \partial \beta)$, получим квантовую энтропию:

$$\begin{aligned} S &= \frac{28\pi^3 r_H^2 C(r_H)}{45\beta^3 \epsilon} + \frac{28\pi^3 [r_H^2 C'(r_H) + 2r_H C(r_H)]}{45\beta^3} \ln \frac{L}{\epsilon} + \\ &\quad + \frac{\pi}{3\beta} \left(\frac{3C'(r_H)}{4} - \frac{C(r_H)}{r_H} - 2r_H \right) \ln \frac{L}{\epsilon}. \end{aligned} \quad (16)$$

Выберем обратную температуру β , отвечающую температуре Хокинга на горизонте черной дыры, т.е. $\beta = 4\pi r_H = 8\pi M$, и положим $l_p^2 = 2\epsilon^2/15$ и $\Lambda^2 = L\epsilon^2/\epsilon$, где $l_p = \sqrt{\epsilon\beta/\pi}$ есть собственное расстояние между жесткой стенкой и горизонтом, а ϵ и Λ представляют собой параметры соответственно ультрафиолетового и инфракрасного обрезаний [9]. Статистически-механическая энтропия (16) при этом имеет вид

$$S = \frac{7A_h}{96\sqrt{b}\pi\epsilon^2} + \frac{7}{360} \left[\frac{C'(r_H)}{r_H} + \frac{2C(r_H)}{r_H^2} \right] \ln \frac{\Lambda}{\epsilon} + \frac{1}{6} \left(\frac{3C'(r_H)}{4r_H} - \frac{C(r_H)}{r_H^2} - 2 \right) \ln \frac{\Lambda}{\epsilon}, \quad (17)$$

где $A_h = 4\pi\sqrt{b}C(r_H)$ – площадь поверхности горизонта событий.

Полагая $C = (1 - 8\pi\eta^2)r^2$ и $b = 1$ в выражении (17), получим энтропию поля Дирака в черной дыре с глобальным монополем:

$$S_{\text{monopole}} = \frac{7A_h^{\text{monopole}}}{96\pi\epsilon^2} + \frac{7(1 - 8\pi\eta^2)}{90} \ln \frac{\Lambda}{\epsilon} - \frac{1}{12} (3 + 8\pi\eta^2) \ln \frac{\Lambda}{\epsilon}, \quad (18)$$

где $A_h^{\text{monopole}} = 4\pi(1 - 8\pi\eta^2)r_H^2$. Если же в выражении (17) выбрать $C = r^2$ и $b = 1 - \mu^2$, то получим энтропию поля Дирака в черной дыре с космической струной:

$$S_{\text{string}} = \frac{7A_h^{\text{string}}}{96\sqrt{1 - \mu^2}\pi\epsilon^2} + \frac{7}{90} \ln \frac{\Lambda}{\epsilon} - \frac{1}{4} \ln \frac{\Lambda}{\epsilon}, \quad (19)$$

где $A_h^{\text{string}} = 4\pi\sqrt{1 - \mu^2}r_H^2$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Нами была исследована квантовая энтропия поля Дирака в черной дыре с глобальным монополем или с космической струной в рамках модели жесткой стенки. Уравнения (18) и (19) показывают, что, если опустить вклад от окружающей вакуумной системы, квантовая энтропия поля Дирака содержит две составляющих. Первая представляет собой собственный вклад от горизонта, и она расходится квадратично на горизонте событий. Вторая составляющая содержит два логарифмически-расходящихся члена, и эта составляющая не пропорциональна площади горизонта событий. Первые два члена в формулах (18) и (19) имеют ту же структуру, что и в случае скалярного поля; различными оказываются только коэффициенты. Однако в выражениях (18) и (19) присутствует и третий член, который задает вклад спинов дираковских частиц в энтропию, и этим членом нельзя пренебрегать как несущественной аддитивной константой. Таким образом, полное выражение не представляется в виде, аналогичном случаю энтропии скалярного поля. Этот результат сильно отличается от выводов работ [5], [6]. Отметим также, что полный логарифмический член всегда уменьшает энтропию черных дыр. Если подставить $\eta = 0$ в формулу (18) или $\mu = 0$ в формулу (19), то мы получим результат для черной дыры Шварцшильда.

Список литературы

- [1] J. D. Bekenstein, *Phys. Rev. D*, **7** (1973), 2333; S. W. Hawking, *Commun. Math. Phys.*, **43** (1975), 199.
- [2] G. 't Hooft, *Nucl. Phys. B*, **256** (1985), 727.
- [3] S. N. Solodukhin, *Phys. Rev. D*, **51** (1995), 609; M. H. Lee, J. K. Kim, *Phys. Rev. D*, **54** (1996), 3904; J. Ho, W. T. Kim, Y. J. Park, H. Shin, *Class. Q. Grav.*, **14** (1997), 2617; R. G. Cai, L. B. Zhu, *Phys. Lett. A*, **219** (1996), 191; W. B. Liu, Z. Zhao, *Chin. Phys. Lett.*, **18** (2001), 310; L. C. Zhang, Y. Q. Wu, R. Zhao, *Chin. Phys.*, **13** (2004), 974; J. L. Jing, M. L. Yan, *Chin. Phys.*, **9** (2000), 389; T. R. Ding, Y. Q. Wu, L. C. Zhang, *Chin. Phys.*, **13** (2004), 268.
- [4] Z. H. Li, *Phys. Rev. D*, **62** (2000), 024001; *Mod. Phys. Lett. A*, **17** (2002), 887; G. Q. Li, *Acta. Phys. Sin.*, **52** (2003), 1346; **55** (2006), 995; *Chin. Phys.*, **14** (2005), 468; L. Q. Mi, *Acta. Phys. Sin.*, **53** (2004), 2065; J. L. Jing, M. L. Yan, *Phys. Rev. D*, **64** (2001), 064015; **63** (2001), 084028.
- [5] J. L. Jing, *Chin. Phys. Lett.*, **14** (1997), 495.
- [6] M. W. Lu, *Chin. J. Phys.*, **43** (2005), 909.
- [7] E. Newman, R. Penrose, *J. Math. Phys.*, **3** (1962), 566.
- [8] Z. H. Li, L. Q. Mi, *Acta. Phys. Sin.*, **48** (1999), 575.
- [9] S. N. Solodukhin, *Phys. Rev. D*, **51** (1995), 618.

Поступила в редакцию 15.02.2006