Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Тирулогасантар, А. Кржизак, К. Д. Кататбех, Кватернионные векторные когерентные состояния и суперсимметричный гармонический осциллятор, *ТМФ*, 2006, том 149, номер 1, 80–98

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf3833>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 13:27:13

© 2006 г. К. Тирулогасантар*, А. Кржизак*, К. Д. Кататбех†

КВАТЕРНИОННЫЕ ВЕКТОРНЫЕ КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ И СУПЕРСИММЕТРИЧНЫЙ ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР

По аналогии со стандартными каноническими когерентными состояниями обычного гармонического осциллятора кватернионные векторные когерентные состояния реализуются как когерентные состояния суперсимметричного гармонического осциллятора с нарушенной симметрией. В терминах этих состояний исследуются неклассические свойства осциллятора, такие как распределение числа фотонов и отношение сигнал–квантовый шум. Обсуждаются свойства сжимаемости и временной стабильности когерентных состояний. Построены ортогональные многочлены, ассоциированные с кватернионными векторными когерентными состояниями.

Ключевые слова: когерентные состояния, векторные когерентные состояния.

1. ВВЕДЕНИЕ

Канонические когерентные состояния (ККС) обычного гармонического осциллятора эквивалентным образом описываются как собственные состояния оператора уничтожения, как траектории фундаментального вектора под действием оператора смещения и как состояния с минимальной неопределенностью [1], [2]. Различные обобщения ККС обсуждались в многочисленных работах [1], [3]–[5]. Из большинства обобщений можно заключить, что эти три определения ККС перестают быть эквивалентными. В случае суперсимметричного гармонического осциллятора исследование так называемых суперкогерентных состояний (СС) имеет уже сравнительно долгую историю [6]–[10]. В большинстве случаев СС представляли собой собственные состояния суперсимметричного оператора уничтожения [8]–[10]. В работе [9] с некоторыми исключениями СС были получены как состояния с минимальной неопределенностью. В рамках теории супергрупп СС также были выведены с

*Concordia University, Montreal, Quebec, Canada. E-mail: santhar@cs.concordia.ca; krzyzak@cs.concordia.ca

†Jordan University of Science and Technology, Irbid 22110, Jordan.
E-mail: qutaibeh@hotmail.com

помощью оператора смещения [8]. В работе [7] показано, что эти три подхода перестают быть эквивалентными. Тем не менее утверждалось, что неэквивалентность возникает из-за определения оператора уничтожения [10]. Для восстановления эквивалентности в работе [10] было предложено рассматривать новый оператор уничтожения, представляющий собой расширение стандартного оператора уничтожения для гармонического осциллятора. Квантовый суперсимметричный гармонический осциллятор задается гамильтонианом [10]

$$H = \frac{1}{2}(\hat{p}^2 + \omega^2 \hat{q}^2) + \frac{1}{2}\omega\sigma_3 = \omega(a^\dagger a + f^\dagger f), \quad (1.1)$$

где a , $a^\dagger$ и f , $f^\dagger$ – соответствующие бозонные и фермионные операторы рождения и уничтожения. Они задаются формулами

$$\begin{aligned} a^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\omega\hat{q} - i\hat{p}), & a &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\omega\hat{q} + i\hat{p}), \\ f^\dagger &= \sigma_+ = \frac{1}{2}(\sigma_1 + i\sigma_2), & f &= \sigma_- = \frac{1}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2), \end{aligned}$$

где σ_1 , σ_2 и σ_3 – стандартные матрицы Паули. Эти операторы удовлетворяют соотношениям

$$[a, a^\dagger] = 1, \quad \{f, f^\dagger\} = 1.$$

Суперзаряды Q и $Q^\dagger$ определяются как

$$Q = i\sqrt{\omega} a^\dagger f, \quad Q^\dagger = i\sqrt{\omega} a f^\dagger.$$

Природа суперсимметрии проявляется в антикоммутаторе $H = \{Q, Q^\dagger\}$. В большинстве случаев СС можно получить как собственные состояния суперсимметричного оператора уничтожения

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix},$$

который удовлетворяет условию

$$[H, \hat{A}] = -\omega \hat{A}. \quad (1.2)$$

В работе [10] утверждалось, что, поскольку оператор

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

одновременно удовлетворяет коммутационному соотношению (1.2), он также может быть выбран в качестве приемлемого суперсимметричного оператора уничтожения. Гамильтониан H может быть записан в виде

$$H = \begin{pmatrix} H_+ & 0 \\ 0 & H_- \end{pmatrix}.$$

В случае нарушенной суперсимметрии операторы H_+ и H_- строго изоспектральны [11], т.е. $E_n^+ = E_n^- = n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Обозначим через $\psi_n^\pm$ соответствующие нормированные собственные функции. Модель Джайнса–Каммингса дает описание системы со спином $1/2$, взаимодействующей с одномодовым магнитным полем, осциллирующая компонента которого ориентирована вдоль оси x , а постоянная компонента – вдоль оси z . В приближении вращающейся волны эта система задается гамильтонианом [12]

$$H_{\text{JC}} = \omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \sigma_0 + \frac{\omega_0}{2} \sigma_3 + \kappa (a^\dagger \sigma_- + a \sigma_+),$$

где ω – частота осцилляций полевой моды, ω_0 – атомная частота, κ – константа связи, $a, a^\dagger$ – обычные полевые операторы уничтожения и рождения, а σ_0 – единичная матрица размера 2×2 . В отсутствие осциллирующей составляющей магнитного поля ($\kappa = 0$) и в точке точного резонанса ($\omega = \omega_0$) получим (при $\omega = 1$), что

$$\hat{H}_{\text{JC}} = \begin{pmatrix} a^\dagger a + 1 & 0 \\ 0 & a^\dagger a \end{pmatrix}.$$

В этом случае энергии равны

$$\varepsilon_n^+ = n + 1, \quad \varepsilon_n^- = n.$$

Пусть $\Psi_n^\pm$ – соответствующие собственные функции. Положим $\hat{\varepsilon}_n^+ = \varepsilon_n^+ - \varepsilon_0^+$. Пусть $\chi_\pm$ – базис в $\mathbb{C}^2$, а $\{\phi_n\}_{n=0}^\infty$ – ортонормальный базис абстрактного гильбертова пространства $\mathfrak{H}$. Тогда набор векторов $\{\chi_\pm \otimes \phi_n\}_{n=0}^\infty$ образует ортонормальный базис в гильбертовом пространстве $\mathbb{C}^2 \otimes \mathfrak{H}$. Произведем следующее отождествление:

$$\Psi_n^+ := \psi_n^+ := \chi_+ \otimes \phi_n, \quad \Psi_n^- := \psi_n^- := \chi_- \otimes \phi_n.$$

Таким образом, пространство $\mathbb{C}^2 \otimes \mathfrak{H}$ можно выбрать в качестве гильбертова пространства состояний для гамильтонианов H и $\hat{H}_{\text{JC}}$. Положим

$$R(n) = \text{diag}(E_n^+!, E_n^-!) = (\varepsilon_n^+!, \varepsilon_n^-!) = n! \mathbb{I}_2, \quad Z = \text{diag}(z, v),$$

где $R(n)$, Z – диагональные матрицы размера 2×2 , $\mathbb{I}_2$ – единичная (2×2) -матрица, $E_n^+! = E_1^+ E_2^+ \dots E_n^+$ – обобщенный факториал, $z = r e^{i\theta}$, $v = s e^{i\eta}$ и $\theta, \eta \in [0, 2\pi)$, $r, s \in [0, \infty)$. Введем обозначение $|Z| = [Z Z^\dagger]^{1/2}$, где $Z^\dagger$ – комплексно-сопряженная транспонированная матрица для Z . Запишем набор когерентных состояний (КС) для гамильтонианов H и $\hat{H}_{\text{JC}}$ в виде

$$|Z, \pm\rangle = \mathcal{N}(Z)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} R(n)^{-1/2} Z^n \chi_\pm \otimes \phi_n = \mathcal{N}(Z)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z^n}{\sqrt{n!}} \chi_\pm \otimes \phi_n. \quad (1.4)$$

Когда состояния нормированы с помощью соотношения

$$\sum_{k=\pm} \langle Z, k | Z, k \rangle = 1,$$

получаем

$$\mathcal{N}(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{Tr}(|Z|^{2n})}{n!} = e^{r^2} + e^{s^2}$$

(детали см. в работах [4], [5]). Пусть $D = [0, 2\pi) \times [0, \infty)$. Разбиение единицы при этом имеет вид

$$\sum_{k=\pm} \int_{D \times D} |Z, k\rangle \langle Z, k| d\mu(Z) = \mathbb{I}_2 \otimes I_{\mathfrak{H}},$$

где

$$d\mu(Z) = \frac{rs}{\pi^2} (e^{r^2} + e^{s^2}) e^{r^2+s^2} d\zeta dr d\eta ds.$$

Далее, общий набор КС может быть представлен в виде

$$|Z\rangle = c_+ |Z, +\rangle + c_- |Z, -\rangle, \quad (1.5)$$

где $|c_+|^2 + |c_-|^2 = 1$ и $c_+, c_- \in \mathbb{C}$. В следующем разделе из (1.4) будут получены кватернионные векторные когерентные состояния (КВКС) из работы [4]. На самом деле эта процедура обсуждалась в статье [5]. Основная цель нашей работы состоит в исследовании физических свойств КВКС. При этом связь с суперсимметричным гармоническим осциллятором возникает только при интерпретации КВКС как собственных состояний оператора A из (1.3). Чтобы не слишком далеко отклоняться от ККС обычного гармонического осциллятора, рассмотрим гамильтониан $\mathbf{H} = A^\dagger A = \widehat{H}_{\text{JC}} - \mathbf{I}_2$, где $A^\dagger$ – оператор, сопряженный оператору A из (1.3), и $\mathbf{I}_2 = \text{diag}(1, 0)$.

2. КВАТЕРНИОННЫЕ ВЕКТОРНЫЕ КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ

Обсудим вкратце КВКС в этом разделе. Мы ассоциируем состояния (1.4) с КВКС. Подробное обсуждение можно найти в статьях [4], [5]. В работе [4] КВКС были построены с использованием комплексного представления для кватернионов с помощью матриц размера 2×2 . Применяя базисные матрицы

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad -i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad i\sigma_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

мы можем записать кватернион общего положения в виде

$$\mathfrak{q} = x_0 \sigma_0 + i \underline{x} \cdot \underline{\sigma},$$

где $x_0 \in \mathbb{R}$, $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ и $\underline{\sigma} = (\sigma_1, -\sigma_2, \sigma_3)$. Таким образом,

$$\mathfrak{q} = \begin{pmatrix} x_0 + ix_3 & -x_2 + ix_1 \\ x_2 + ix_1 & x_0 - ix_3 \end{pmatrix}.$$

Удобно ввести сферические координаты

$$x_0 = r \cos \theta, \quad x_1 = r \sin \theta \sin \phi \cos \psi, \quad x_2 = r \sin \theta \sin \phi \sin \psi, \quad x_3 = r \sin \theta \cos \phi,$$

в которых $r \in [0, \infty)$, $\phi \in [0, \pi]$ и $\theta, \psi \in [0, 2\pi]$. В терминах этих координат

$$\mathbf{q} = A(r)e^{i\theta\sigma(\hat{n})} = r(\mathbb{I}_2 \cos \theta + i\sigma(\hat{n}) \sin \theta),$$

где $\hat{n}$ – единичный вектор в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, угловые координаты которого суть θ, φ, ψ ,

$$A(r) = r\sigma_0, \quad \sigma(\hat{n}) = \begin{pmatrix} \cos \phi & e^{i\psi} \sin \phi \\ e^{-i\psi} \sin \phi & -\cos \phi \end{pmatrix}, \quad \sigma(\hat{n})^2 = \sigma_0.$$

Следующий набор векторов задает набор векторных когерентных состояний (ВКС):

$$|\mathbf{q}, \pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-r^2/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathbf{q}^m}{\sqrt{m!}} \chi_{\pm} \otimes \phi_m \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathfrak{H}, \quad (2.1)$$

где нормировка состояний имеет вид

$$\sum_{k=\pm} \langle \mathbf{q}, k | \mathbf{q}, k \rangle = 1.$$

Пусть $D = \mathbb{R}^+ \times (0, 2\pi] \times S^2$, где S^2 – единичная сфера, а (ϕ, ψ) – угловые координаты точки на этой сфере. Введем меру на D с помощью соотношений $d\mu(r, \theta) = r dr d\theta d\Omega(\phi, \psi)$ при $d\Omega(\phi, \psi) = (1/4\pi) \sin \phi d\phi d\psi$. Разбиение единицы имеет при этом вид

$$\sum_{k=\pm} \int_D |\mathbf{q}, k\rangle \langle \mathbf{q}, k| d\mu(r, \theta, \phi, \psi) = \mathbb{I}_2 \otimes I_{\mathfrak{H}}.$$

Будем называть состояния (2.1) КВКС. В дальнейшем будет обсуждаться связь между состояниями (1.4) и (2.1). В состоянии Z из (1.4) положим $v = \bar{z}$, т.е. $Z = \text{diag}(z, \bar{z})$. Рассмотрим $u \in SU(2)$ и возьмем $\mathfrak{Z} = uZu^\dagger$. Так как общий элемент группы $SU(2)$ может быть представлен в виде $u = u_{\zeta_1} u_\phi u_{\zeta_2}$ при $u_{\zeta_1} = \text{diag}(e^{i\zeta_1/2}, e^{-i\zeta_1/2})$, $u_{\zeta_2} = \text{diag}(e^{i\zeta_2/2}, e^{-i\zeta_2/2})$ и

$$u_\phi = \begin{pmatrix} \cos \frac{\phi}{2} & i \sin \frac{\phi}{2} \\ i \sin \frac{\phi}{2} & \cos \frac{\phi}{2} \end{pmatrix}, \quad \zeta_1, \zeta_2 \in [0, 2\pi), \quad \phi \in [0, \pi],$$

то для $\zeta_1 = \zeta_2 = \psi$ легко видеть, что $\mathfrak{Z} = r(\mathbb{I}_2 \cos \theta + i\sigma(\hat{n}) \sin \theta) = \mathbf{q}$ и $|uZu^\dagger, \pm\rangle = |\mathbf{q}, \pm\rangle$. Действия операторов уничтожения, рождения и числа частиц в базисе $\{\phi_m\}_{m=0}^{\infty}$ задаются соответствующими выражениями:

$$a\phi_m = \sqrt{m} \phi_{m-1}, \quad a^\dagger \phi_m = \sqrt{m+1} \phi_{m+1}, \quad N' \phi_m = m\phi_m. \quad (2.2)$$

Соответствующие операторы для КВКС $|\mathbf{q}, \pm\rangle$ имеют вид

$$A = \mathbb{I}_2 \otimes a, \quad A^\dagger = \mathbb{I}_2 \otimes a^\dagger, \quad N = \mathbb{I}_2 \otimes N',$$

где A – оператор уничтожения из (1.3), $A^\dagger$ – оператор, сопряженный оператору A , и $N = \mathbf{H} = A^\dagger A = \hat{H}_{\text{JC}} - \mathbf{I}_2$. Они действуют на КВКС по правилам

$$A|\mathbf{q}, \pm\rangle = \mathbf{q}|\mathbf{q}, \pm\rangle, \quad (2.3)$$

$$A^\dagger|\mathbf{q}, \pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-r^2/2} \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{q}^m \sqrt{\frac{m+1}{m!}} \chi_{\pm} \otimes \phi_{m+1}, \quad (2.4)$$

$$N|\mathbf{q}, \pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-r^2/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m\mathbf{q}^m}{\sqrt{m!}} \chi_{\pm} \otimes \phi_m. \quad (2.5)$$

Здесь снова общий набор КВКС может быть представлен как

$$|\mathbf{q}\rangle = c'_+|\mathbf{q}, +\rangle + c'_-|\mathbf{q}, -\rangle, \quad (2.6)$$

где $c'_+, c'_- \in \mathbb{C}$ и $|c'_+|^2 + |c'_-|^2 = 1$. Поскольку КВКС представляют собой собственные состояния A , они образуют набор КС для суперсимметричного гармонического осциллятора, а также и для гамильтониана $\mathbf{H}$. Действия коммутаторов имеют вид

$$\begin{aligned} [a, a^\dagger]\phi_m &= \phi_m, & [A, A^\dagger]|\mathbf{q}, \pm\rangle &= |\mathbf{q}, \pm\rangle, \\ [q, p]\phi_m &= i\phi_m, & [Q, P]|\mathbf{q}, \pm\rangle &= i|\mathbf{q}, \pm\rangle, \end{aligned}$$

где

$$q = \frac{a + a^\dagger}{\sqrt{2}}, \quad p = \frac{a - a^\dagger}{\sqrt{2}i}, \quad Q = \frac{A + A^\dagger}{\sqrt{2}}, \quad P = \frac{A - A^\dagger}{\sqrt{2}i} \quad (2.7)$$

– квадратурные операторы.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. В работе [4] было показано, что КВКС можно реализовать как состояния с минимальной неопределенностью. Кроме того, КВКС можно записать как

$$|\mathbf{q}, \pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp(\mathbf{q} \otimes a^\dagger + \mathbf{q}^\dagger \otimes a) \chi_{\pm} \otimes \phi_0.$$

Более того, этот оператор также можно связать с неприводимым унитарным представлением группы Вейля–Гейзенберга. Тем самым в предлагаемом подходе КВКС удовлетворяют всем трем эквивалентным определениям ККС (детали см. в работе [4]) и образуют набор КС для суперсимметричного гармонического осциллятора, а также и для гамильтониана $\mathbf{H}$.

3. ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА

В этом разделе исследуются физические свойства КВКС. Построены средние и дисперсии всех операторов. Рассмотрены распределение фотонных чисел, отношение сигнал–квантовый шум (ОСШ) и число Мандела. Показано, что число Мандела не характеризует распределение фотонных чисел, как это происходит в случае обычных “скалярных” КС. Также проанализированы свойства сжатия и временная эволюция КВКС. В итоге нам удалось ассоциировать с КВКС класс ортогональных матричных многочленов.

3.1. Средние. Чтобы увязать квантово-механические вычисления с данными, которые можно наблюдать в эксперименте, необходимо вычислить среднее от измеряемой величины. Среднее можно интерпретировать как среднюю величину наблюдаемой, которую мы рассчитываем получить в результате большого числа измерений. Для нормированного состояния $|\psi\rangle$ среднее от оператора F имеет вид

$$\langle F \rangle_{|\psi\rangle} = \langle \psi | F | \psi \rangle. \quad (3.1)$$

Средние мы будем интерпретировать как средние значения наблюдаемых, которые мы рассчитываем получить как состояния (1.4) или как КВКС, рассматриваемые в виде волновых функций когерентных состояний частицы, описываемой гамильтонианом суперсимметричного гармонического осциллятора или гамильтонианом $\mathbf{H}$. Представим теперь средние от операторов A , $A^\dagger$, N , P , Q относительно КВКС. Для оператора A имеем

$$\begin{aligned} \langle A \rangle_{|q,\pm\rangle} &= \langle q, \pm | A | q, \pm \rangle = \\ &= \frac{1}{2} e^{-r^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left\langle \frac{q^m}{\sqrt{m!}} \chi_{\pm} \left| \frac{q^{k+1}}{\sqrt{k!}} \chi_{\pm} \right. \right\rangle \langle \phi_m | \phi_k \rangle = \\ &= \frac{1}{2} e^{-r^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{r^{2m}}{m!} \langle \chi_{\pm} | q \chi_{\pm} \rangle = \frac{1}{2} \langle \chi_{\pm} | q \chi_{\pm} \rangle = \frac{r}{2} (\cos \theta \pm i \sin \theta \cos \phi). \end{aligned}$$

Аналогичным образом получим

$$\begin{aligned} \langle A^\dagger \rangle_{|q,\pm\rangle} &= \frac{r}{2} (\cos \theta \mp i \sin \theta \cos \phi), \\ \langle Q \rangle_{|q,\pm\rangle} &= \frac{r}{\sqrt{2}} \cos \theta, \quad \langle P \rangle_{|q,\pm\rangle} = \pm \frac{r}{\sqrt{2}} \sin \theta \cos \phi. \end{aligned}$$

Поскольку $N = \mathbf{H}$, среднее от N представляет собой среднюю энергию по состояниям $|q, \pm\rangle$, которая дается формулой

$$\langle N \rangle_{|q,\pm\rangle} = \frac{r^2}{2}.$$

В случае ККС обычного гармонического осциллятора ($z = r e^{i\theta}$),

$$|z\rangle = e^{-r^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \phi_n, \quad (3.2)$$

получим $\langle N' \rangle_{|z\rangle} = r^2$. Поскольку кватернионы обеспечивают естественное обобщение комплексных чисел, в силу двухкомпонентной природы состояний $|q, \pm\rangle$ здесь мы получаем, что $\langle N \rangle_{|q,\pm\rangle} = \langle N' \rangle_{|z\rangle} / 2$. Аналогичное сравнение можно провести и для остальных средних величин. Поскольку векторы $\chi_+ \otimes \phi_n$ и $\chi_- \otimes \phi_n$ ортогональны, средние по общему набору КВКС (2.6) можно получить сравнительно легко, например

$$\langle Q \rangle_{|q\rangle} = |c'_+|^2 \langle Q \rangle_{|q,+ \rangle} + |c'_-|^2 \langle Q \rangle_{|q,- \rangle} = \frac{r}{\sqrt{2}} \cos \theta.$$

Для сравнения рассмотрим средние по набору ВКС (1.4). Пусть

$$G_+(r, s) = \frac{e^{r^2}}{e^{r^2} + e^{s^2}}, \quad G_-(r, s) = \frac{e^{s^2}}{e^{r^2} + e^{s^2}}.$$

В терминах $G_{\pm}(r, s)$ средние могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \langle A \rangle_{|Z,+} &= zG_+(r, s), & \langle A \rangle_{|Z,-} &= vG_-(r, s), \\ \langle A^\dagger \rangle_{|Z,+} &= \bar{z}G_+(r, s), & \langle A^\dagger \rangle_{|Z,-} &= \bar{v}G_-(r, s), \\ \langle N \rangle_{|Z,+} &= r^2G_+(r, s), & \langle N \rangle_{|Z,-} &= s^2G_-(r, s), \\ \langle Q \rangle_{|Z,+} &= \sqrt{2}r \cos \theta G_+(r, s), & \langle Q \rangle_{|Z,-} &= \sqrt{2}s \cos \eta G_-(r, s), \\ \langle P \rangle_{|Z,+} &= \sqrt{2}r \sin \theta G_+(r, s), & \langle P \rangle_{|Z,-} &= \sqrt{2}s \sin \eta G_-(r, s). \end{aligned}$$

Так как $G_{\pm}(r, s) < 1$, эти средние можно рассматривать как “сжатые” соответствующие величины для ККС. Далее, можно легко видеть, что

$$\begin{aligned} \langle A^2 \rangle_{|q,\pm} &= \frac{r^2}{2}(2 \cos^2 \theta \pm 2i \cos \theta \sin \theta \cos \phi - 1), \\ \langle (A^\dagger)^2 \rangle_{|q,\pm} &= \frac{r^2}{2}(2 \cos^2 \theta \mp 2i \cos \theta \sin \theta \cos \phi - 1), \\ \langle AA^\dagger \rangle_{|q,\pm} &= \frac{1}{2}(r^2 + 1), & \langle N^2 \rangle_{|q,\pm} &= \frac{1}{2}r^2(r^2 + 1), \end{aligned}$$

в то время как для набора ВКС (1.4) имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \langle A^2 \rangle_{|Z,+} &= z^2G_+(r, s), & \langle A^2 \rangle_{|Z,-} &= v^2G_-(r, s), \\ \langle (A^\dagger)^2 \rangle_{|Z,+} &= \bar{z}^2G_+(r, s), & \langle (A^\dagger)^2 \rangle_{|Z,-} &= \bar{v}^2G_-(r, s), \\ \langle N^2 \rangle_{|Z,+} &= r^2(r^2 + 1)G_+(r, s), & \langle N^2 \rangle_{|Z,-} &= s^2(s^2 + 1)G_-(r, s), \\ \langle AA^\dagger \rangle_{|Z,+} &= (r^2 + 1)G_+(r, s), & \langle AA^\dagger \rangle_{|Z,-} &= (s^2 + 1)G_-(r, s). \end{aligned}$$

Средние от операторов Q^2 и P^2 имеют вид

$$\begin{aligned} \langle Q^2 \rangle_{|q,\pm} &= \frac{1}{4}(4r^2 \cos^2 \theta + 1), & \langle P^2 \rangle_{|q,\pm} &= \frac{1}{4}(4r^2 \sin^2 \theta + 1), \\ \langle Q^2 \rangle_{|Z,+} &= \frac{1}{2}(4r^2 \cos^2 \theta + 1)G_+(r, s), & \langle Q^2 \rangle_{|Z,-} &= \frac{1}{2}(4s^2 \cos^2 \eta + 1)G_-(r, s), \\ \langle P^2 \rangle_{|Z,+} &= \frac{1}{2}(4r^2 \sin^2 \theta + 1)G_+(r, s), & \langle P^2 \rangle_{|Z,-} &= \frac{1}{2}(4s^2 \sin^2 \eta + 1)G_-(r, s). \end{aligned}$$

3.2. Дисперсии операторов. Грубо говоря, дисперсия наблюдаемой характеризует ее “размытость” [13]. Дисперсия оператора F в нормированном состоянии Ψ задается формулой

$$(\Delta F)_\Psi^2 = \langle F^2 \rangle_\Psi - \langle F \rangle_\Psi^2.$$

Дисперсии операторов легко получить из вышеприведенных средних. Поскольку с дисперсиями операторов Q и P связаны разнообразные физические величины,

приведем список дисперсий:

$$\begin{aligned}
 (\Delta Q)_{|q,\pm}^2 &= (\Delta Q)_{|q}^2 = \frac{1}{4}(2r^2 \cos^2 \theta + 1), \\
 (\Delta P)_{|q,\pm}^2 &= \frac{1}{4}(2r^2 \sin^2 \theta (1 + \sin^2 \phi) + 1), \\
 (\Delta Q)_{|Z,+}^2 &= 2r^2 \cos^2 \theta G_+(r, s)G_-(r, s) + \frac{G_+(r, s)}{2}, \\
 (\Delta Q)_{|Z,-}^2 &= 2s^2 \cos^2 \eta G_+(r, s)G_-(r, s) + \frac{G_-(r, s)}{2}, \\
 (\Delta P)_{|Z,+}^2 &= 2r^2 \sin^2 \theta G_+(r, s)G_-(r, s) + \frac{G_+(r, s)}{2}, \\
 (\Delta P)_{|Z,-}^2 &= 2s^2 \sin^2 \eta G_+(r, s)G_-(r, s) + \frac{G_-(r, s)}{2}.
 \end{aligned}$$

Произведение в соотношении неопределенностей для нормированного состояния Ψ удовлетворяет соотношению [13]

$$(\Delta Q)_{|\Psi}^2 (\Delta P)_{|\Psi}^2 \geq \frac{1}{4} |\langle [Q, P] \rangle_{\Psi}|^2.$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned}
 \langle PQ \rangle_{|q,\pm} &= \pm r^2 \cos \theta \sin \theta \cos \phi + \frac{1}{4i}, \\
 \langle QP \rangle_{|q,\pm} &= \pm r^2 \cos \theta \sin \theta \cos \phi - \frac{1}{4i},
 \end{aligned}$$

тем самым получим

$$\frac{1}{4} |\langle [Q, P] \rangle_{\Psi}|^2 = \frac{1}{16}.$$

Непосредственное умножение $(\Delta Q)_{|q,\pm}^2$ на $(\Delta P)_{|q,\pm}^2$ также даст

$$(\Delta Q)_{|q,\pm}^2 (\Delta P)_{|q,\pm}^2 \geq \frac{1}{16}.$$

В силу сделанного в разделе 2 замечания обозначим через $\chi_{\pm}^e$ нормированные собственные векторы, отвечающие собственным значениям z и $\bar{z}$ величины q . Два набора КВКС

$$|q, +\rangle = e^{-r^2/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^m}{\sqrt{m!}} \chi_+^e \otimes \phi_m = e^{-r^2/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{\sqrt{m!}} \chi_+^e \otimes \phi_m, \quad (3.3)$$

$$|q, -\rangle = e^{-r^2/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^m}{\sqrt{m!}} \chi_-^e \otimes \phi_m = e^{-r^2/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\bar{z}^m}{\sqrt{m!}} \chi_-^e \otimes \phi_m \quad (3.4)$$

при этом нормированы и удовлетворяют соотношению [4]

$$(\Delta Q)_{|q,\pm}^2 (\Delta P)_{|q,\pm}^2 = \frac{1}{2}.$$

Произведение из соотношения неопределенностей $(\Delta Q)_{|Z,\pm}^2 (\Delta P)_{|Z,\pm}^2$ можно получить непосредственным умножением дисперсий.

3.3. Отношение сигнал–квантовый шум. Можно сказать, что шум представляет собой любое возмущение, стремящееся препятствовать нормальному функционированию прибора или системы. Высокое ОСШ характерно для относительно чистого измерения, а низкое ОСШ указывает на то, что измеряется в основном шум. Для нормированного состояния Ψ ОСШ можно определить в терминах самосопряженного квадратурного оператора Q следующим образом [14]:

$$\sigma_{\Psi} = \frac{\langle Q \rangle_{\Psi}^2}{(\Delta Q)_{\Psi}^2}. \quad (3.5)$$

ОСШ для ККС (3.2) имеет вид

$$\sigma_{|z\rangle} = (\bar{z} + z)^2 = 4r^2 \cos^2 \theta.$$

Из полученных выражений для средних и дисперсии можно явно получить ОСШ для КВКС:

$$\sigma_{|q,\pm\rangle} = \frac{2r^2 \cos^2 \theta}{2r^2 \cos^2 \theta + 1}.$$

Для сравнения, в случае состояний $|Z, \pm\rangle$ мы имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{|Z,+\rangle} &= \frac{2r^2 \cos^2 \theta G_+(r, s)^2}{2r^2 \cos^2 \theta G_+(r, s)G_-(r, s) + G_+(r, s)/2}, \\ \sigma_{|Z,-\rangle} &= \frac{2s^2 \cos^2 \eta G_-(r, s)^2}{2s^2 \cos^2 \eta G_+(r, s)G_-(r, s) + G_-(r, s)/2}. \end{aligned}$$

Если в (1.4) положить $v = \bar{z}$, т.е. рассмотреть $Z = \text{diag}(z, \bar{z})$, то получим $G_+(r, s) = G_-(r, s) = 1/2$. В этом случае $\sigma_{|q,\pm\rangle} = \sigma_{|Z,\pm\rangle}$. Легко видеть, что $\sigma_{|q,\pm\rangle} < \sigma_{|z\rangle}$. Поэтому измерения в КВКС будут более подвержены влиянию шумов, нежели измерения в ККС.

3.4. Перекрытие состояний. В общем случае КС не ортогональны. Поскольку кватернионы не коммутируют, вычислить перекрытие двух КВКС оказывается довольно сложно. Для состояний (2.1) вычисления приводят к следующему результату:

$$\begin{aligned} O_m^+ &= \frac{1}{4} e^{i(m\theta(\cos \phi - \sin \phi) + m\theta'(\cos \phi' - \sin \phi') - \psi')} \{ e^{i\psi} - e^{i(\psi + 2m\theta \sin \phi)} - \\ &\quad - e^{i(\psi + 2m\theta' \sin \phi')} + e^{i(\psi + 2m\theta \sin \phi + 2m\theta' \sin \phi')} + e^{i\psi'} + e^{i(2m\theta \sin \phi + \psi')} + \\ &\quad + e^{i(2m\theta' \sin \phi' + \psi')} + e^{i(2m\theta \sin \phi + 2m\theta' \sin \phi' + \psi')} \}, \\ O_m^- &= \frac{1}{4} e^{im\theta'(\cos \phi' - \sin \phi')} \{ e^{i(m\theta(\cos \phi - \sin \phi) + \psi')} (e^{2im\theta \sin \phi} + 1) (e^{2im\theta' \sin \phi'} - 1) + \\ &\quad + e^{i(m\theta(\cos \phi - \sin \phi) + \psi)} (e^{2im\theta' \sin \phi'} + 1) (e^{2im\theta \sin \phi} - 1) \}, \end{aligned}$$

где $O_m^{\pm} = \langle e^{im\theta\sigma(\hat{n})} \chi_{\pm} | e^{im\theta'\sigma(\hat{n}')} \chi_{\pm} \rangle$. В терминах $O_m^{\pm}$ можно также записать

$$\langle q, \pm | q', \pm \rangle = \frac{1}{2} e^{-(r^2/2 + (r')^2/2)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(rr')^m O_m^{\pm}}{m!}.$$

Однако если рассмотреть состояния (3.3) и (3.4), то интегралы перекрытия упрощаются. В этом случае получим

$$\langle \mathbf{q}, \pm | \mathbf{q}', \pm \rangle = \frac{e^{rr'} e^{\pm i(\theta' - \theta)}}{\sqrt{e^{r^2} + (r')^2}},$$

что совпадает с соответствующей формулой для ККС. Для состояний $|Z, \pm\rangle$ имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} \langle Z, + | Z', + \rangle &= \frac{e^{rr'} e^{i(\theta' - \theta)}}{\sqrt{(e^{r^2} + e^{s^2})(e^{(r')^2} + e^{(s')^2})}}, \\ \langle Z, - | Z', - \rangle &= \frac{e^{ss'} e^{i(\eta' - \eta)}}{\sqrt{(e^{r^2} + e^{s^2})(e^{(r')^2} + e^{(s')^2})}}. \end{aligned}$$

3.5. Распределение фотонных чисел. Для ККС (3.2) действие оператора рождения (уничтожения) на состояние $|\phi_n\rangle$ с определенным числом фотонов приводит к увеличению (уменьшению) на единицу числа фотонов в состоянии. В случае, когда электрическое поле находится в ККС $|z\rangle$, вероятность того, что поле содержит n фотонов, задается выражением

$$P_{|z\rangle}(n) = |\langle \phi_n | z \rangle|^2 = \frac{r^{2n}}{n!} e^{-r^2}, \quad (3.6)$$

и, следовательно, распределение вероятности оказывается пуассоновым. Распределение вероятности для КВКС (2.1) можно вычислить следующим образом:

$$\begin{aligned} P_{|\mathbf{q}, \pm\rangle}(m) &= |\langle \chi_{\pm} \otimes \phi_m | \mathbf{q}, \pm \rangle|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-r^2/2} \frac{\mathbf{q}^m}{\sqrt{m!}} \right|^2 = \\ &= \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{q}|^{2m}}{m!} e^{-r^2} = \frac{1}{2} \frac{r^{2m}}{m!} e^{-r^2}. \end{aligned}$$

Тем самым мы получили пуассоново распределение, отличающееся скалярным множителем от распределения ККС. Для состояний $|Z, \pm\rangle$ из (1.4) мы имеем распределения

$$P_{|Z, +\rangle}(m) = \frac{r^{2m}}{m!} G_+(r, s) e^{-r^2}, \quad P_{|Z, -\rangle}(m) = \frac{s^{2m}}{m!} G_-(r, s) e^{-s^2},$$

которые оказываются не пуассоновыми. Пусть $z \in \mathbb{C}$. Для обычного КС

$$|z\rangle = \mathcal{N}(|z|)^{-1/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{\sqrt{\rho(m)}} \phi_m,$$

где $\{\rho(m)\}_{m=0}^{\infty}$ – положительная последовательность вещественных чисел, а так называемое число Мандела $Q_{|z\rangle}^M$ определяется формулой [15]

$$Q_{|z\rangle}^M = \frac{(\Delta N)_{|z\rangle}^2}{\langle N \rangle_{|z\rangle}} - 1,$$

где $N\phi_m = m\phi_m$. В пуассоновом случае $Q_{|z\rangle}^M = 0$. Если $Q_{|z\rangle}^M < 0$, то распределение называется субпуассоновым, а если $Q_{|z\rangle}^M > 0$, то оно называется суперпуассоновым [15]. Однако ввиду векторной природы КВКС и нашего выбора их нормировки вышеприведенное рассуждение теряет силу. Легко видеть, что

$$Q_{|q,\pm\rangle}^M = \frac{r^2}{2} > 0,$$

в то время как $P_{|q,\pm\rangle}(m)$ по-прежнему отвечает пуассонову распределению. Даже для набора КВКС общего вида (2.6) получаем

$$Q_{|q\rangle}^M = \frac{r^2}{2},$$

в то время как

$$P_{|q\rangle}^\pm(m) = |\langle \chi_\pm \otimes \phi_m | q \rangle|^2 = |c'_\pm|^2 P_{|q,\pm\rangle}(m).$$

Мы видим, что наборы КВКС (3.3) и (3.4) удовлетворяют общим условиям $Q_{|q,\pm\rangle}^M = 0$ и $P_{|q,\pm\rangle}(m) = P_{|z\rangle}(m)$, включающим параметры Манделя. Это отличие связано с их нормировками. Наконец, числа Манделя для состояний $|Z, \pm\rangle$ равны

$$Q_{|Z,+ \rangle}^M = r^2 G_-(r, s), \quad Q_{|Z,- \rangle}^M = s^2 G_+(r, s).$$

3.6. Свойства сжатия. В последние годы проблема построения сжатых квантовых состояний привлекает большое внимание как с математической точки зрения, так и с точки зрения приложений. Наиболее часто сжатые состояния играют важную роль в случае электромагнитных полей. Сжатыми называются неклассические состояния, в которых флуктуации одной из двух квадратурных (P, Q) фазовых амплитуд электромагнитного поля падают ниже уровня поля. Таким образом, поле сжатого состояния оказывается в некотором смысле более спокойным, чем поле вакуума, и может быть использовано для обеспечения такой точности измерений, которая находится за пределами стандартных квантовых ограничений, налагаемых в силу принципа неопределенностей. Дисперсии квадратурных операторов Q, P в любом нормированном состоянии $|\psi\rangle$ удовлетворяют соотношению неопределенностей

$$(\Delta Q)_{|\psi\rangle}^2 (\Delta P)_{|\psi\rangle}^2 \geq \frac{1}{4}.$$

Состояние $|\psi\rangle$ называется сжатым для квадратуры Q , если $(\Delta Q)^2 < 1/2$.

Из предыдущих разделов имеем

$$(\Delta Q)_{|q,\pm\rangle}^2 = \frac{1}{4}(2r^2 \cos^2 \theta + 1).$$

Таким образом, из условия сжатия $(\Delta Q)^2 < 1/2$ следует, что

$$\frac{1}{4}(2r^2 \cos^2 \theta + 1) < \frac{1}{2},$$

т.е. область сжатия для квадратуры задается неравенством

$$r^2 \cos^2 \theta < \frac{1}{2}.$$

В случае КВКС мы полагаем $r \in [0, \infty)$ и $\theta \in [0, 2\pi)$, в силу чего условие сжатия выполнено. В случае оператора P из условия $(\Delta P)_{|q, \pm}^2 < 1/2$ следует, что должно выполняться неравенство

$$r^2 \sin^2 \theta (1 + \sin^2 \phi) < \frac{1}{2},$$

которое имеет место при $r^2 \sin^2 \theta < 1/4$. Таким образом, КВКС допускают сжатие по обеим квадратурам.

3.7. Временная эволюция. Итоги квантовых процессов обычно анализируются с помощью методов, не содержащих временной зависимости и не дающих, следовательно, никакой информации о происходящем во время протекания процесса. Чтобы знать, как состояние системы эволюционирует во времени, необходимо решить квантово-механическое уравнение движения, т.е. уравнение Шредингера, содержащее зависимость от времени. Решить такое уравнение непросто. На самом деле известны лишь несколько тривиальных примеров, когда это можно сделать аналитически, остальные задачи доступны исследованию лишь с помощью громоздких численных вычислений. В целом для КС эта задача может быть подвергнута анализу следующим образом.

Будем обозначать временную эволюцию квантового состояния $|\psi(0)\rangle$ через $|\psi(t)\rangle$ (состояние в момент времени t). Состояние $|\psi(t)\rangle$, зависящее от времени, получается при действии оператора эволюции $U(t) = e^{-iHt}$ на $|\psi(0)\rangle$, где H – рассматриваемый гамильтониан. Заметим, что при заданной временной эволюции оператора $U(t)$ и заданном дополнительно законе действия $U(t)$ на состояние $|\psi(0)\rangle$ нам нет необходимости знать вид уравнения Шредингера для состояния в момент времени t . Все, что надо сделать для получения состояния в момент времени t , это применить $U(t)$ к $|\psi(0)\rangle$. Если это состояние является собственным для гамильтониана, то оно остается таковым при всех временах. Самое большее, что с ним может произойти, – это фазовый сдвиг. В этом смысле собственное состояние представляет собой константу движения. Но если исследуемое состояние не является собственным для гамильтониана, естественно исследовать его эволюцию во времени. Также представляет интерес ответ на вопрос, приводит ли эволюция во времени набора КС снова к набору КС, т.е. является ли набор КС стабильным во времени. В случае КВКС будем использовать следующее обозначение. Пусть $|q, \pm\rangle = |q, 0, \pm\rangle$ – состояние в момент времени $t = 0$, а $|q, t, \pm\rangle$ – то же состояние в момент времени t , т.е. $|q, t, \pm\rangle = U(t)|q, 0, \pm\rangle$. Гамильтониан для КВКС мы выберем в виде $\mathbf{H} = A^\dagger A$. Эволюция во времени при этом принимает вид

$$U(t)\chi_\pm \otimes \phi_m = e^{-i\mathbf{H}t}\chi_\pm \otimes \phi_m = e^{-imt}\chi_\pm \otimes \phi_m. \quad (3.7)$$

Отсюда можно получить

$$\begin{aligned} |q, t, \pm\rangle &= U(t)|q, 0, \pm\rangle = e^{-iHt} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-r^2/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^m}{\sqrt{m!}} \chi_{\pm} \otimes \phi_m = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-r^2/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^m e^{-imt}}{\sqrt{m!}} \chi_{\pm} \otimes \phi_m = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-|q(t)|^2/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q(t)^m}{\sqrt{m!}} \chi_{\pm} \otimes \phi_m, \end{aligned}$$

где $q(t) = qe^{-it}$. Таким образом, КВКС остаются КВКС в процессе эволюции во времени, или, другими словами, эти состояния стабильны по времени, если эволюция задается действием гамильтониана H .

3.8. Ортогональные многочлены. Вернемся к ККС гармонического осциллятора. Его операторы уничтожения, рождения и числа частиц задаются формулами (2.2), и оператор уничтожения удовлетворяет условию $a|z\rangle = z|z\rangle$. Квадратурный оператор (оператор местоположения) q из (2.7) удовлетворяет условию

$$q|x\rangle = x|x\rangle, \quad (3.8)$$

где $|x\rangle$ – состояние с определенным местоположением. Разлагая $|x\rangle$ по базису $\{\phi_m\}_{m=0}^{\infty}$, получим

$$|x\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(x) \phi_m. \quad (3.9)$$

Подставляя (2.2) и (3.9) в (3.8), приходим к известному трехчленному рекурсивному соотношению из теории ортогональных многочленов:

$$xP_m(x) = \sqrt{\frac{m}{2}} P_{m-1}(x) + \sqrt{\frac{m+1}{2}} P_{m+1}(x), \quad m > 0. \quad (3.10)$$

Наложив начальные условия $P_0(x) = 1$ и $P_{-1}(x) = 0$, получим

$$P_m(x) = \frac{1}{\sqrt{2^m m!}} H_m(x),$$

где

$$H_m(x) = (-1)^m e^{x^2} \frac{d^m}{dx^m} (e^{-x^2}) \quad (3.11)$$

– многочлены Эрмита. Хорошо известное условие ортогональности для многочленов Эрмита имеет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = 2^m m! \sqrt{\pi} \delta_{mn}.$$

Таким образом, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_m(x) P_n(x) d\mu(x) = \delta_{mn}$$

с $d\mu(x) = (1/\sqrt{\pi})e^{-x^2} dx$. Эти результаты подробно исследовались в литературе [5], [16]; наша цель – адаптировать их к случаю КВКС. В случае КВКС из-за действия операторов $A, A^\dagger$ и N , определенного на векторах $\chi_\pm \otimes \phi_m$, можно выбрать в качестве аналога равенства (3.8) равенство

$$Q|X\rangle = X|X\rangle,$$

где X – матрица размера 2×2 . Следуя тем же рассуждениям, что и выше, можно записать

$$XP_{m,j}(X) = \sqrt{\frac{m}{2}} P_{m-1,j}(X) + \sqrt{\frac{m+1}{2}} P_{m+1,j}(X), \quad m > 0, \quad j = \pm. \quad (3.12)$$

Выберем начальные условия в виде $P_{-1}(X) = 0$ и $P_0(X) = \mathbb{I}_2$. В принципе соотношение (3.12) определяет свой многочлен для каждого j , но в случае ВКС, рассматриваемом в данной работе, все эти многочлены совпадают. Обозначим поэтому $P_{m,j}(X)$ через $P_m(X)$. В принятых начальных условиях

$$P_m(X) = \frac{1}{\sqrt{2^m m!}} H_m(X),$$

где $H_m(X)$ – матричнозначный многочлен Эрмита. Под этим подразумевается, что мы просто заменили в многочлене Эрмита вещественный аргумент x на матрицу X . Для матрицы X общего вида условие ортогональности может и не переноситься автоматически со скалярного случая. Тем не менее предположим на время, что

$$X = \text{diag}(x_1, x_2), \quad x_1, x_2 \in (-\infty, \infty).$$

Тогда легко видеть, что

$$P_m(X) = \frac{1}{\sqrt{2^m m!}} H_m(X) = \frac{1}{\sqrt{2^m m!}} \text{diag}(H_m(x_1), H_m(x_2))$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P_m(X) P_n(X) d\mu(X) = \delta_{mn} \mathbb{I}_2, \quad (3.13)$$

где

$$d\mu(X) = \frac{1}{\pi} e^{-x_1^2} e^{-x_2^2} dx_1 dx_2.$$

В более общем случае предположим, что матрицу X можно диагонализировать с помощью ортогональной матрицы:

$$\hat{X} = \text{diag}(x_1, x_2) = O X O^T, \quad x_1, x_2 \in (-\infty, \infty),$$

и предположим, что все параметры матрицы O не зависят от параметров матрицы $\hat{X}$ (или просто возьмем $X = O^T \text{diag}(x_1, x_2) O$ для $O \in O(2)$). Пусть $d\nu(O)$ – нормированная инвариантная мера ортогональной группы $O(2)$. Тогда из (3.13) получим

$$\int_{O(2)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P_m(X) P_n(X) d\eta(X) = \delta_{mn} \mathbb{I}_2,$$

где

$$d\eta(X) = d\mu(\hat{X}) d\nu(O).$$

Может представлять интерес распространение вышеприведенного соотношения на случай комплексных чисел. В качестве предварительного этапа приступим к исследованию ортогональности $H_n(z)$ и $H_n(\bar{z})$.

Пусть $R > 0$. Построим контур в верхней полуплоскости следующим образом: отметим точки $-R$ и R на оси $\text{Re } z$. Проведем вертикальные линии от $-R + i\epsilon_2(R)$ к $-R$ и от $R + i\epsilon_1(R)$ к R , где $\epsilon_1(R)$ и $\epsilon_2(R)$ – положительные числа. Затем соединим $-R + \epsilon_2(R)$ и $R + \epsilon_1(R)$ кривой C_R , лежащей в верхней полуплоскости. Линии $-R \rightarrow R$, $R \rightarrow R + i\epsilon_1(R)$, $-R + i\epsilon_2(R) \rightarrow -R$ и кривая C_R образуют замкнутый контур γ в верхней полуплоскости. Выберем направления сегментов прямых, как указано на рисунке, и предположим, что γ представляет собой такую кривую в $\mathbb{C}$, что пересечение γ с произвольным диском в $\mathbb{C}$ оказывается спрямляемой кривой. Так как многочлены Эрмита $H_n(z)$ суть многочлены по переменной $z = re^{i\theta}$ степени n , то $H_n(z)H_m(z)e^{-z^2}$ аналитична на замкнутом контуре γ . Тогда по интегральной теореме Коши

$$\int_{\gamma} H_n(z)H_m(z)e^{-z^2} dz = 0,$$

или, эквивалентно,

$$\begin{aligned} & \int_{-R}^R H_n(x)H_m(x)e^{-x^2} dx + \int_{t=0}^{\epsilon_1(R)} H_n(R+it)H_m(R+it)e^{-(R+it)^2} i dt - \\ & - \int_{C_R} H_n(z)H_m(z)e^{-z^2} dz + \int_{\epsilon_2(R)}^0 H_n(-R+it)H_m(-R+it)e^{-(-R+it)^2} i dt = 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned} & \int_{t=0}^{\epsilon_1(R)} H_n(R+it)H_m(R+it)e^{-(R+it)^2} i dt = \\ & = i \int_{t=0}^{\epsilon_1(R)} e^{-(R^2-t^2)} H_n(R+it)H_m(R+it)e^{-2Rit} dt. \end{aligned}$$

Поскольку любой многочлен $P_n(x)$ степени n обладает свойством $|P_n(x)| \leq C|x|^n$ для некоторой константы C , получим

$$|H_n(R+it)H_m(R+it)e^{-2Rit}| \leq A|R+it|^N = A(R^2+t^2)^{N/2},$$

где A – константа и $N \geq mn$. Тем самым

$$\begin{aligned} \left| \int_{t=0}^{\epsilon_1(R)} H_n(R+it)H_m(R+it)e^{-(R+it)^2} i dt \right| &\leq \int_{t=0}^{\epsilon_1(R)} e^{-(R^2-t^2)} A(R^2+t^2)^{N/2} dt \leq \\ &\leq A\epsilon_1(R)e^{-(R^2-\epsilon_1(R)^2)} (R^2+\epsilon_1(R)^2)^{N/2} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

если выбрать $\epsilon_1(R) < R/2$ и вычислить предел при $R \rightarrow \infty$. Схожие рассуждения показывают, что

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{\epsilon_2(R)}^0 H_n(-R+it)H_m(-R+it)e^{-(-R+it)^2} i dt \right| = 0;$$

при этом получаем

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{C_R} H_n(z)H_m(z)e^{-z^2} dz - \int_{-R}^R H_n(x)H_m(x)e^{-x^2} dx \right| = 0,$$

или

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} H_n(z)H_m(z)e^{-z^2} dz = \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)H_m(x)e^{-x^2} dx = 2^m m! \sqrt{\pi} \delta_{mn}. \quad (3.14)$$

Отражая контур γ относительно вещественной оси и повторяя предыдущие рассуждения, получаем

$$\int_{\overline{C_R}(R \rightarrow \infty)} H_n(\bar{z})H_m(\bar{z})e^{-\bar{z}^2} d\bar{z} = 2^m m! \sqrt{\pi} \delta_{mn}, \quad (3.15)$$

где через $\overline{C_R}$ обозначено зеркальное отображение C_R относительно вещественной оси.

Поскольку e^{-z^2} – целая функция, то при движении вдоль дуг γ в предписанном выше порядке получаем

$$\left| \int_{t=0}^{\epsilon_1(R)} e^{-(R+it)^2} i dt \right| \leq \int_{t=0}^{\epsilon_1(R)} e^{-R^2+t^2} dt \leq e^{-R^2+\epsilon_1(R)} \epsilon_1(R) \rightarrow 0,$$

если $\epsilon_1(R) < R/2$ и $R \rightarrow \infty$. Таким образом, те же рассуждения, примененные к $H_n(z)H_m(z)e^{-z^2}$, дают

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{-z^2} dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \quad (3.16)$$

Пусть $C_{R_1}(R_1 \rightarrow \infty)$ и $C_{R_2}(R_2 \rightarrow \infty)$ – кривые, схожие с $C_R(R \rightarrow \infty)$. Если z_1 лежит на $C_{R_1}(R_1 \rightarrow \infty)$, z_2 – на $C_{R_2}(R_2 \rightarrow \infty)$ (предполагается, что C_{R_1} и C_{R_2} выбраны так, чтобы z_1 и z_2 были независимыми переменными) и $Z = \text{diag}(z_1, z_2)$, то

$$H_n(Z) = \text{diag}(H_n(z_1), H_n(z_2)).$$

Из (3.14) и (3.16) имеем

$$\lim_{R_{1,2} \rightarrow \infty} \int_{C_{R_1}} \int_{C_{R_2}} H_n(Z) H_m(Z) e^{-(z_1^2 + z_2^2)} \frac{dz_1 dz_2}{\sqrt{\pi}} = \delta_{mn} \sqrt{\pi} 2^m m! \mathbb{I}_2. \quad (3.17)$$

Ассоциируем (3.17) с матрицами из $SU(1, 1)$ следующим образом. Пусть $\mathfrak{z} = uZu^\dagger$ при $u = u_\psi u_\phi u_\psi$, где u_ϕ и u_ψ – те же, что и в разделе 2. Так как $H_n(x)$ – многочлен степени n , то ввиду (3.17) можно записать в явном виде

$$\begin{aligned} \lim_{R_{1,2} \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{C_{R_1}} \int_{C_{R_2}} H_n(\mathfrak{z}) H_m(\mathfrak{z}) e^{-(z_1^2 + z_2^2)} \frac{dz_1 dz_2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sin \phi}{4\pi} d\phi d\psi = \\ = \delta_{mn} \sqrt{\pi} 2^m m! \mathbb{I}_2. \end{aligned} \quad (3.18)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Если z лежит на C_R и $Z = \text{diag}(z, \bar{z})$, то в пределе $R \rightarrow \infty$

$$H_n(Z) = \text{diag}(H_n(z), H_n(\bar{z})).$$

Из формул (3.14) и (3.15) следует, что в пределе $R \rightarrow \infty$

$$\int_{C_R} \int_{\bar{C}_R} H_n(Z) H_m(Z) W(z, \bar{z}) \frac{dz d\bar{z}}{\sqrt{\pi}} = \delta_{mn} \sqrt{\pi} 2^m m! \mathbb{I}_2 \quad (3.19)$$

для подходящей весовой функции $W(z, \bar{z})$. Мы ассоциируем (3.19) с кватернионами следующим образом. Так как кватернион может быть представлен в виде $\mathfrak{q} = uZu^\dagger$ при $u = u_\psi u_\phi u_\psi$, где u_ϕ и u_ψ – те же, что и в разделе 2, и поскольку $H_n(x)$ – многочлен степени n , из формулы (3.19) можно в явном виде записать в пределе $R \rightarrow \infty$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{C_R} \int_{\bar{C}_R} H_n(\mathfrak{q}) H_m(\mathfrak{q}) W(z, \bar{z}) \frac{dz d\bar{z}}{\sqrt{\pi}} \frac{\sin \phi}{4\pi} d\phi d\psi = \delta_{mn} \sqrt{\pi} 2^m m! \mathbb{I}_2. \quad (3.20)$$

Отметим далее, что кватернионы в выражении (3.20) ограничены на C_R ($R \rightarrow \infty$) относительно переменных r и θ . Поскольку переменные z и $\bar{z}$ нельзя рассматривать в качестве независимых, весовая функция формулы (3.17) не может быть использована в (3.19). Тем самым мы сталкиваемся с трудностями при нахождении подходящей весовой функции $W(z, \bar{z})$, которая удовлетворяла бы условию (3.19). Это пока остается открытой задачей.

Благодарности. К. Тирулогасантар и А. Кржизак признательны за частичную финансовую поддержку Natural Sciences and Engineering Research Council (NSERC) of Canada.

Список литературы

- [1] S. T. Ali, J.-P. Antoine, J.-P. Gazeau, *Coherent States, Wavelets and their Generalizations*, Springer, N. Y., 2000.
- [2] *Coherent States, Applications in Physics and Mathematical Physics*, eds. J. R. Klauder, B. S. Skagerstam, World Scientific, Singapore.

- [3] A.O. Barut, L. Girardello, *Commun. Math. Phys.*, **21** (1971), 41–55; J.P. Gazeau, J.R. Klauder, *J. Phys. A*, **32** (1999), 123–132; M. Novaes, J.P. Gazeau, *J. Phys. A*, **36** (2003), 199–212.
- [4] K. Thirulogasanthar, S.T. Ali, *J. Math. Phys.*, **44**:11 (2003), 5070–5083.
- [5] S.T. Ali, M. Englis, J.P. Gazeau, *J. Phys. A*, **37** (2004), 6067–6089.
- [6] J. Jayaraman, R. de Lima Rodrigues, A.N. Vaidya, *J. Phys. A*, **32** (1999), 6643–6652.
- [7] M. Orszag, S. Salamo, *J. Phys. A*, **21** (1988), L1059–L1064.
- [8] B.W. Fatyga, V.A. Kostelecký, M.M. Nieto, D.R. Truax, *Phys. Rev. D*, **43** (1991), 1403–1412.
- [9] C. Aragone, F. Zypman, *J. Phys. A*, **19** (1986), 2267–2279.
- [10] Y. Bérubé-Lauzière, V. Hussin, *J. Phys. A*, **26** (1993), 6271–6275.
- [11] G. Junker, P. Roy, *Phys. Lett. A*, **232** (1997), 155–161.
- [12] M. Daoud, V. Hussin, *J. Phys. A*, **35** (2002), 7381–7402.
- [13] J.J. Sakurai, *Modern quantum mechanics*, Addison-Wesley Pub. Co., Reading, Mass., 1994.
- [14] K.A. Penson, A.I. Solomon, *J. Math. Phys.*, **40** (1999), 2354–2363.
- [15] J.-P. Antoine, J.-P. Gazeau, P. Monceau, J.R. Klauder, K.A. Penson, *J. Math. Phys.*, **42** (2001), 2349–2387.
- [16] V.V. Borzov, *Integral Transform. Spec. Funct.*, **12** (2001), 115–138; V.V. Borzov, E.V. Damaskinsky, P.P. Kulish, *Rev. Math. Phys.*, **12** (2000), 691–710.

Поступила в редакцию 9.01.2006