Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Савков, А. А. Юшканов, Аналитическое решение кинетического уравнения в задаче о точечных источниках в двухатомном газе, *ТМФ*, 2002, том 133, номер 1, 132–144

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf385>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 18:06:39

© 2002 г.

С. А. Савков*, А. А. Юшканов†

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О ТОЧЕЧНЫХ ИСТОЧНИКАХ В ДВУХАТОМНОМ ГАЗЕ

Получено аналитическое решение кинетического уравнения в задаче о точечных источниках тепла или частиц в двухатомном газе. Проведен анализ распределения энергии и температуры по поступательным и вращательным степеням свободы молекул при их раздельном возбуждении.

Ключевые слова: кинетическое уравнение, точечный источник, молекулярный газ, температура, концентрация.

В последние годы наблюдается рост интереса к изучению явлений переноса в молекулярных газах [1]. Аналитические решения получены лишь для полупространственных задач [2], [3]. Определенный интерес представляет исследование свойств газа, в котором находятся источники различной природы и профиля. Методика решения подобных скалярных задач, возникающих в теории переноса нейтронов, изложена в монографии [4]. Аналогичный подход использовался в работе [5] для источников в атомарном газе. В данной работе впервые рассматривается случай источников тепла или частиц в двухатомном газе.

Решение задач об источниках, кроме чисто теоретического, может иметь и практическое значение. Так, например, цилиндрическим, а в предельном случае линейным источником тепла является луч лазера в поглощающей среде. Исследование поля температуры и плотности газа необходимо, в частности, при изучении явления расходимости лазерного луча.

Задача об источнике частиц аналогичной физической интерпретации не имеет. Ее рассмотрение в данной статье обусловлено прежде всего аналогичным подходом к решению.

Кроме того, задачи об источниках представляют собой новый тип задач кинетической теории газов, допускающих аналитическое решение, что определяет их теоретическую значимость. Полученные результаты могут служить для апробации различных приближенных и численных методов решения кинетического уравнения.

* Орловский государственный университет, Орел, Россия

† Московский педагогический университет, Москва, Россия. E-mail: yushkanov@inbox.ru

Следуя монографии [4], начнем с рассмотрения бесконечного плоского источника, расположенного в плоскости $x = 0$. Состояние окружающего его газа описывается кинетическим уравнением [6]. Учитывая наличие источника и ограничиваясь линейным по перепаду температуры и концентрации приближением, имеем

$$C_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} = I_{\text{st}}[\varphi] + S\delta(x). \quad (1)$$

Здесь φ – поправка к равновесной (максвелловской) функции распределения, определяемой соотношением

$$f_0 = n_0 \left(\frac{m}{2\pi k T_0} \right)^{3/2} \frac{J}{k T_0} e^{-C^2 - \gamma^2},$$

$\mathbf{C} = \mathbf{V} \sqrt{m/(2kT_0)}$, $\gamma = \omega \sqrt{J/(2kT_0)}$, $\mathbf{V}$ и ω – собственные скорости поступательного и вращательного движения молекул газа, соответственно, m и J – масса и момент инерции молекул, k – постоянная Больцмана, T_0 и n_0 – невозмущенные значения температуры и концентрации, I_{st} – линеаризованный оператор столкновений, S – фазовая плотность источника, $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака.

Ввиду отсутствия надежных моделей потенциалов межмолекулярного взаимодействия рядом авторов предлагались различные модели интеграла столкновений (см., например, [7]), содержащие, как правило, различные параметры, в том числе величину Z , характеризующую отношение времен поступательной и вращательной релаксаций. Однако данная величина не является внутренним параметром газа и носит качественный характер. Наличие подобного рода параметров, неоднозначно определяемых свойствами газа, приводит к несопоставимости результатов, полученных разными авторами. С другой стороны, для большинства газов [1] времена поступательной и вращательной релаксаций имеют одинаковый порядок. Указанные обстоятельства определяют актуальность рассмотрения предельного случая, когда эти времена равны.

В соответствии с работой [2] примем, что

$$I_{\text{st}}[\varphi] = \sum_{i=1}^3 P_i M_i - \varphi, \quad M_i = 2\pi^{-3/2} \int P_i \varphi e^{-C^2 - \gamma^2} \gamma d\gamma d^3 C,$$

$$P_1 = 1, \quad P_2 = \sqrt{\frac{2}{5}} \left(C^2 + \gamma^2 - \frac{5}{2} \right), \quad P_3 = \sqrt{2} C_x.$$

Обозначим $C_x = \mu$ и представим φ в виде

$$\varphi = e_1 Y_1(x, \mu) + e_2 Y_2(x, \mu), \quad (2)$$

где $e_1 = 1$, $e_2 = (C^2 - \mu^2 + \gamma^2 - \nu^2)/\nu$, $\nu = \sqrt{2}$. В результате уравнение (1) сводится к векторному интегродифференциальному уравнению относительно вектора $\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}$:

$$\mu \frac{\partial \mathbf{Y}(x, \mu)}{\partial x} + \mathbf{Y}(x, \mu) = \pi^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{K}(\mu, \mu_1) \mathbf{Y}(x, \mu_1) e^{-\mu_1^2} d\mu_1 + \mathbf{S}\delta(x), \quad (3)$$

где матрица

$$\mathbf{K}(\mu, \mu_1) = \begin{bmatrix} 1 + 2\mu\mu_1 + \frac{2}{5}(\mu^2 - \frac{1}{2})(\mu_1^2 - \frac{1}{2}) & \frac{2}{5}\nu(\mu^2 - \frac{1}{2}) \\ \frac{2}{5}\nu(\mu_1^2 - \frac{1}{2}) & \frac{2}{5}\nu^2 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{S}$ – определенный согласно формуле (1) вектор плотности источника.

Рассмотрим соответствующее (3) однородное уравнение

$$\mu \frac{\partial \mathbf{Y}(x, \mu)}{\partial x} + \mathbf{Y}(x, \mu) = \pi^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{K}(\mu, \mu_1) \mathbf{Y}(x, \mu_1) e^{-\mu_1^2} d\mu_1. \quad (4)$$

Его решение может быть представлено в виде

$$\mathbf{Y}(x, \mu) = e^{-x/\eta} \mathbf{F}(\eta, \mu).$$

Компоненты вектора $\mathbf{F}$ определяются из системы характеристических уравнений

$$\begin{aligned} \sqrt{\pi} \frac{\eta - \mu}{\eta} F_1 &= N_1^0 + 2\mu N_1^1 + \frac{2}{5} \left(\mu^2 - \frac{1}{2} \right) \left(N_1^2 - \frac{1}{2} N_1^0 \right) + \\ &+ \frac{2}{5} \nu \left(\mu^2 - \frac{1}{2} \right) N_2^0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\sqrt{\pi} \frac{\eta - \mu}{\eta} F_2 = \frac{2}{5} \nu \left(N_1^2 - \frac{1}{2} N_1^0 \right) + \frac{2}{5} \nu^2 N_2^0, \quad (6)$$

где

$$N_i^\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} F_i \mu^\alpha e^{-\mu^2} d\mu.$$

Умножая уравнение (5) на $e^{-\mu^2}$ и $\mu e^{-\mu^2}$ и интегрируя по всей области изменения μ , находим, что $N_1^1 = N_1^2 = 0$. Таким образом, система характеристических уравнений может быть записана в виде

$$\sqrt{\pi} \frac{\eta - \mu}{\eta} \mathbf{F} = \Delta(\mu) \mathbf{N}(\eta), \quad (7)$$

$$\Delta(\mu) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{5}(\mu^2 - \frac{1}{2}) & \frac{2}{5}\nu(\mu^2 - \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{5}\nu & \frac{2}{5}\nu^2 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$\mathbf{N}(\eta) = \begin{bmatrix} N_1^0 \\ N_2^0 \end{bmatrix} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mu^2} \mathbf{F}(\eta, \mu) d\mu. \quad (9)$$

Равенство (9) можно рассматривать как условие нормировки для функции $\mathbf{F}$.

В случае, когда η не является действительным числом, из уравнения (7) находим

$$\mathbf{F}(\eta, \mu) = \pi^{-1/2} \frac{\eta}{\eta - \mu} \Delta(\mu) \mathbf{N}(\eta),$$

причем в силу условия (9)

$$\mathbf{N}(\eta) = \pi^{-1/2} \eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Delta(\eta)}{\eta - \mu} e^{-\mu^2} d\mu \mathbf{N}(\eta),$$

что эквивалентно

$$D(\eta) = \det \mathbf{\Lambda}(\eta) = 0. \quad (10)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathbf{\Lambda}(\eta) &= \mathbf{E} - \pi^{-1/2} \eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Delta(\eta)}{\eta - \mu} e^{-\mu^2} d\mu = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\lambda_c(\eta)}{10} + (\lambda_c(\eta) + 1) \left(1 - \frac{\eta^2}{5}\right) & \frac{\nu}{5} (2(\lambda_c(\eta) + 1)\eta^2 - \lambda_c(\eta)) \\ -\frac{\nu}{5} \lambda_c(\eta) & 1 + \frac{2}{5} \nu^2 \lambda_c(\eta) \end{bmatrix}, \\ \lambda_c(z) &= \pi^{-1/2} z \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mu^2} \frac{d\mu}{\mu - z}, \end{aligned}$$

$\mathbf{E}$ – единичная матрица.

Очевидно, что дисперсионное уравнение (10) имеет дискретный набор корней, число $\varkappa$ которых, согласно принципу аргумента [8], определяется приращением аргумента функции $D^+(x) = \lim_{y \rightarrow +0} D(x + iy)$ на действительной оси:

$$\varkappa = \frac{1}{\pi} [\arg D^+(x)]_{\mathbb{R}}.$$

Учитывая, что

$$\lambda^\pm(x) = \lim_{y \rightarrow \pm 0} \lambda_c(x + iy) = \lambda_p(x) \pm i\sqrt{\pi} x e^{-x^2},$$

где

$$\lambda_p(x) = -2x \int_0^x x e^{\mu^2 - x^2} d\mu, \quad (11)$$

находим

$$\begin{aligned} D^\pm(x) &= 1 + \frac{1}{5} \left(\frac{19}{2} \lambda_p(x) + 4\lambda_p^2(x) - x^2 (1 + \lambda_p(x) - 4\pi e^{-x^2}) \right) \pm \\ &\pm i \frac{\sqrt{\pi}}{5} \left(\frac{19}{2} + 8\lambda_p(x) - x^2 \right) x e^{-x^2}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\varkappa = 4$.

Кроме того, в силу асимптотического представления

$$\lambda_c(z) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n z^{2n}},$$

можно записать

$$D(z) = \frac{7}{20} z^{-4} + O(z^{-6}).$$

Таким образом, уравнение (10) имеет единственный четырехкратный корень на бесконечности. Соответствующие ему решения уравнения (4)

$$\mathbf{Y}_1 = \begin{bmatrix} \mu^2 - \frac{1}{2} \\ \nu \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y}_3 = (\mu - x)(\mathbf{Y}_1 - \mathbf{Y}_2), \quad \mathbf{Y}_4 = \mu \mathbf{Y}_2$$

представляют собой газодинамические (т.е. реализующиеся на достаточно большом расстоянии от источника) решения кинетического уравнения.

В случае действительных значений η решениями уравнений (9), (10) являются функции

$$\mathbf{F}(\eta, \mu) = \left(\pi^{-1/2} \frac{\eta}{\eta - \mu} \Delta(\eta) + e^{\eta^2} \Lambda(\eta) \delta(\eta - \mu) \right) \mathbf{N}(\eta), \quad (12)$$

составляющие непрерывный спектр решений. Все интегралы от функций (12) должны вычисляться в смысле главного значения интеграла Коши.

Ввиду произвольности нормировочного вектора $\mathbf{N}$ решения (12) можно представить как суперпозицию двух независимых решений

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= \pi^{-1/2} \frac{\eta}{\eta - \mu} \begin{bmatrix} \mu^2 - \frac{1}{2} \\ \nu \end{bmatrix} + e^{\eta^2} \delta(\eta - \mu) \begin{bmatrix} (\lambda_p(\eta) + 1)\eta^2 - \frac{1}{2}\lambda_p(\eta) \\ \frac{5}{2\nu} + \nu\lambda_p(\eta) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{F}_2 &= \pi^{-1/2} \frac{\eta}{\eta - \mu} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{\eta^2} \delta(\eta - \mu) \begin{bmatrix} 1 + \lambda_p(\eta) \\ \frac{1}{2\nu} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Можно доказать (см., например, [4]), что полученная система решений представляет собой полную систему ортогональных функций, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{X}_\alpha(\mu) \mathbf{Y}_\beta(\mu) e^{-\mu^2} \mu d\mu &= \delta_{\alpha\beta}, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{Y}_\alpha(\mu) \mathbf{F}_\beta(\eta, \mu) e^{-\mu^2} \mu d\mu &= 0, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{Z}_\alpha(\eta', \mu) \mathbf{F}_\beta(\eta, \mu) e^{-\mu^2} \mu d\mu &= \delta_{\alpha\beta} \delta(\eta - \eta'). \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1 &= (x - \mu) \mathbf{X}_3, \quad \mathbf{X}_2 = \mu \mathbf{X}_4 - \mathbf{X}_1, \\ \mathbf{X}_3 &= \frac{4}{7} \pi^{-1/2} (\mathbf{Y}_1 - \mathbf{Y}_2), \quad \mathbf{X}_4 = 2\pi^{-1/2} \mathbf{Y}_2, \\ \mathbf{Z}_1 &= \frac{N_{11} \mathbf{F}_1 - N_{12} \mathbf{F}_2}{N_0}, \quad \mathbf{Z}_2 = \frac{N_{22} \mathbf{F}_2 - N_{12} \mathbf{F}_1}{N_0}, \\ N_{11} &= \pi \eta^2 e^{-2\eta^2} + 2\lambda_p^2(\eta) + \lambda_p(\eta) + \frac{9}{8}, \\ N_{12} &= (\pi \eta^2 e^{-2\eta^2} + \lambda_p^2(\eta)) \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) + 2\lambda_p(\eta) \eta^2 + \eta^2 + \frac{5}{8}, \\ N_{22} &= (\pi \eta^2 e^{-2\eta^2} + \lambda_p^2(\eta)) \left(\eta^4 - \eta^2 + \frac{9}{4} \right) + \lambda_p(\eta) (2\eta^4 - \eta^2 + 5) + \eta^4 + \frac{25}{8}, \\ N_0 &= \eta e^{\eta^2} (N_{11} N_{22} - N_{12}^2). \end{aligned}$$

Решение неоднородного уравнения (3) для $\pm x > 0$ может быть представлено в виде

$$\mathbf{Y}(x, \mu) = \mathbf{Y}^\pm(x, \mu), \quad (14)$$

где

$$\mathbf{Y}^{\pm}(x, \mu) = \pm \sum_{\alpha=0}^4 A_{\alpha} \mathbf{Y}_{\alpha}(x, \mu) + \sum_{\beta=0}^2 \int_0^{\pm\infty} B_{\beta}(\eta) \mathbf{F}_{\beta}(\eta, \mu) e^{-x/\eta} d\eta.$$

Для определения коэффициентов разложения подставим (14) в уравнение (3) и проинтегрируем по x в интервале от $-\varepsilon$ до ε . В пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ получим

$$2\mu \sum_{\alpha=0}^4 A_{\alpha} \mathbf{Y}_{\alpha}(0, \mu) + \mu \sum_{\beta=0}^2 \int_0^{\pm\infty} B_{\beta}(\eta) \mathbf{F}_{\beta}(\eta, \mu) d\eta = \mathbf{S}.$$

Отсюда в силу условий (13) находим

$$A_{\alpha} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{X}_{\alpha} \mathbf{S} e^{-\mu^2} d\mu, \quad B_{\beta} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{Z}_{\beta} \mathbf{S} e^{-\mu^2} d\mu. \quad (15)$$

Так, в случае источника тепла

$$\begin{aligned} S = S_h &= \frac{2}{5} \left(C^2 + \gamma^2 - \frac{5}{2} \right), \quad \mathbf{S} = \frac{2}{5} \begin{bmatrix} \mu^2 - \frac{1}{2} \\ \nu \end{bmatrix}, \\ A_1 = A_2 = A_4 &= 0, \quad A_3 = \frac{2}{7}, \quad B_1 = \frac{N_{11}}{N_0}, \quad B_2 = -\frac{N_{12}}{N_0}, \\ \mathbf{Y}_h^{\pm} &= \pm \frac{2}{7} \mathbf{Y}_3 + \int_0^{\pm\infty} \mathbf{Z}_1 e^{-\eta^2 - x/\eta} d\eta. \end{aligned}$$

Для относительных перепадов температуры

$$\Delta T = \frac{T - T_0}{T_0} = \frac{4}{5} \pi^{-3/2} \int \left(C^2 + \gamma^2 - \frac{5}{2} \right) \varphi e^{-C^2 - \gamma^2} \gamma d\gamma d^3 C$$

и концентрации молекул газа

$$\Delta N = \frac{n - n_0}{n_0} = 2\pi^{-3/2} \int \varphi e^{-C^2 - \gamma^2} \gamma d\gamma d^3 C$$

получаем

$$\begin{aligned} \Delta T_h &= \mp \frac{2}{7} x + \pi^{-1/2} \int_0^{\pm\infty} \frac{N_{11}}{N_0} e^{-x/\eta} d\eta, \\ \Delta N_h &= \pm \frac{2}{7} x - \pi^{-1/2} \int_0^{\pm\infty} \frac{N_{12}}{N_0} e^{-x/\eta} d\eta. \end{aligned}$$

При этом массовое движение газа отсутствует, т.е.

$$J_h = 2\pi^{-3/2} \int \mu \varphi e^{-C^2 - \gamma^2} \gamma d\gamma d^3 C = 0,$$

а суммарный поток энергии

$$Q_h = 2\pi^{-3/2} \int \mu(C^2 + \gamma^2) \varphi e^{-C^2 - \gamma^2} \gamma d\gamma d^3C = \pm \frac{1}{2}.$$

Определенный интерес представляют распределения температуры и энергии по поступательным и вращательным степеням свободы

$$\begin{aligned} \Delta T^v &= \frac{4}{3} \pi^{-3/2} \int \left(C^2 - \frac{3}{2} \right) \varphi e^{-C^2 - \gamma^2} \gamma d\gamma d^3C, \\ \Delta T^\omega &= 2\pi^{-3/2} \int \varphi e^{-C^2 - \gamma^2} (\gamma^2 - 1) \gamma d\gamma d^3C, \\ Q^v &= 2\pi^{-3/2} \int \mu C^2 \varphi e^{-C^2 - \gamma^2} \gamma d\gamma d^3C, \\ Q^\omega &= 2\pi^{-3/2} \int \mu \varphi e^{-C^2 - \gamma^2} \gamma^3 d\gamma d^3C, \end{aligned}$$

которые условимся обозначать очевидными верхними индексами. Легко видеть, что

$$\Delta T = \frac{3\Delta T^v + 2\Delta T^\omega}{5}, \quad Q = Q^v + Q^\omega. \quad (16)$$

В случае раздельного возбуждения поступательных и вращательных степеней свободы

$$S_v = \frac{2}{3} C^2 - 1, \quad S_\omega = \gamma^2 - 1$$

векторы $\mathbf{X}_\alpha$ и $\mathbf{Z}_\beta$ следует представить в развернутой форме

$$X_\alpha = e_1 X_{1\alpha} + e_2 X_{2\alpha}, \quad Z_\beta = e_1 Z_{1\beta} + e_2 Z_{2\beta},$$

а соотношения (15) дополнить интегрированием по остальным проекциям скорости:

$$\begin{aligned} A_\alpha &= \frac{1}{\pi} \int (e_1 X_{1\alpha} + e_2 X_{2\alpha}) S e^{-C^2 - \gamma^2} \gamma d\gamma d^3C, \\ B_\beta &= \frac{2}{\pi} \int (e_1 Z_{1\beta} + e_2 Z_{2\beta}) S e^{-C^2 - \gamma^2} \gamma d\gamma d^3C. \end{aligned}$$

Необходимо заметить, что

$$S_h = \frac{3S_v + 2S_\omega}{5}. \quad (17)$$

Для полноты картины следует рассмотреть источник частиц

$$\mathbf{S}_p = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Введем для величин ΔT , ΔT^v , ΔT^ω , ΔN , Q^v и Q^ω единое обозначение M_s^m . Здесь верхний индекс определяет вид момента функции распределения: $M_s^1 = \Delta T$, $M_s^2 =$

ΔT^v , $M_s^3 = \Delta T^\omega$, $M_s^4 = \Delta N$, $M_s^5 = Q^v$, $M_s^6 = Q^\omega$. Нижний индекс задает характер источника. Значение $s = 1$ соответствует S_h , $s = 2 - S_v$, $s = 3 - S_\omega$, $s = 4 - S_p$. Тогда величины M_s^m определяются соотношением

$$M_s^m = \pm a_s^m + \pi^{-1/2} \int_0^{\pm\infty} \frac{N_{11}b_1^s b_1^m + N_{22}b_2^s b_2^m - N_{12}(b_1^s b_2^m + b_2^s b_1^m)}{N_0} e^{-x/\eta} d\eta, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} b_1^1 &= b_2^4 = 1, & b_1^4 &= b_2^1 = 0, & b_1^2 &= \frac{5}{6}, & b_1^3 &= \frac{5}{4}, \\ b_2^2 &= -\frac{1}{6}, & b_2^3 &= \frac{1}{4}, & b_1^6 &= b_2^6 = -b_1^5 = -b_2^5 = \frac{\eta}{4}, \\ a_1^1 &= a_1^2 = a_1^3 = a_2^1 = a_2^2 = a_2^3 = a_3^1 = a_3^2 = a_3^3 = a_4^4 = -\frac{2}{7}x, \\ a_4^1 &= a_4^2 = a_4^3 = a_1^4 = a_2^4 = a_3^4 = \frac{2}{7}x, \\ a_1^5 &= a_2^5 = a_3^5 = \frac{15}{14}, & a_4^5 &= \frac{25}{28}, \\ a_1^6 &= a_2^6 = a_3^6 = \frac{1}{7}, & a_4^6 &= \frac{5}{7}. \end{aligned}$$

Попутно необходимо обратить внимание на симметрию относительно перестановки индексов тех моментов, которые соответствуют перепаду температуры и концентрации молекул газа, т.е. для $m \leq 4$. Другими словами, распределение, например, концентрации вокруг источника тепла $\Delta N_h = M_1^4$ совпадает с распределением температуры вокруг источника частиц $\Delta T_p = M_4^1$.

Рис. 1. График зависимости функций I_{ij} и I'_{ij} от расстояния до источника. Кривая 1 — значения I_{11} , 2 — I_{12} , 3 — I_{22} , 4 — I'_{11} , 5 — I'_{12} , 6 — I'_{22} .

Очевидно, что плоский источник можно рассматривать как систему изотропных точечных источников. Следовательно, распределение вокруг него любой скалярной величины ρ_{pl} можно выразить через распределение этой величины около точечного источника ρ_{pt} ,

$$\rho_{\text{pl}}(x) = \int \rho_{\text{pt}}(r) d\sigma = 2\pi \int_x^\infty r \rho_{\text{pt}}(r) dr, \quad (19)$$

где r – расстояние от элемента поверхности $d\sigma$ до рассматриваемой точки пространства.

Рис. 2. Вклад функций I_{ij} в распределение температуры от источника тепла. Кривая 1 – значения $(\Delta T_{\text{h}} - T_{\text{h}}^{\text{as}})r^2$, 2 – $(\Delta T_{\text{h}}^v - T_{\text{h}}^{\text{as}})r^2$, 3 – $(\Delta T_{\text{h}}^\omega - T_{\text{h}}^{\text{as}})r^2$.

Рис. 3. Вклад функций I_{ij} в распределение температуры при возбуждении поступательных степеней свободы. Кривая 1 – значения $(\Delta T_v - T_{\text{h}}^{\text{as}})r^2$, 2 – $(\Delta T_v^v - T_{\text{h}}^{\text{as}})r^2$, 3 – $(\Delta T_v^\omega - T_{\text{h}}^{\text{as}})r^2$.

Аналогично для модуля любой векторной величины получаем

$$J_{\text{pl}}(x) = \int J_{\text{pt}}(r) \frac{x}{r} d\sigma = 2\pi \int_x^\infty x J_{\text{pt}}(r) dr. \quad (20)$$

Из уравнений (19) и (20) находим, что

$$\rho_{\text{pt}}(r) = -\frac{1}{2\pi r} \frac{d\rho_{\text{pl}}(r)}{dr}, \quad J_{\text{pt}}(r) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d}{dr} \frac{J_{\text{pl}}(r)}{r}.$$

Рис. 4. Вклад функций I_{ij} в распределение температуры при возбуждении вращательных степеней свободы. Кривая 1 – значения $(\Delta T_\omega - T_h^{\text{as}})r^2$, 2 – $(\Delta T_\omega^v - T_h^{\text{as}})r^2$, 3 – $(\Delta T_\omega^\omega - T_h^{\text{as}})r^2$.

Рис. 5. Вклад функций I_{ij} в распределение температуры от источника частиц. Кривая 1 – значения $(T_p^{\text{as}} - \Delta T_p)r^2$, 2 – $(T_p^{\text{as}} - \Delta T_p^v)r^2$, 3 – $(T_p^{\text{as}} - \Delta T_p^\omega)r^2$.

Таким образом, для точечного изотропного источника

$$\begin{aligned}
 \Delta T_h &= \Delta T_h^{\text{as}} + \frac{I_{11}}{r^2}, & \Delta T_v &= \Delta T_h^{\text{as}} + \frac{5I_{11} + I_{12}}{6r^2}, \\
 \Delta T_v^\omega &= \Delta T_h^{\text{as}} + \frac{25I_{11} - I_{22}}{24r^2}, & \Delta T_p^v &= \Delta T_p^{\text{as}} - \frac{5I_{12} + I_{22}}{6r^2}, \\
 \Delta N_h &= \Delta N_h^{\text{as}} - \frac{I_{12}}{r^2}, & \Delta N_p &= \Delta N_p^{\text{as}} + \frac{I_{22}}{r^2}, \\
 Q_h^v &= \frac{5}{7}Q_h - \frac{I'_{11} - I'_{12}}{4r^2}, & Q_v^v &= \frac{5}{7}Q_h - \frac{5I'_{11} - 4I'_{12} - I'_{22}}{24r^2}, \\
 Q_p^v &= \frac{5}{7}Q_p - \frac{I'_{22} - I'_{12}}{4r^2}, \\
 Q_h &= J_p = \frac{1}{4\pi r^2}, & Q_p &= \frac{5}{8\pi r^2}, \quad J_h = 0, \\
 I_{ij} &= \frac{r}{2\pi^{3/2}} \int_0^\infty \frac{N_{ij}}{\eta N_0} e^{-r/\eta} d\eta, \\
 I'_{ij} &= \frac{1}{2\pi^{3/2}} \int_0^\infty \frac{N_{ij}}{N_0} (\eta + r) e^{-r/\eta} d\eta.
 \end{aligned}$$

Рис. 6. График отлчия распределения концентрации молекул от газодинамического решения. Кривая 1 – значения $(\Delta N_p - N_p^{as})r^2$, 2 – $(N_h^{as} - \Delta N_h)r^2$, 3 – $(N_h^{as} - \Delta N_h^v)r^2$, 4 – $(N_h^{as} - \Delta N_h^\omega)r^2$.

Рис. 7. График распределения потока тепла по поступательным и вращательным степеням свободы. Кривая 1 – значения Q_h^v/Q_h , 2 – Q_v^v/Q_h , 3 – Q_ω^v/Q_h , 4 – Q_p^v/Q_p , 5 – Q_h^ω/Q_h , 6 – Q_v^ω/Q_h , 7 – Q_ω^ω/Q_h , 8 – Q_p^ω/Q_p .

Остальные моменты определяются отмеченными ранее свойствами их симметрии относительно перестановки индексов, выражениями (16) и вытекающим из (17) соотношением

$$5M_h^m = 3M_v^m + 2M_\omega^m.$$

Функции

$$\Delta T_h^{\text{as}} = -\Delta N_h^{\text{as}} = \frac{1}{7\pi r}$$

соответствуют газодинамическим решениям, которые определяют распределения температуры и концентрации молекул газа, создаваемые точечным источником тепла на достаточно большом расстоянии от него, и не зависят от способа возбуждения энергии.

Величины

$$\Delta N_p^{\text{as}} = -\Delta T_p^{\text{as}} = \frac{1}{7\pi r}$$

задают асимптотические распределения температуры и концентрации молекул газа вокруг источника тепла.

В пределе $r \rightarrow 0$ имеем

$$I_{11} = \frac{9}{50\pi^{3/2}}, \quad I_{12} = \frac{1}{10\pi^{3/2}}, \quad I_{22} = \frac{1}{2\pi^{3/2}}, \\ I'_{11} = 0.097950660790, \quad I'_{12} = 0.052443318251, \quad I'_{22} = 0.115635375059.$$

Соответственно

$$\Delta T_h = \frac{9}{50\pi^{3/2}r^2}, \quad \Delta T_h^v = \frac{1}{6\pi^{3/2}r^2}, \quad \Delta T_h^\omega = \frac{1}{5\pi^{3/2}r^2}, \quad \Delta N_h = -\frac{1}{10\pi^{3/2}r^2}, \\ \Delta T_v = \Delta T_v^v = \Delta T_v^\omega = -\Delta N_v = \frac{1}{6\pi^{3/2}r^2}, \\ \Delta T_\omega = \frac{1}{5\pi^{3/2}r^2}, \quad \Delta T_\omega^v = \frac{1}{6\pi^{3/2}r^2}, \quad \Delta T_\omega^\omega = \frac{1}{4\pi^{3/2}r^2}, \quad \Delta N_\omega = \Delta N_h^{\text{as}}, \\ \Delta T_p = -\frac{1}{10\pi^{3/2}r^2}, \quad \Delta T_p^v = -\frac{1}{6\pi^{3/2}r^2}, \quad \Delta T_p^\omega = \Delta T_p^{\text{as}}, \quad \Delta N_p = \frac{1}{2\pi^{3/2}r^2}, \\ Q_h^v = 0.5713201813Q_h, \quad Q_v^v = 0.6282350537Q_h, \quad Q_\omega^v = 0.4859478727Q_h, \\ Q_h^\omega = 0.4286798187Q_h, \quad Q_v^\omega = 0.3717649463Q_h, \quad Q_\omega^\omega = 0.5140521273Q_h, \\ Q_p^v = 0.6348762337Q_p, \quad Q_p^\omega = 0.3651237663Q_p.$$

Зависимость функций I_{ij} и I'_{ij} от расстояния до источника приведена на рис. 1. На рис. 2–6 показан вклад этих функций в распределения температуры и концентрации молекул газа. Характер распределения потока тепла по степеням свободы представлен на рис. 7.

Как видно из представленных графиков, в непосредственной близости от источника распределение макроскопических характеристик газа определяется решениями непрерывного спектра, причем для всех рассмотренных типов источника тепла вращательные степени свободы дают несколько больший вклад в распределение температуры, чем поступательные. В случае источника частиц основное изменение внутренней энергии газа обусловлено поступательным движением молекул.

С удалением от источника вклад решений непрерывного спектра уменьшается; при этом исчезает различие между величинами T_v и T_ω . В результате на расстояниях, больших нескольких длин свободного пробега молекул газа, распределения температуры и концентрации определяются газодинамическими решениями.

Аналогично в непосредственной близости от источника вклад вращательных степеней свободы в результирующий поток тепла оказывается бóльшим, а поступательных — меньшим, чем на бесконечности. С удалением от источника устанавливается соотношение $2Q^v = 5Q^\omega$, что соответствует распределению потока энергии в газодинамической области.

Полученные результаты могут быть использованы при изучении общих закономерностей тепло- и массопереноса в разреженных газах, для анализа явлений, связанных с прохождением луча лазера в поглощающей среде, в частности эффекта самофокусировки, и т.п.

Изложенный подход к решению кинетического уравнения может найти приложение при решении аналогичных проблем в других областях математической физики.

Список литературы

- [1] В. М. Жданов, М. Я. Алиевский. Процессы переноса и релаксации в молекулярных газах. М.: Наука, 1989.
- [2] А. В. Латышев, А. А. Юшканов. ТМФ. 1993. Т. 95. № 3. С. 530–540.
- [3] А. В. Латышев, А. А. Юшканов. ЖЭТФ. 1998. Т. 114. № 3(9). С. 956–971; А. Б. Поддоскин, А. А. Юшканов. Изв. РАН. Сер. МЖГ. 1998. № 5. С. 182–189; А. Б. Поддоскин, А. А. Юшканов, Ю. И. Яламов. Изв. РАН. Сер. МЖГ. 1999. № 4. С. 163–170; А. В. Латышев, А. А. Юшканов. ПМТФ. 2001. Т. 42. № 3. С. 91–100.
- [4] К. Кейз, П. Цвайфель. Линейная теория переноса. М.: Мир, 1976.
- [5] С. А. Савков, А. А. Юшканов. ТМФ. 1997. Т. 113. № 1. С. 139–148.
- [6] Ю. Казан, А. М. Афанасьев. ЖЭТФ. 1961. Т. 41. № 5. С. 1536–1545.
- [7] T. F. Morse. Phys. Fluids. 1964. V. 7. № 2. P. 159–169; L. H. Holway. Phys. Fluids. 1966. V. 9. № 9. P. 1658–1673; C. A. Bray. Phys. Fluids. 1967. V. 10. № 1. P. 48–55; F. B. Hanson, T. F. Morse. Phys. Fluids. 1967. V. 10. № 2. P. 345–353; В. А. Рыков. Изв. РАН. Сер. МЖГ. 1975. № 6. С. 107–115.
- [8] М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987.

Поступила в редакцию 27.11.2002 г.