Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Дегасперис, Д. Д. Холм, А. Хон, Новое интегрируемое уравнение с пиконными решениями, *ТМФ*, 2002, том 133, номер 2, 170–183

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf388>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 14:10:49

© 2002 г. А. Дегасперис*, Д. Д. Холм†, А. Н. И. Хон‡

НОВОЕ ИНТЕГРИРУЕМОЕ УРАВНЕНИЕ С ПИКОННЫМИ РЕШЕНИЯМИ

Рассмотрено новое дифференциальное уравнение в частных производных, имеющее вид, аналогичный виду уравнения мелкой воды Камасса–Холма, которое было недавно получено Дегасперисом и Прочези с использованием метода асимптотической интегрируемости. Доказывается точная интегрируемость нового уравнения путем построения его пары Лакса и объясняется связь этого уравнения с отрицательным потоком в иерархии Каупа–Купершмидта через преобразование взаимности. Бесконечная последовательность сохраняющихся величин выводится вместе с предложенной бигамильтоновой структурой. Уравнение допускает точные решения в виде суперпозиции мультипиконов. Описывается интегрируемая конечномерная динамика пиконов и сравнивается с аналогичными результатами для пиконов Камасса–Холма.

Ключевые слова: пиконы, преобразования взаимности, слабые решения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнение мелкой воды Камасса–Холма (КХ)

$$u_t + 2\kappa u_x + \gamma u_{xxx} - u_{xxt} + 3uu_x = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx} \quad (1.1)$$

привлекало к себе значительный интерес со времени своего появления [1]. Исходно оно было выведено как аппроксимация несжимаемых уравнений Эйлера, а в работе [2] была установлена его полная интегрируемость, включая пару Лакса и связанную с ней бигамильтонову структуру. Впоследствии было показано, что оно имеет голографическую связь с иерархией Кортевега–Де Фриза (КдФ) и интерпретацию в рамках наследственно рекурсионных операторов [3]. В статье [4] было показано, что уравнения КХ с линейной дисперсией на порядок более точны при асимптотической аппроксимации за рамками уравнения КдФ для волн на мелкой воде. Тем не менее они сохраняют солитонные

*Dipartimento di Fisica, Università di Roma “La Sapienza”, Roma, Italia and Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, Sezione di Roma. E-mail: antonio.degasperis@roma1.infn.it

†Theoretical Division and Center for Nonlinear Studies, Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, USA. E-mail: dholm@lanl.gov

‡Institute of Mathematics & Statistics, University of Kent, Canterbury, UK.
E-mail: anwh@ukc.ac.uk

свойства КдФ, такие как полная интегрируемость методом обратной задачи рассеяния. В работах [5] изучались также $(2 + 1)$ -мерные аналоги уравнения КХ. Особенно необычная черта уравнения (1.1) состоит в том, что в бездисперсионном пределе $\kappa \rightarrow 0$ оно допускает пиконные солитоны, или пиконы. Отдельный пикон имеет вид

$$u(x, t) = ce^{-|x-ct|}, \quad (1.2)$$

а N -пиконные решения являются простой суперпозицией:

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^N p_j(t) e^{-|x-q_j(t)|}, \quad (1.3)$$

где канонические координаты q_j и импульсы p_j удовлетворяют полностью интегрируемой конечномерной гамильтоновой системе.

Поводом для написания данной работы послужил вопрос о том, какие уравнения того же вида, что и (1.1), являются интегрируемыми. В недавнем исследовании [6] метод асимптотической интегрируемости был применен к семейству дисперсионных законов сохранения для дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка

$$u_t + c_0 u_x + \gamma u_{xx} - \alpha^2 u_{xxt} = (c_1 u^2 + c_2 u_x^2 + c_3 u u_{xx})_x, \quad (1.4)$$

правая часть которых является производной квадратичного дифференциального многочлена. Внутри этого семейства выделяются только три уравнения, удовлетворяющие условиям асимптотической интегрируемости вплоть до третьего порядка, а именно уравнения КдФ ($\alpha = c_2 = c_3 = 0$), КХ ($c_1 = -3c_3/2\alpha^2$, $c_2 = c_3/2$) и одно новое уравнение ($c_1 = -2c_3/\alpha^2$, $c_2 = c_3$), которое можно привести к виду

$$u_t + u_x + 6u u_x + u_{xxx} - \alpha^2 \left(u_{xxt} + \frac{9}{2} u_x u_{xx} + \frac{3}{2} u u_{xxx} \right) = 0. \quad (1.5)$$

(К сожалению, уравнение в работе [6] приведено с типографской ошибкой, вместо $3/2$ напечатано $2/3$.) Однако применяемый в работе [6] метод только выделяет необходимые условия интегрируемости, но не является достаточным для ее доказательства. Посредством явного построения пары Лакса нового уравнения (1.5) мы покажем, что оно является интегрируемым.

Простое наблюдение, которое оказалось очень полезным в наших исследованиях, состоит в том, что с помощью рескейлинга, сдвига зависимой переменной и применения галилеева буста уравнение (1.5) можно преобразовать к бездисперсионному виду

$$u_t - u_{xxt} + 4u u_x = 3u_x u_{xx} + u u_{xxx}, \quad (1.6)$$

но интегрируемость не затрагивается такими преобразованиями. (Мы положили параметр $\alpha = 1$, но при рассмотрении различных пределов бывает удобно снова его ввести.)

Следующее ключевое наблюдение состоит в том, что в такой форме уравнение (1.6) имеет отдельный пикон (1.2), так же как и точное решение распространяющейся волны. Это привело к рассмотрению семейства уравнений

$$u_t - u_{xxt} + (b+1)uu_x = bu_x u_{xx} + uu_{xxx} \quad (1.7)$$

с вещественным параметром b , которое включает в себя и уравнение КХ ($b = 2$), и новое уравнение (1.6) ($b = 3$) как особые случаи. Оказывается, что все уравнения этого семейства обладают не только пиконным решением (1.2), но и многопиконным решением (1.3). Для произвольного b величины p_j и q_j не являются каноническими переменными, а удовлетворяют динамической системе

$$\dot{p}_j = -(b-1)\frac{\partial G_N}{\partial q_j}, \quad \dot{q}_j = \frac{\partial G_N}{\partial p_j}, \quad (1.8)$$

где производящая функция G_N имеет вид

$$G_N = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^N p_j p_k e^{-|q_j - q_k|}. \quad (1.9)$$

Канонический гамильтонов вид достигается только в специальном случае $b = 2$ (КХ).

Из асимптотического анализа, проведенного в работе [6], следует, что случаи $b = 2$ и $b = 3$ должны быть единственными возможными случаями интегрируемости внутри семейства (1.7). С использованием анализа Пенлеве в работе [7] была проанализирована интегрируемость класса дифференциальных уравнений в частных производных, включающего все уравнения (1.7). Но поскольку и уравнения КХ (1.1), и новое уравнение (1.6) являются примерами интегрируемых систем с алгебраическим ветвлением решений (слабое свойство Пенлеве [8]), они были явно исключены различными тестами Пенлеве, примененными в [7], и в действительности все уравнения этого класса не прошли комбинацию тестов. Авторы [7] заметили, что (сильное) свойство Пенлеве нарушается при заменах переменных, и таким образом перед применением теста может потребоваться некое преобразование. Для уравнения КХ преобразования взаимности дают связь с отрицательным потоком КдФ (см. [3], [9]), чем восстанавливается свойство Пенлеве. В своей следующей статье [10] мы обобщим это преобразование на все семейство (1.7). Дальнейшим применением анализа Пенлеве к преобразованному семейству уравнений как кандидаты на интегрируемость выделяются только случаи $b = 2, 3$.

В этой работе мы ограничимся рассмотрением нового интегрируемого уравнения (1.6). Сначала мы приведем соответствующую линейную систему с оператором Лапса третьего порядка, объясним связь с отрицательным потоком иерархии Каупа–Купершмидта [11] и выведем бесконечное множество законов сохранения и предложенную бигамильтонову структуру. Мы рассмотрим также динамику многопиконных решений, описываемых конечномерной системой (1.8) в частном случае $b = 3$.

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВЗАИМНОСТИ

Рассмотрим уравнение (1.6), записав его в виде

$$m_t + m_x u + 3m u_x = 0, \quad m = \mathcal{L}u := (1 - \partial_x^2)u. \quad (2.1)$$

Из такого вида уравнения ясно, что имеет место закон сохранения

$$(m^{1/3})_t = -(m^{1/3}u)_x. \quad (2.2)$$

Конструкция остальных законов сохранения (бесконечного множества) будет представлена в разделе 4.

Наш подход состоит в использовании преобразования взаимности, осуществляющего отображения между системами законов сохранения [12]; известно, что такие преобразования могут использоваться для связи систем с алгебраическим ветвлением решений с уравнениями, имеющими только полюсные сингулярности. Примером этого является уравнение КХ, обладающее преобразованием взаимности к первому отрицательному потоку в КдФ-иерархии, а именно уравнение

$$R \cdot V_T = 0, \quad (2.3)$$

где $R = \partial_X^2 + 4V + 2V_X \partial_X^{-1}$ – рекурсионный оператор КдФ (подробности см. в работе [9] и приведенной в ней библиографии). Уравнение КХ обладает слабым разложением Пенлеве с ветвлением типа кубического корня [7], тогда как решения КдФ имеют сингулярности в виде двойных полюсов.

Чтобы определить преобразование взаимности для уравнения (2.1), введем зависящую переменную

$$p = -m^{1/3}, \quad (2.4)$$

которая связана с u при помощи соотношения

$$p^3 = (\partial_x^2 - 1)u. \quad (2.5)$$

Затем воспользуемся законом сохранения (2.2) в виде

$$p_t = -(pu)_x \quad (2.6)$$

для определения новых независимых переменных X и T , исходя из того, что

$$dX = p dx - pu dt, \quad dT = dt. \quad (2.7)$$

Преобразуя производные, находим новый закон сохранения:

$$(p^{-1})_T = u_X. \quad (2.8)$$

Замена ∂_x на $p\partial_X$ в соотношении (2.5) и использование уравнения (2.8) для исключения производных u приводит к тождеству $u = -p(\ln p)_{XT} - p^3$, используя которое, можно записать уравнение (2.8) в терминах только p как

$$(p^{-1})_T + (p(\ln p)_{XT} + p^3)_X = 0. \quad (2.9)$$

Далее оказывается, что это уравнение можно записать в форме другого закона сохранения:

$$\left(-\frac{p_{XX}}{p} + \frac{p_X^2}{2p^2} - \frac{1}{2p^2}\right)_T = \frac{3}{2}(p^2)_X, \quad (2.10)$$

которое удобнее всего рассматривать как систему

$$\begin{aligned} V_T &= \frac{3}{4}(p^2)_X, \\ pp_{XX} - \frac{1}{2}p_X^2 + 2Vp^2 + \frac{1}{2} &= 0, \end{aligned} \quad (2.11)$$

второе уравнение которой (Ермакова–Пинни) определяет V . Прямым следствием уравнения Ермакова–Пинни является уравнение

$$B \cdot p = 0, \quad B \equiv R \cdot \partial_X = \partial_X^3 + 4V\partial_X + 2V_X. \quad (2.12)$$

В работе [13] приведен обзор результатов и ссылок, относящихся к уравнению Ермакова–Пинни. Получив уравнение (2.9) из (2.1) с использованием преобразования взаимности (2.7), можно проверить выполнение стандартного WTC-теста Пенлеве [14]. В действительности исходное уравнение (2.1) допускает разложение с ветвлением типа квадратного корня, но такие обобщенные (слабые [8]) разложения Пенлеве были специально исключены из классификации [7]. Дальнейшие подробности анализа Пенлеве будут представлены в работе [10].

3. ПАРА ЛАКСА

Уравнение (2.9), эквивалентное системе (2.11), интегрируемо, поскольку оно допускает пару Лакса

$$\begin{aligned} \psi_{XXX} + 4V\psi_X + (2V_X - \lambda)\psi &= 0, \\ \psi_T + \lambda^{-1} \left(p^2\psi_{XX} - pp_X\psi_X - \left(pp_{XX} - p_X^2 + \frac{2}{3} \right) \psi \right) &= 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Приведенный выше оператор третьего порядка является оператором Лакса иерархии Каупа–Купершмидта (КК) [11], и таким образом система (2.11) может рассматриваться как первый отрицательный поток в этой иерархии. Насколько нам известно, эта система ранее не изучалась, хотя она, как выяснилось, является интегрируемым обобщением уравнения Цицейки. (От константы $2/3$ во втором уравнении (3.1) можно избавиться калибровкой, но ее наличие облегчает сравнение с работой [11]).

Однако уравнение (2.9) не является самым общим отрицательным КК-поток, выведенным из такой пары Лакса с обратной степенью λ в T -части. Действительно, начиная с более общей временной эволюции вида

$$\psi_T + \lambda^{-1} \left(W \psi_{XX} - \frac{1}{2} W_X \psi_X + \frac{1}{6} (W_{XX} + 16VW) \psi \right) = 0, \quad (3.2)$$

которая является редукцией временной части $(2 + 1)$ -мерной неизоспектральной КК-иерархии, введенной в [11], получим, что условия совместности уравнения Лакса третьего порядка с уравнением (3.2) приводят к условиям

$$V_T = \frac{3}{4} W_X, \quad \tilde{B} \cdot W = 0, \quad (3.3)$$

где

$$\tilde{B} = \partial_X^5 + 6(\partial_X V \partial_X^2 + \partial_X^2 V \partial_X) + 4(\partial_X^3 V + V \partial_X^3) + 32(\partial_X V^2 + V^2 \partial_X).$$

Рекурсионный оператор КК-иерархии имеет вид

$$R_{\text{КК}} = B \partial_X^{-1} \tilde{B} \partial_X^{-1}, \quad (3.4)$$

где B определяется уравнениями (2.12) и является оператором Гамильтона для иерархий КдФ, КК и Савады–Котера (см. работу [11] и приведенную в ней библиографию).

Таким образом видно, что более общий обратный КК-поток (3.3) является системой более высокого порядка, чем (2.11) (тогда как наиболее общий первый отрицательный поток $R_{\text{КК}} \cdot V_T = 0$ – система еще более высокого четного порядка). Однако удивительно то, что система (2.11) (или, что эквивалентно, (2.9)) представляет собой самосогласованную редукцию условий (3.3). Это следует из следующего замечательного операторного тождества:

$$\tilde{B} \cdot p^2 = 2(p \partial_X^2 + 5p_X \partial_X + 10p_{XX} + 16Vp) \cdot B \cdot p. \quad (3.5)$$

Тогда для произвольной функции $h(T)$ мы можем подставить

$$W = p^2, \quad V = -\frac{p_{XX}}{2p} + \frac{p_X^2}{4p^2} - \frac{h(T)}{4p^2} \quad (3.6)$$

в T -часть (3.2) пары Лакса, и при скейлинге $h(T) = 1$ (всегда возможно при $h \neq 0$) условие совместности пары Лакса примет вид (2.11). Это согласуется со вторым из условий (3.3) вследствие тождества (3.5) с учетом $B \cdot p = 0$ (см. (2.12)). В специальном случае $h(T) = 0$, который не существует для преобразования взаимности уравнения (2.1), можно проинтегрировать результирующую систему и получить

$$p(\ln p)_{XT} + p^3 + \tilde{h}(T) = 0, \quad (3.7)$$

где $\tilde{h}$ произвольно. При $\tilde{h} \neq 0$ можно изменить масштаб и переопределить T так, что $\tilde{h} = 1$; в этом случае уравнение (3.7) известно как уравнение Цицейки [15] или при зависимой переменной $\phi = \ln p$ — как уравнение Буллоу–Додда [16]

$$\phi_{XT} + e^{2\phi} + e^{-\phi} = 0. \quad (3.8)$$

Если $\tilde{h} = 0$, мы получим уравнение Лиувилля.

Окончательно представим пару Лакса для исходного уравнения (2.1) (или, что эквивалентно, для (1.6)). Полагая

$$\Psi = p^{-1}\psi, \quad (3.9)$$

учитывая $m = -p^3$ и преобразуя все производные в (3.1), находим, что Ψ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \Psi_x - \Psi_{xxx} - m\lambda\Psi &= 0, \\ \Psi_t + \frac{1}{\lambda}\Psi_{xx} + u\Psi_x - \left(u_x + \frac{2}{3\lambda}\right)\Psi &= 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

(Как и ранее, от получающейся в результате константы $2/(3\lambda)$ можно избавиться с помощью калибровочного преобразования.)

Стоит рассмотреть эффект галилеева буста и рескейлинга в уравнении (1.6), посредством которых восстанавливаются некоторые свободные параметры в (1.4), в результате чего получаем

$$m_t + c_0 u_x + \gamma u_{xxx} + m_x u + 3m u_x = 0, \quad m = u - \alpha^2 u_{xx}. \quad (3.11)$$

В этом случае при изменении масштаба спектрального параметра $\mu = \alpha^2 \lambda$ пара Лакса имеет вид

$$\begin{aligned} (1 - \alpha^2 \partial_x^2)\Psi_x &= \mu \left(m + \frac{c_0}{3} + \frac{\gamma}{3\alpha^2} \right) \Psi, \\ \Psi_t + \frac{1}{\mu}\Psi_{xx} + \left(u - \frac{\gamma}{\alpha^2} \right) \Psi_x - u_x \Psi &= 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

В бездисперсионном случае, если $c_0 = 0 = \gamma$, то с точностью до скейлинга уравнение (3.11) эквивалентно уравнению Римана для ударной волны

$$u_t + u u_x = 0 \quad (3.13)$$

в обоих пределах $\alpha^2 \rightarrow 0$ и $\alpha^2 \rightarrow \infty$, т.е. в пределе как больших, так и малых волновых чисел.

Обобщенное уравнение Цицейки (2.9) имеет много интересных решений, включая солитоны на постоянном фоне и редукцию к трансценденту Пенлеве III. Более подробно мы рассмотрим их в работе [10]. Здесь же отметим, что преобразование взаимности переводит односолитонное решение на постоянном фоне в солитонное решение уравнения (3.11) с дисперсией, обращающееся в нуль на бесконечности, тогда как пиконное решение (1.2) можно получить из солитонного в пределе нулевой дисперсии (хотя преобразование (2.7) нарушется для пиконов, когда $m = -p^3$ является дельта-функцией Дирака).

4. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

При выводе бесконечного числа законов сохранения для уравнения (1.6) сначала введем величину

$$\rho = (\ln \psi)_x. \quad (4.1)$$

Из пространственной части пары Лакса (3.10) получим

$$\mathcal{L}\rho := (1 - \partial_x^2)\rho = 3\rho\rho_x + \rho^3 + \lambda m, \quad (4.2)$$

тогда как (после удаления члена $2/(3\lambda)$) временная часть дает закон сохранения для ρ , а именно

$$\rho_t = j_x, \quad j = u_x - u\rho - \lambda^{-1}(\rho_x + \rho^2). \quad (4.3)$$

Плотность ρ , задаваемую уравнением (4.1), можно записать в виде формального ряда по степеням спектрального параметра λ с коэффициентами, определенными рекуррентно из (4.2). Подставляя соответствующее разложение для тока j в уравнение (4.3) и сравнивая степени λ , получаем бесконечную последовательность законов сохранения. Однако оказывается, что возможны два различных разложения, ведущих к двум бесконечным последовательностям сохраняющихся величин для уравнения (1.6). При $m = -p^3$, как и ранее, первое разложение принимает вид

$$\rho = p\zeta^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \rho^{(n)}\zeta^n, \quad \lambda = \zeta^{-3}, \quad (4.4)$$

с соответствующим разложением для тока в виде

$$j = -pu\zeta^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} j^{(n)}\zeta^n. \quad (4.5)$$

Главный член (ζ^{-1}) в уравнении (4.3) является, таким образом, просто законом сохранения (2.6). Первые два значения плотности и тока находятся рекуррентно из уравнений (4.2) и (4.3) и имеют вид

$$\begin{aligned} \rho^{(0)} &= -p_x p^{-1}, & \rho^{(1)} &= \frac{2}{3}p_{xx}p^{-2} - p_x^2 p^{-3} + \frac{1}{3p}; \\ j^{(0)} &= u_x - u\rho^{(0)}, & j^{(1)} &= -p^2 - u\rho^{(1)}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Для краткости мы опускаем рекуррентные соотношения для $\rho^{(n)}$ и $j^{(n)}$, однако отметим, что значения плотности принимают вид $\rho^{(n)} = P^{(n)}/p^{2n+1}$, где $P^{(n)}$ — полином степени $n+1$ в $p, p_x, \dots, p_{(n+1)x}$; четные члены $\rho^{(2n)}$ являются полными производными по x . Величины p и $\rho^{(1)}$ соответствуют сохраняющимся величинам H_5 и H_7 в уравнении (5.1), которое будет приведено ниже.

Второе разложение — разложение по положительным степеням λ :

$$\rho = \sum_{n=0}^{\infty} r^{(n)}\lambda^{n+1}, \quad j = \sum_{n=0}^{\infty} g^{(n)}\lambda^{n+1}. \quad (4.7)$$

Подробности рекурсивных формул для $r^{(n)}$, $g^{(n)}$ мы опять опускаем, однако заметим, что все нечетные величины $r^{(2n+1)}$ являются точными производными, и за исключением

$$r^{(0)} = u, \quad r^{(2)} = u^3 \quad (4.8)$$

(что дает приводимые ниже сохраняющиеся величины H_0 и H_{-1}) все другие нетривиальные плотности в этой последовательности нелокальны, поскольку появляются после повторного применения оператора, обратного оператору Гельмгольца $\mathcal{L} = (1 - \partial_x^2)$, возникающему в левой части уравнения (4.2).

Имеется другой закон сохранения, который не появляется в приведенных выше последовательностях, а именно

$$(v_{xx}^2 + 5v_x^2 + 4v^2)_t = \left(4u^2v - \frac{2}{3}u^3 - 4v\mathcal{L}^{-1}(u^2) - v_x\mathcal{L}^{-1}(u^2)_x \right)_x, \quad (4.9)$$

где v определяется уравнением

$$v := (4 - \partial_x^2)^{-1}u. \quad (4.10)$$

Этот закон сохранения дает сохраняющуюся величину H_1 в уравнении (5.1), которое будет приведено ниже, поскольку плотность в левой части уравнения (4.9) отличается от компактного выражения mv полной производной.

5. ГАМИЛЬТОНОВЫ СТРУКТУРЫ

Как было показано выше, уравнение (1.6) имеет бесконечную последовательность законов сохранения. Приведем здесь некоторые из простейших связанных с ними сохраняющихся величин:

$$\begin{aligned} H_{-1} &= -\frac{1}{6} \int u^3 dx, & H_0 &= -\frac{9}{2} \int m dx, \\ H_1 &= \frac{1}{2} \int mv dx, & H_5 &= \int m^{1/3} dx, \\ H_7 &= -\frac{1}{2} \int (m_x^2 m^{-7/3} + 9m^{-1/3}) dx. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Взяв $u = (1 - \partial_x^2)^{-1}m$, как и раньше, из (4.10) получаем $v = (4 - \partial_x^2)^{-1} \times (1 - \partial_x^2)^{-1}m$. Индексы расставлены так, что H_k порождает поток веса k с гамильтоновым оператором B_0 , как в приведенном ниже уравнении (5.2).

Если мы введем кососимметричные дифференциальные операторы B_0 и B_1 :

$$B_0 = \partial_x(1 - \partial_x^2)(4 - \partial_x^2), \quad B_1 = m^{2/3} \partial_x m^{1/3} (\partial_x - \partial_x^3)^{-1} m^{1/3} \partial_x m^{2/3}, \quad (5.2)$$

то можно сразу записать уравнение (1.6) в терминах градиента сохраняющейся величины двумя различными способами, а именно:

$$m_t = B_0 \frac{\delta H_{-1}}{\delta m} = B_1 \frac{\delta H_0}{\delta m}. \quad (5.3)$$

Тождество (5.3) является предлагаемой нами бигамильтоновой формой уравнения. Однако для того чтобы утверждать, что операторы B_0, B_1 определяют настоящую бигамильтонову структуру, необходимо проверить, что они оба являются гамильтоновыми (пуассоновыми) операторами и что они совместны [17]. Первый оператор B_0 имеет постоянные коэффициенты, поэтому тождество Якоби тривиально и оператор с очевидностью является пуассоновым, но для нелокального оператора B_1 проверить тождество Якоби нам не удалось.

Мы заметили другие свойства пары операторов (5.2), указывающие на то, что эти операторы определяют правильную бигамильтонову структуру для уравнения (1.6). Видно, что среди величин (5.1) H_0 является оператором Казимира для B_0 , а H_5 – для B_1 . Трансляционный поток иерархии имеет вид

$$m_x = B_0 \frac{\delta H_1}{\delta m} = B_1 \frac{\delta H_7}{\delta m}, \quad (5.4)$$

где второе равенство в уравнении (5.4) требует должного определения интегрального оператора ∂_x^{-1} , входящего в B_1 . Кроме того, векторное поле пятого порядка $B_0 \delta H_5 / \delta m$ представляет собой просто преобразование взаимности уравнения КК пятого порядка. Это является весомым свидетельством в пользу того, что оператор $B_0 B_1^{-1}$ должен быть преобразованием взаимности КК-рекурсионного оператора (3.4).

6. ПИКОННАЯ ДИНАМИКА

Рассмотрим динамику многопиконных решений уравнения (1.6), которые при произвольном числе пиконов N принимают вид

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^N p_j(t) e^{-|x - q_j(t)|}, \quad m = 2 \sum_{j=1}^N p_j(t) \delta(x - q_j(t)). \quad (6.1)$$

Подстановка выражения (6.1) в уравнение (1.6) дает связанные обыкновенные дифференциальные уравнения для $q_j(t), p_j(t)$, а именно

$$\begin{aligned} \dot{p}_j &= 2 \sum_{k=1}^N p_j p_k \operatorname{sgn}(q_j - q_k) e^{-|q_j - q_k|}, \\ \dot{q}_j &= \sum_{k=1}^N p_k e^{-|q_j - q_k|}, \end{aligned} \quad (6.2)$$

что является просто частным случаем системы (1.8), когда $b = 3$. Хотя переменные q_j и p_j не являются каноническими и мы не нашли (неканоническую) гамильтонову структуру (за исключением специального случая, когда $N = 2$), динамическая система (6.2) интегрируема в том смысле, что она возникает из уравнения Лакса

$$\dot{\mathbf{L}} = [\mathbf{M}, \mathbf{L}], \quad (6.3)$$

где $\mathbf{L}$ и $\mathbf{M}$ принимают вид

$$\mathbf{L} = (1 + 2\mathbf{C} - \mathbf{A} + \mathbf{A}^T)\mathbf{P}, \quad \mathbf{M} = (\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)\mathbf{P} - \mathbf{D}. \quad (6.4)$$

Чтобы задать матрицы в паре Лакса, построенные из строго нижнетреугольных матриц $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$ и диагональных матриц $\mathbf{P}$, $\mathbf{D}$, заметим сначала, что немедленным следствием системы уравнений (6.2) является то, что $d \operatorname{sgn}(q_j - q_k)/dt = 0$, и таким образом пики сохраняют свое относительное упорядочение (как и КХ-пики). Без потери общности мы можем взять упорядочение $q_1 < q_2 < \dots < q_N$, и тогда ненулевые компоненты возникающих в уравнении (6.4) матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{C}$ могут быть выбраны (без знаков модуля) в виде

$$A_{jk} = e^{q_k - q_j}, \quad C_{jk} = 1, \quad j > k, \quad (6.5)$$

тогда как диагональные элементы $\mathbf{P}$, $\mathbf{D}$ являются компонентами соответствующих векторов

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_N)^T, \quad \mathbf{d} = (\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)\mathbf{p}. \quad (6.6)$$

В случае 2-пиконного рассеяния, т.е. уравнения (6.2) при $N = 2$, мы рассматриваем два пикона, которые изначально находятся на значительном удалении, причем $q_1 < q_2$, и имеют асимптотические скорости c_1 и c_2 при $t \rightarrow -\infty$, где $c_1 > c_2$ и $c_1 > 0$, так что в конце концов они сталкиваются. Это показано на рис. 1.

Рис. 1. Два задних столкновения $b = 3$ -пикионов. Исходными положениями являются $x = 33$ и $x = 66$. Более быстрые пикионы движутся со скоростью, в три раза превышающей скорость более медленных. При таком соотношении скоростей в результате обоих столкновений происходит сдвиг фаз вправо для более быстрой пространственно-временной траектории, однако для более медленной траектории сдвига фаз не происходит.

В этом случае есть две сохраняющиеся величины

$$P := p_1 + p_2 = c_1 + c_2, \quad H := p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2e^{q_1-q_2}(2 - e^{q_1-q_2}) = c_1^2 + c_2^2. \quad (6.7)$$

Уравнения движения легче решаются в терминах суммы и разности переменных $P = p_1 + p_2$ и $Q = q_1 + q_2$, $p = p_1 - p_2$ и $q = q_1 - q_2$, и соответствующие квадратуры почти такие же, как и в случае КХ (см. [2]). Для положения пиков можно найти явные формулы

$$q_1(t) = c_1 t + \frac{1}{2} \ln(4\Gamma(c_1 - c_2)^2) - \ln(\Gamma e^{(c_1 - c_2)t} + 4c_2 P), \quad (6.8)$$

$$q_2(t) = c_2 t - \frac{1}{2} \ln(4\Gamma(c_1 - c_2)^2) + \ln(\Gamma e^{(c_1 - c_2)t} + 4c_1 P), \quad (6.9)$$

где Γ – постоянная интегрирования.

В пределе $t \rightarrow \infty$ эти формулы показывают, что солитоны обмениваются своими асимптотическими скоростями или, что эквивалентно, импульсами и амплитудами следующим образом:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q_1(t) = c_2 t, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} q_2(t) = c_1 t. \quad (6.10)$$

Следовательно, основным эффектом в рассеянии пиконных является обмен импульсами, или амплитудами, между двумя пиконами, в результате чего происходит только сдвиг фаз на асимптотических временах. Сдвиг фаз для более быстрого солитона (имеющего скорость c_1 в пределе $t \rightarrow -\infty$) можно определить и вычислить, используя (6.8) и (6.9), следующим образом:

$$\Delta q_f = q_2(+\infty) - q_1(-\infty) = \ln \left[\frac{c_1(c_1 + c_2)}{(c_1 - c_2)^2} \right]. \quad (6.11)$$

Аналогично сдвиг фаз для более медленного солитона (имеющего скорость c_2 в пределе $t \rightarrow -\infty$) можно определить и вычислить, используя (6.8) и (6.9):

$$\Delta q_s = q_1(+\infty) - q_2(-\infty) = \ln \left[\frac{(c_1 - c_2)^2}{c_2(c_1 + c_2)} \right]. \quad (6.12)$$

Тогда при $c_1/c_2 > 3$ оба пикона испытывают сдвиг вперед, а при $1 < c_1/c_2 < 3$ более быстрый пикон сдвигается вперед, тогда как более медленный сдвигается назад; случай $c_1/c_2 = 3$ представляет собой точку поворота, в которой медленный пикон не имеет фазового сдвига. Замечательным оказывается то, что правила рассеяния для сдвига фаз точно соответствуют правилам для КХ-пиконных, кроме случая рассеяния $3 \rightarrow 2$ [2].

Интересным является специальный случай рассеяния пикон–антипикон, когда c_1 и c_2 имеют противоположные знаки; только в этом случае может иметь место перекрытие солитонов, когда переменная $p = p_1 - p_2$ расходится. Для полностью антисимметричного рассеяния, когда $c_1 = -c_2 = c$, получающееся решение дифференциального уравнения в частных производных (2.1) имеет вид

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{c}{1 - e^{-2c|t|}} (e^{-|x+c|t|} - e^{-|x-c|t|}), \\ m(x, t) &= \frac{2c}{1 - e^{-2c|t|}} (\delta(x + c|t|) - \delta(x - c|t|)). \end{aligned} \quad (6.13)$$

Рис. 2. $b = 3$ -пиконы, появляющиеся из гауссиана единичной площади и $\sigma = 5$ с центром в точке около $x = 33$ в периодической области длиной $L = 100$. Наиболее быстрые пиконы пересекают область пять раз и многократно испытывают упругие взаимодействия с более медленными.

Используя численные симуляции, мы исследовали также появление пиконов из гауссова начального условия. На рис. 2 приведены свидетельства интегрируемого поведения для упругих столкновений пиконов при повторных пересечениях периодической области.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В последующей работе [10] мы рассмотрим интегродифференциальное обобщение уравнения (1.7), распространив результаты работы [18] на случай дополнительного параметра b , когда имеются многопультсонные решения, описываемые конечномерной системой (1.8) с производящей функцией

$$G_N = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N p_i p_j g(q_i - q_j)$$

при произвольной четной функции $g(x)$ (так что $g(x) = e^{-|x|}$ в случае пиконов). При произвольном значении b двухпультсонная ($N = 2$) динамика оказывается гамильтоновой и интегрируемой.

Благодарности. Мы хотели бы поблагодарить Институт математических наук Исаака Ньютона в Кембридже за поддержку нашего участия в конференции NEEDS и в программе по интегрируемым системам, а также М. Стейли за подготовку рисунков.

Список литературы

- [1] *R. Camassa, D. D. Holm.* Phys. Rev. Lett. 1993. V. 71. P. 1661–1664.
- [2] *R. Camassa, D. D. Holm, J. M. Hyman.* Adv. Appl. Mech. 1994. V. 31. P. 1–33.
- [3] *B. Fuchssteiner.* Physica D. 1996. V. 95. P. 229–243.
- [4] *H. Dullin, G. Gottwald, D. D. Holm.* Phys. Rev. Lett. 2001. V. 87. P. 1945–1948.
- [5] *A. N. W. Hone.* Appl. Math. Lett. 2000. V. 13. P. 37–42; *R. A. Kraenkel, A. Zenchuk.* Phys. Lett. A. 1999. V. 260. P. 218–224.
- [6] *A. Degasperis, M. Procesi.* Asymptotic integrability. In: Symmetry and Perturbation Theory. Eds. A. Degasperis, G. Gaeta. Singapore: World Scientific, 1999. P. 23–37.
- [7] *C. Gilson, A. Pickering.* J. Phys. A. 1995. V. 28. P. 2871–2888.
- [8] *A. Ramani, B. Dorizzi, B. Grammaticos.* Phys. Rev. Lett. 1982. V. 49. P. 1538–1541.
- [9] *A. N. W. Hone.* J. Phys. A. 1999. V. 32. P. L307–314.
- [10] *A. Degasperis, A. N. W. Hone, D. D. Holm.* A Class of Equations with Peakon and Pulson Solutions. in preparation.
- [11] *P. R. Gordoa, A. Pickering.* J. Math. Phys. 1999. V. 40. P. 5749–5786.
- [12] *J. G. Kingston, C. Rogers.* Phys. Lett. A. 1982. V. 92. P. 261–264; *C. Rogers.* Reciprocal transformations and their applications. In: Nonlinear Evolutions. Ed. J. Leon. Singapore: World Scientific, 1988. P. 109–123; *C. Rogers.* Bäcklund transformations in soliton theory. In: Soliton Theory: a Survey of Results. Ed. A. P. Fordy. Manchester: Manchester University Press, 1990. P. 97–130.
- [13] *A. N. W. Hone.* Phys. Lett. A. 1999. V. 263. P. 347–354.
- [14] *J. Weiss, M. Tabor, G. J. Carnevale.* J. Math. Phys. 1983. V. 24. P. 522–526.
- [15] *G. Tzitzeica.* C. R. Acad. Sci. Paris. 1910. V. 150. P. 955–956; P. 1227–1229.
- [16] *R. K. Dodd, R. K. Bullough.* Proc. Roy. Soc. London A. 1977. V. 352. P. 481–502.
- [17] *P. Olver, P. Rosenau.* Phys. Rev. E. 1996. V. 53. P. 1900–1906; *I. Dorfman.* Dirac Structures and Integrability of Nonlinear Evolution Equations. New York: John Wiley & Sons, 1993.
- [18] *O. Fringer, D. D. Holm.* Physica D. 2001. V. 150. P. 237–263.