Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Дегасперис, С. В. Манаков, П. М. Сантини, Смешанные задачи для линейных и солитонных уравнений в частных производных, *ТМФ*, 2002, том 133, номер 2, 184–201

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf389>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 14:13:27

© 2002 г. А. Дегасперис*, С. В. Манаков[†], П. М. Сантини*

СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ И СОЛИТОННЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Рассматриваются эволюционные уравнения в частных производных для волн с дисперсией как в линейном, так и в нелинейном интегрируемом случаях и даются формулировки соответствующих смешанных задач в спектральном пространстве. Предложен метод решения, основанный на фиксации произвола в выборе граничных данных с помощью наложения подходящих ограничений на функциональное пространство и на комплексную область допустимых спектральных переменных. Подход проиллюстрирован на примере линейного уравнения Шредингера на ограниченных и полугораниченных n -мерных областях и на примере нелинейного уравнения Шредингера на полупрямой.

Ключевые слова: солитоны, интегрируемость, граничные условия.

1. ВВЕДЕНИЕ

Смешанные задачи (СЗ) для уравнений в частных производных (УрЧП) играют важную роль в физических приложениях и, можно даже сказать, в естественных науках вообще. Хорошо известно, что основная трудность при исследовании СЗ для линейных и нелинейных интегрируемых УрЧП состоит в наличии неизвестных граничных значений для соответствующих уравнений, что характерно для любого метода решения задачи.

В данной работе сначала формулируется СЗ для линейных и нелинейных интегрируемых УрЧП в спектральном пространстве, а затем дается метод решения, называемый подходом “устранения по ограничению” (УПО), основанный на стратегии устранения неизвестных граничных условий с помощью наложения подходящих ограничений на функциональное пространство и на комплексную область определения весьма сложных спектральных функций. Этот подход возник из метода функции Грина (ФГ), который по сути является аналогом этого метода в конфигурационном пространстве в случае линейной задачи, и из последних находок авторов для нелинейных задач.

*Dipartimento di Fisica, Università di Roma “La Sapienza”; Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, Sezione di Roma, Roma, Italy.

E-mail: antonio.degasperis@roma1.infn.it; paolo.santini@roma1.infn.it

[†]Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау, Москва, Россия. E-mail: manakov@itp.ac.ru

Работа имеет следующую структуру. В разделе 2 рассматривается СЗ для линейного УрЧП с постоянными коэффициентами. Вводя подходящее преобразование Фурье в этой задаче и устанавливая его свойства аналитичности, можно сначала выразить преобразование Фурье решения в терминах преобразований Фурье от известных и неизвестных начальных и граничных значений с помощью формулы Грина. Затем описывается подход УПО, в котором систематически используется стратегия устранения неизвестных граничных значений, что в итоге приводит к подходящему спектральному представлению решения, носитель которого может в конце концов даже стать дискретным, а не непрерывным, как в случае общего исходного интеграла Фурье. Этот метод оказывается довольно мощным, что показано на примере решения СЗ для уравнения Шредингера в прямоугольном ящике и квадрате.

В разделе 3 стратегия УПО применяется к солитонным уравнениям. После задания подходящего спектрального преобразования $S(k, t)$ для данной СЗ процедура УПО применяется для устранения неизвестных граничных значений из уравнений, определяющих $S(k, t)$, и для задания $S(k, t)$ с помощью нелинейного интегрального уравнения. Этот подход, представленный для модельного примера нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) на полупрямой, может быть в принципе обобщен на случай отрезка. Так как в методе УПО используются спектральные переменные, сопряженные пространственным переменным, то этот метод работает одинаково хорошо как при пространственно-временных преобразованиях, так и для только пространственных преобразований. В линейном случае оказывается, что проще всего работать с пространственно-временным преобразованием Фурье, в то время как в нелинейном случае предпочтительным оказывается пространственное преобразование, а именно широко используемое (спектральное) преобразование обратной задачи рассеяния. Наконец, будет показана эквивалентность СЗ для солитонных уравнений на полупрямой некоторым задачам со специальными начальными и граничными данными на всей прямой. Важным следствием этой эквивалентности является то, что из хорошо известного асимптотического поведения солитонных уравнений на всей прямой можно немедленно получить асимптотическое поведение СЗ на полупрямой с убывающими граничными условиями. Обзор литературы, посвященной исследованию данной проблемы, содержится в разделе 4.

Результаты данной статьи — это расширенный вариант материалов, представленных авторами на европейской конференции “NEEDS 2001” и на семинаре “Граничные задачи” — первом и последнем мероприятиях семестра “*Интегрируемые системы*”, который имел место в период с июля по декабрь 2001 г. в Институте Исаака Ньютона в г. Кембридже.

2. ПОДХОД УСТРАНЕНИЯ ПО ОГРАНИЧЕНИЮ. ЛИНЕЙНЫЙ СЛУЧАЙ

Известно, что преобразование Фурье хорошо приспособлено для решения СЗ для линейных УрЧП в пространствах $\mathbb{R}^{n+1}$ с убывающими граничными данными:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(\nabla, \frac{\partial}{\partial t}\right)u(\mathbf{x}, t) &= f(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \\ u(\mathbf{x}, 0) &= u_0(\mathbf{x}), \quad u(\mathbf{x}, t) \rightarrow 0, \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\nabla = (\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n)$, $\mathcal{L}$ – оператор в частных производных с постоянными коэффициентами, $u(\mathbf{x}, t)$ – неизвестное поле, $f(\mathbf{x}, t)$ – заданная сила и $u_0(\mathbf{x})$ – заданное начальное условие.

В данном разделе будет описан весьма эффективный подход (в пространстве Фурье) для решения более сложных СЗ, заданных на ограниченных или полуограниченных пространственных областях V ,

$$\mathcal{L}\left(\nabla, \frac{\partial}{\partial t}\right)u(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in V \subset \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \quad (2)$$

с граничными условиями типа Дирихле или Неймана, или со смешанными граничными условиями на ∂V .

2.1. Преобразование Фурье и его свойства. Естественное преобразование Фурье, связанное с пространственно-временной областью $\mathcal{D} = V \otimes (0, \infty)$ (обозначаемое в дальнейшем $\text{FT}_{\mathcal{D}}$), по определению имеет вид

$$\hat{F}(\mathbf{k}, q) = \int_{\mathcal{D}} d\mathbf{x} dt e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + qt)} F(\mathbf{x}, t) \quad (3)$$

для любой гладкой функции $F(\mathbf{x}, t)$, $(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{D}$, в предположении, что $F(\mathbf{x}, t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$ достаточно быстро; здесь $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{R}^n$, $q \in \mathbb{R}$ и $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = \sum_j k_j x_j$. Соответствующее обратное преобразование

$$F(\mathbf{x}, t) \chi_{\mathcal{D}}(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \frac{d\mathbf{k} dq}{(2\pi)^{n+1}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + qt)} \hat{F}(\mathbf{k}, q) \quad (4)$$

воспроизводит $F(\mathbf{x}, t)$ в области $\mathcal{D}$ и обращается в ноль вне этой области. Здесь $\chi_{\mathcal{D}}(\mathbf{x}, t)$ представляет собой характеристическую функцию области $\mathcal{D}$: $\chi_{\mathcal{D}}(\mathbf{x}, t) = 1$, $(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{D}$, $\chi_{\mathcal{D}}(\mathbf{x}, t) = 0$, $(\mathbf{x}, t) \notin \mathcal{D}$ (тем самым $\chi_{\mathcal{D}}(\mathbf{x}, t) = \chi_V(\mathbf{x})H(t)$, где $H(t)$ – стандартная функция Хэвисайда (функция ступеньки)).

Если указанная область пространства оказывается полным пространством, $V = \mathbb{R}^n$, то $\text{FT}_{\mathcal{D}}$ (3) определено в области $\mathcal{A} = \mathbb{R}^n \otimes \bar{\mathcal{I}}_q$, где $\bar{\mathcal{I}}_q$ – замыкание нижней полуплоскости $\mathcal{I}_q$ переменной q , аналитично при $q \in \mathcal{I}_q \quad \forall \mathbf{k} \in \mathbb{R}^n$ и имеет правильное асимптотическое поведение при больших $|q|$ в области аналитичности. Если пространственная область V компактна, то $\text{FT}_{\mathcal{D}}$ имеет сильные свойства аналитичности по всем переменным Фурье: это преобразование определено в области $\mathcal{A} = \mathcal{C}^n \otimes \bar{\mathcal{I}}_q$, аналитично при $q \in \mathcal{I}_q$, $\forall \mathbf{k} \in \mathcal{C}^n$, представляет собой целую функцию при каждом комплексном k_j , $j = 1, \dots, n$, $\forall q \in \bar{\mathcal{I}}_q$ и обладает правильным асимптотическим поведением при больших $(\mathbf{k}, q)$ в областях аналитичности. Если область пространства полуограниченна, то аналитичность по фурье-переменным k_j , $j = 1, \dots, n$, имеет место в открытых областях комплексной плоскости, зависящих от геометрических характеристик области V .

Для того чтобы выразить $\text{FT}_{\mathcal{D}}$ решения в терминах $\text{FT}_{\mathcal{D}}$ для вынужденных и начальных и граничных условий используются хорошо известная *формула Грина* (тождество Грина)

$$b\mathcal{L}a - a\tilde{\mathcal{L}}b = \text{div } J(\mathbf{x}, t) \quad (5)$$

и ее интегральное выражение – знаменитое *интегральное тождество Грина*:

$$\int_{\mathcal{D}} (b\mathcal{L}a - a\tilde{\mathcal{L}}b) d\mathbf{x} dt = \int_{\partial\mathcal{D}} J(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\nu} d\sigma, \quad (6)$$

получаемое с помощью интегрирования формулы (5) по области $\mathcal{D}$ с последующим использованием формулы дивергенции. В уравнении (5) $\tilde{\mathcal{L}}$ – это оператор, формально сопряженный оператору $\mathcal{L}$: $\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}(-\nabla, -\partial/\partial t)$, $J(\mathbf{x}, t)$ – $(n+1)$ -мерное векторное поле, div – $(n+1)$ -мерный оператор дивергенции, а $a(\mathbf{x}, t)$ и $b(\mathbf{x}, t)$ – произвольные функции. В уравнении (6) элемент $d\sigma$ – это элемент границы гиперповерхности и $\boldsymbol{\nu}$ – внешний единичный нормальный вектор этой гиперповерхности. Заметим, что если заданы оператор $\mathcal{L}$, его формально сопряженный $\tilde{\mathcal{L}}$ и две произвольные функции a и b , то всегда существует $(n+1)$ -мерное векторное поле $J(\mathbf{x}, t)$, удовлетворяющее формуле Грина (5), и оно может быть алгоритмически найдено. Это поле оказывается линейным по a , b и их частным производным вплоть до порядка $N-1$, если только оператор $\mathcal{L}$ имеет порядок N .

Ввиду произвольности функций a и b из формул (5) и (6) можно извлечь довольно много полезной информации о граничной задаче; при частном выборе

$$a = u(\mathbf{x}, t), \quad b = \frac{e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + qt)}}{\mathcal{L}(i\mathbf{k}, iq)}, \quad (7)$$

где $\mathcal{L}(i\mathbf{k}, iq)$ – собственное значение оператора $\mathcal{L}$, отвечающее собственной функции $e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + qt)}$, векторное поле J принимает следующий вид:

$$J = e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + qt)} J'(\mathbf{x}, t; \mathbf{k}, q) / \mathcal{L}(i\mathbf{k}, iq).$$

При этом из интегрального тождества Грина (6) следует, что $\text{FT}_{\mathcal{D}}$ решения может быть выражено в терминах $\text{FT}_{\mathcal{D}}$ (или, возможно, в терминах обобщенных преобразований Фурье) от силовых факторов и от всех начальных и граничных данных:

$$\hat{u}(\mathbf{k}, q) = \frac{\hat{f}(\mathbf{k}, q) - \int_{\partial\mathcal{D}} e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + qt)} J'(\mathbf{x}, t; \mathbf{k}, q) \cdot \boldsymbol{\nu} d\sigma}{\mathcal{L}(i\mathbf{k}, iq)} =: \frac{\hat{\mathcal{N}}(\mathbf{k}, q)}{\mathcal{L}(i\mathbf{k}, iq)}, \quad (\mathbf{k}, q) \in \mathcal{A}. \quad (8)$$

В общем случае выражение $\mathcal{L}(i\mathbf{k}, iq)$, стоящее в знаменателе этого уравнения, представляет собой целую и даже в большинстве случаев полиномиальную функцию от всех своих комплексных аргументов; нули этой функции могут лежать на вещественной прямой. Таким образом, до того как вычислять обратное преобразование Фурье, необходимо регуляризовать эту функцию:

$$\mathcal{L}(i\mathbf{k}, iq) \rightarrow \mathcal{L}_{\text{reg}}(i\mathbf{k}, iq), \quad (9)$$

т.е. надо сдвинуть сингулярности с вещественной оси и добиться того, чтобы они лежали вне области $\mathcal{A}$.

Обратное преобразование Фурье (4) задает соответствующее *представление Фурье* для решения:

$$U(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x}, t)\chi_{\mathcal{D}}(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \frac{d\mathbf{k} dq}{(2\pi)^{n+1}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + qt)} \frac{\hat{\mathcal{N}}(\mathbf{k}, q)}{\mathcal{L}_{\text{reg}}(i\mathbf{k}, iq)}, \quad (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1}. \quad (10)$$

Ясно, что этого еще недостаточно, так как в случае общего положения правая часть уравнения (8) все еще зависит как от известных, так и от неизвестных граничных данных.

2.2. Устранение по ограничению в пространстве Фурье. Традиционные способы решения СЗ для линейных УрЧП состоят в нахождении подходящих стратегий для *устранения неизвестных граничных условий* из представлений для решений. Эти методы основаны на знаменитом подходе ФГ, в котором:

1) сначала строится интегральное представление Грина

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathcal{D}} d\mathbf{x}' dt' \tilde{g}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') f(\mathbf{x}', t') - \int_{\partial\mathcal{D}} J(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') \cdot \boldsymbol{\nu}_{x'} d\sigma_{x'}, \quad (\mathbf{x}, t) \in \mathcal{D}, \quad (11)$$

для решения СЗ (2). Это представление является другим приложением формулы (6), отвечающим выбору: $a(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x}, t)$ и $b(\mathbf{x}, t) = \tilde{g}(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}, t)$, где $\tilde{g}$ — *любая* функция Грина оператора $\tilde{\mathcal{L}}_x$: $\tilde{\mathcal{L}}_x \tilde{g}(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t')$, $(\mathbf{x}, t), (\mathbf{x}', t') \in \mathcal{D}$;

2) затем используется произвол в выборе функции $\tilde{g}$ и строится именно та функция Грина, которая позволяет устранить вклады, зависящие от неизвестных граничных значений. Метод разложения по собственным функциям также основан на идее устранения, и этот метод оказывается эквивалентным подходу ФГ, в котором строится набор собственных функций оператора $\mathcal{L}$ с такими граничными условиями, которые позволяют опять-таки устранить неизвестные граничные значения. Оба эти подхода имеют функционально-аналитическую природу.

В данном разделе будет показано, как стратегия устранения может быть естественным образом введена, если использовать представление пространства Фурье, определенного в (3) (стратегия устранения в спектральном пространстве уже была успешно применена при исследовании солитонных уравнений на полупрямой (см. раздел 4)).

Уравнение (8), заданное на подходящей области $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}^{n+1}$, обычно проявляет несколько свойств симметрии, являющихся следствием структуры $\mathcal{L}$ и геометрии пространственной области V . Первая и наиболее важная часть метода состоит в том, чтобы систематически использовать эти свойства симметрий в пространстве Фурье для построения такого линейного оператора $\mathcal{E}$, который в правой части уравнения (8) уничтожает вклады, приходящие от неизвестных граничных значений, содержащихся в числителе $\hat{\mathcal{N}}(\mathbf{k}, q)$, и при этом оставляет знаменатель $\mathcal{L}(i\mathbf{k}, iq)$ нетронутым:

$$\mathcal{E} \hat{u}(\mathbf{k}, q) = \mathcal{E} \left(\frac{\hat{\mathcal{N}}}{\mathcal{L}} \right) (\mathbf{k}, q) = \{\text{только известные величины}\}, \quad (\mathbf{k}, q) \in \mathcal{A}' \subset \mathcal{A}. \quad (12)$$

Процедура устранения, задаваемая линейным оператором $\mathcal{E}$, позволяет построить $\mathcal{E}\hat{u}$ в подпространстве $\mathcal{A}'$ исходного пространства, на котором был определен оператор $\hat{u}$. Таким образом, необходимо выяснить, достаточна ли полученная информация для того, чтобы восстановить решение u , т.е. задает ли $\mathcal{E}\hat{u}$ обратимое спектральное преобразование в области $\mathcal{D}$.

Используя уравнение (3), можно определить это новое спектральное преобразование следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}\hat{u}(\mathbf{k}, q) &= \int_{\mathcal{D}} d\mathbf{x} dt \tilde{\varphi}_{\mathbf{k}, q}(\mathbf{x}, t) u(\mathbf{x}, t), \quad (\mathbf{k}, q) \in \mathcal{A}', \\ \tilde{\varphi}_{\mathbf{k}, q}(\mathbf{x}, t) &:= \mathcal{E}(e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + qt)}).\end{aligned}\quad (13)$$

Это преобразование оказывается обратимым, если существует собственная функция $\varphi_{\mathbf{k}, q}(\mathbf{x}, t)$ оператора $\mathcal{L}$, обладающая свойством полноты:

$$\sum_{(\mathbf{k}, q) \in \mathcal{A}'} \varphi_{\mathbf{k}, q}(\mathbf{x}, t) \tilde{\varphi}_{\mathbf{k}, q}(\mathbf{x}', t') = \delta(t - t') \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (\mathbf{x}, t), (\mathbf{x}', t') \in \mathcal{D}. \quad (14)$$

В этом случае обратное преобразование позволяет построить функцию $\tilde{U}(\mathbf{x}, t)$, определенную во всем пространстве-времени, которая совпадает с решением в области $\mathcal{D}$:

$$\begin{aligned}\tilde{U}(\mathbf{x}, t) &= \sum_{\mathbf{k}, q} \varphi_{\mathbf{k}, q}(\mathbf{x}, t) \mathcal{E}\left(\frac{\hat{N}}{\mathcal{L}}\right)(\mathbf{k}, q), \quad (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n \otimes (0, \infty), \\ \tilde{U}(\mathbf{x}, t) &= u(\mathbf{x}, t), \quad (\mathbf{x}, t) \in \mathcal{D}.\end{aligned}\quad (15)$$

В уравнениях (14) и (15) символ $\sum_{\mathbf{k}, q}$ обозначает суммирование и/или интегрирование в зависимости от природы области $\mathcal{A}'$ определения нового спектрального преобразования. Подводя итог, приходим к следующим выводам.

Хотя прямое преобразование, с которого начиналось рассмотрение, представляет собой преобразование Фурье $\hat{u}$, задаваемое формулой (3), процедура УПО, примененная к этому преобразованию, приводит к новому прямому преобразованию Фурье $\mathcal{E}\hat{u}$ (13), обратное к которому, как правило, существенно отличается от преобразования (4). Отсюда следует, что воспроизведенная функция $\tilde{U}(\mathbf{x}, t)$ совпадает с решением $u(\mathbf{x}, t)$ в области $\mathcal{D}$, но не обращается в нуль вне области $\mathcal{D}$ и наследует свойства симметрии собственной функции $\varphi_{\mathbf{k}, q}(\mathbf{x}, t)$.

2.3. Поясняющий пример. В этом разделе подход УПО применяется к СЗ (2), отвечающей оператору

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= i \frac{\partial}{\partial t} + \Delta, \quad \Delta = \nabla \cdot \nabla = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}, \\ V &= \{\mathbf{x}: 0 \leq x_j \leq L_j, \quad j = 1, \dots, n\};\end{aligned}\quad (16)$$

т.е. СЗ решается для $(n + 1)$ -мерного уравнения Шредингера в области пространства, представляющей собой n -мерный прямоугольный ящик.

Тогда получим

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{L}} &= -i \frac{\partial}{\partial t} + \Delta, \quad J = (iab, b\nabla a - a\nabla b), \\ \mathcal{L}(i\mathbf{k}, iq) &= -(q + k^2) \Rightarrow \mathcal{L}_{\text{reg}}(i\mathbf{k}, iq) = -(q + k^2 - i0),\end{aligned}\quad (17)$$

где $k^2 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}$. Уравнения (8) и (17) задают следующее выражение для преобразования Фурье решения в терминах преобразований Фурье силовых факторов и всех начальных и граничных данных:

$$\begin{aligned}\hat{u}(\mathbf{k}, q) &= -\frac{\hat{\mathcal{N}}(\mathbf{k}, q)}{q + k^2 - i0}, \quad (\mathbf{k}, q) \in \mathcal{A}, \\ \hat{\mathcal{N}}(\mathbf{k}, q) &:= \hat{f}(\mathbf{k}, q) + i\hat{u}_0(\mathbf{k}) + \sum_{j=1}^n \{ [\hat{w}_{0j}(\mathbf{k}_j, q) + ik_j \hat{v}_{0j}(\mathbf{k}_j, q)] - \\ &\quad - e^{-ik_j L_j} [\hat{w}_{Lj}(\mathbf{k}_j, q) + ik_j \hat{v}_{Lj}(\mathbf{k}_j, q)] \}\end{aligned}\quad (18)$$

(в своей области определения $\mathcal{A} = \mathcal{C}^n \otimes \tilde{\mathcal{I}}_q$), где $\hat{f}$, $\hat{u}_0$, $\hat{v}_{0j}$, $\hat{v}_{Lj}$, $\hat{w}_{0j}$ и $\hat{w}_{Lj}$ суть преобразования Фурье силовых и начальных и граничных данных:

$$\begin{aligned}u_0(\mathbf{x}) &= u(\mathbf{x}, t)|_{t=0}, \quad v_{0j}(\mathbf{x}_j, t) = u(\mathbf{x}, t)|_{x_j=0}, \quad v_{Lj}(\mathbf{x}_j, t) = u(\mathbf{x}, t)|_{x_j=L_j}, \\ w_{0j}(\mathbf{x}_j, t) &= \frac{\partial u}{\partial x_j}(\mathbf{x}, t)|_{x_j=0}, \quad w_{Lj}(\mathbf{x}_j, t) = \frac{\partial u}{\partial x_j}(\mathbf{x}, t)|_{x_j=L_j};\end{aligned}\quad (19)$$

т.е., например,

$$\hat{u}_0(\mathbf{k}) = \int_V d\mathbf{x} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} u_0(\mathbf{x}), \quad \hat{v}_{0j}(\mathbf{k}_j, q) = \int_0^\infty dt \int_{V_j} d\mathbf{x}_j e^{-i(\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{x}_j + qt)} v_{0j}(\mathbf{x}_j, t). \quad (20)$$

В уравнениях (18)–(20) и ниже полагается, что $\mathbf{x}_j = (x_1, \dots, \check{x}_j, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\mathbf{k}_j = (k_1, \dots, \check{k}_j, \dots, k_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$,

$$\int_{V_j} d\mathbf{x}_j = \int_0^{L_1} dx_1 \dots \left(\int_0^{L_j} dx_j \right)^\vee \dots \int_0^{L_n} dx_n,$$

где символ $^\vee$ означает, что отмеченная им величина должна быть опущена.

Конечно, в случае, когда все вышеприведенные граничные данные известны, решение u задается формулой (10):

$$\begin{aligned}U(\mathbf{x}, t) &= u(\mathbf{x}, t) \chi_V(\mathbf{x}) H(t) = - \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \frac{d\mathbf{k} dq}{(2\pi)^{n+1}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + qt)} \frac{\hat{\mathcal{N}}(\mathbf{k}, q)}{q + k^2 - i0} = \\ &= - \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \frac{dq d\mathbf{k}}{(2\pi)^{n+1}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + qt)} \frac{\hat{f}(\mathbf{k}, q)}{q + k^2 - i0} + H(t) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - k^2 t)} \hat{u}_0(\mathbf{k}) + \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{d\mathbf{k}_j}{(2\pi)^{n-1}} e^{i\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{x}_j} \times \\ &\quad \times \int_\gamma \frac{dk_j}{2\pi i} \{ e^{i(k_j |x_j| - k^2 t)} [\hat{w}_{0j}(\mathbf{k}_j, -k^2) + i \operatorname{sign}(x_j) k_j \hat{v}_{0j}(\mathbf{k}_j, -k^2)] - \\ &\quad - e^{i(k_j |x_j - L_j| - k^2 t)} [\hat{w}_{Lj}(\mathbf{k}_j, -k^2) + i \operatorname{sign}(x_j - L_j) k_j \hat{v}_{Lj}(\mathbf{k}_j, -k^2)] \},\end{aligned}\quad (21)$$

где $d\mathbf{k}_j = dk_1 \dots \check{dk}_j \dots dk_n$ и $\gamma = (i\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Ввиду специальных свойств четности преобразований Фурье в формулах (18), в дальнейшем будут использоваться так называемые операторы четности:

$$\Delta_{\pm} = \prod_{l=1}^n (1 \pm \hat{\sigma}_l), \quad \Delta_{\pm}^{(j)} = \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^n (1 \pm \hat{\sigma}_l), \quad (22)$$

где $\hat{\sigma}_j$ – операторы инволюций $\hat{\sigma}_j: k_j \rightarrow -k_j$.

Допустим, что решается задача Дирихле. Тогда применение оператора четности Δ_- к выражениям (18) позволяет убрать все величины $\hat{w}_0$:

$$\begin{aligned} \Delta_- \hat{u}(\mathbf{k}, q) = & - \left(\Delta_- [\hat{f}(\mathbf{k}, q) + i\hat{u}_0(\mathbf{k})] + 2i \sum_{j=1}^n k_j \Delta_-^{(j)} \hat{v}_{0j}(\mathbf{k}_j, q) + \right. \\ & \left. + 2i \sum_{j=1}^n [\sin(k_j L_j) \Delta_-^{(j)} \hat{w}_{Lj}(\mathbf{k}_j, q) - k_j \cos(k_j L_j) \Delta_-^{(j)} \hat{v}_{Lj}(\mathbf{k}_j, q)] \right) \times \\ & \times (q + k^2 - i0)^{-1}, \quad (\mathbf{k}, q) \in \mathcal{A}. \end{aligned} \quad (23)$$

Теперь, для того чтобы убрать также и все величины $\hat{w}_L$, надо ограничить возможные значения k_j на дискретный набор $k_j = h_j := \pi m_j / L_j$, $m_j \in \mathbb{Z}$, так что исходная область $\mathcal{A}$ оказывается в конце концов ограниченной на следующую область:

$$(\mathbf{k}, q) \in \mathcal{A}' = \left\{ (\mathbf{h}, q); q \in \bar{\mathcal{I}}_q, \mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n), h_j = \frac{\pi m_j}{L_j}, m_j \in \mathbb{Z}, j = 1, \dots, n \right\}. \quad (24)$$

Таким образом, УПО с помощью оператора $\mathcal{E}$ в этом примере дает

$$\mathcal{E} \cdot = \int_{\mathbb{R}^n} d\mathbf{k} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{h}) \Delta_- \cdot, \quad (25)$$

и его применение к функции $\hat{u}$ приводит к нужному результату:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \hat{u}(\mathbf{k}, q) = (\Delta_- \hat{u})(\mathbf{h}, q) = & - \left\{ \Delta_- [\hat{f}(\mathbf{h}, q) + i\hat{u}_0(\mathbf{h})] + \right. \\ & \left. + 2i \sum_{j=1}^n h_j \Delta_-^{(j)} [\hat{v}_{0j}(\mathbf{h}_j, q) - (-1)^{m_j} \hat{v}_{Lj}(\mathbf{h}_j, q)] \right\} (q + h^2 - i0)^{-1}, \end{aligned} \quad (26)$$

где $\mathbf{h}_j = (h_1, \dots, \check{h}_j, \dots, h_n)$ и $h^2 = \mathbf{h} \cdot \mathbf{h}$. Преобразование $\mathcal{E} \hat{u}(\mathbf{k}, q)$, задаваемое процедурой УПО, представляет собой хорошо известное многомерное *дискретное* синусоидальное преобразование:

$$\begin{aligned} \Delta_- \hat{u}(\mathbf{h}, q) &= \int_{\mathcal{D}} dt d\mathbf{x} \tilde{\varphi}_{\mathbf{h}, q}(\mathbf{x}, t) u(\mathbf{x}, t), \\ \tilde{\varphi}_{\mathbf{h}, q}(\mathbf{x}, t) &:= \Delta_- (e^{-i(\mathbf{h} \cdot \mathbf{x} + qt)}) = (-2i)^n e^{-iqt} \prod_{l=1}^n \sin(h_l x_l). \end{aligned} \quad (27)$$

Чтобы построить обратное к этому преобразованию, используются формулы

$$\varphi_{\mathbf{h},q}(\mathbf{x}, t) = \frac{i^n}{L_1 \dots L_n} \frac{e^{iqt}}{2\pi} \prod_{l=1}^n \sin(h_l x_l), \quad \sum_{\mathbf{k}, q} = \int_{\mathbb{R}} dq \sum_{m_1=1}^{\infty} \dots \sum_{m_n=1}^{\infty}, \quad (28)$$

так что разложение (15) задает функцию $\tilde{U}(\mathbf{x}, t)$, определенную во всем пространстве-времени и совпадающую с решением $u(\mathbf{x}, t)$ СЗ при ограничении $(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{D}$:

$$\begin{aligned} \tilde{U}(\mathbf{x}, t) &= \frac{i^n}{L_1 \dots L_n} \sum_{m_1=1}^{\infty} \dots \sum_{m_n=1}^{\infty} \prod_{l=1}^n \sin(h_l x_l) \int_{\mathbb{R}} \frac{dq}{2\pi} e^{iqt} \times \\ &\quad \times \Delta_- \left(\frac{\hat{\mathcal{N}}(\mathbf{h}, q)}{\mathcal{L}(i\mathbf{h}, iq)} \right), \quad (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1}, \\ \tilde{U}(\mathbf{x}, t) &= u(\mathbf{x}, t), \quad (\mathbf{x}, t) \in \mathcal{D}. \end{aligned} \quad (29)$$

Из уравнения (29) следует, что благодаря свойствам симметрии функции $\varphi_{\mathbf{h},q}(\mathbf{x}, t)$ функция $\tilde{U}$, в свою очередь, будет нечетным $(2L)$ -периодическим расширением решения вне области $\mathcal{D}$ и будет задавать дискретное тригонометрическое (с помощью синусов) фурье-преобразование решения:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) &= -\frac{i^n}{L_1 \dots L_n} \left\{ \sum_{\mathbf{h}} \prod_{l=1}^n \sin(h_l x_l) \left[\int_{\mathbb{R}} \frac{dq}{2\pi} e^{iqt} \frac{\Delta_- \hat{f}(\mathbf{h}, q)}{q + h^2 - i0} - e^{-ih^2 t} \Delta_- \hat{u}_0(\mathbf{h}) \right] + \right. \\ &\quad + \sum_{j=1}^n L_j \sum_{\mathbf{h}_j} \prod_{l \neq j} \sin(h_l x_l) \int_{\gamma} \frac{dk_j}{\pi} \frac{ik_j e^{-i(k_j^2 + \mathbf{h}_j \cdot \mathbf{h}_j)t}}{\sin(k_j L_j)} \Delta_-^{(j)} \times \\ &\quad \times [\sin k_j (L_j - x_j) \hat{v}_{0j}(\mathbf{h}_j, -k_j^2 - \mathbf{h}_j \cdot \mathbf{h}_j) + \\ &\quad \left. + \sin(k_j x_j) \hat{v}_{Lj}(\mathbf{h}_j, -k_j^2 - \mathbf{h}_j \cdot \mathbf{h}_j) \right] \Big\}, \quad (\mathbf{x}, t) \in \mathcal{D}, \end{aligned} \quad (30)$$

где

$$\sum_{\mathbf{h}} \equiv \sum_{m_1=1}^{\infty} \dots \sum_{m_n=1}^{\infty}, \quad \sum_{\mathbf{h}_j} \equiv \sum_{m_1=1}^{\infty} \dots \left(\sum_{m_j=1}^{\infty} \right)^{\vee} \dots \sum_{m_n=1}^{\infty} \quad (31)$$

и интеграл $\int_{\gamma} dk_j$ регуляризован условием, что сингулярности $\pi m_j / L_j$, $m_j \in \mathbb{Z}^+$, сдвинуты во внешность первого квадранта.

Задача Неймана может быть решена аналогичным образом с использованием дискретного преобразования косинусов:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \cdot &= \int_{\mathbb{R}^n} d\mathbf{k} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{h}) \Delta_+ \cdot, \\ \tilde{\varphi}_{\mathbf{h},q}(\mathbf{x}, t) &:= \Delta_+(e^{-i(\mathbf{h} \cdot \mathbf{x} + qt)}) = 2^n e^{-iqt} \prod_{l=1}^n \cos(h_l x_l), \\ \varphi_{\mathbf{h},q}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{2^n L_1 \dots L_n} \frac{e^{iqt}}{2\pi} \prod_{l=1}^n \cos(h_l x_l), \quad \sum_{\mathbf{k}, q} = \int_{\mathbb{R}} dq \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{m_n=-\infty}^{\infty}, \end{aligned} \quad (32)$$

и с помощью дискретного представления решения через косинусы:

$$\begin{aligned}
 u(\mathbf{x}, t) = & -\frac{1}{2^n L_1 \dots L_n} \left\{ \sum_{\mathbf{h}} \prod_{l=1}^n \cos(h_l x_l) \left[\int_{\mathbb{R}} \frac{dq}{2\pi} e^{iqt} \frac{\Delta_+ \hat{f}(\mathbf{h}, q)}{q + h^2 - i0} - e^{-ih^2 t} \Delta_+ \hat{u}_0(\mathbf{h}) \right] - \right. \\
 & - 2 \sum_{j=1}^n L_j \sum_{\mathbf{h}_j} \prod_{l \neq j} \cos(h_l x_l) \int_{\gamma} \frac{dk_j}{\pi} \frac{e^{-i(k_j^2 + \mathbf{h}_j \cdot \mathbf{h}_j)t}}{\sin(k_j L_j)} \Delta_+^{(j)} \times \\
 & \times [\cos k_j (L_j - x_j) \hat{w}_{0j}(\mathbf{h}_j, -k_j^2 - \mathbf{h}_j \cdot \mathbf{h}_j) - \\
 & \left. - \cos(k_j x_j) \hat{w}_{Lj}(\mathbf{h}_j, -k_j^2 - \mathbf{h}_j \cdot \mathbf{h}_j) \right] \Big\}, \quad (\mathbf{x}, t) \in \mathcal{D}, \quad (33)
 \end{aligned}$$

где

$$\sum_{\mathbf{h}} \equiv \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{m_n=-\infty}^{\infty}, \quad \sum_{\mathbf{h}_j} \equiv \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \dots \left(\sum_{m_j=-\infty}^{\infty} \right)^{\vee} \dots \sum_{m_n=-\infty}^{\infty}, \quad (34)$$

а интеграл $\int_{\gamma} dk_j$ регуляризован так же, как и в формуле (30).

Используя теорему о свертке, можно сразу получить из уравнений (30) и (33) для решения интегральное представление Грина (11), которое отвечает соответственно следующим запаздывающим функциям Грина задач Дирихле и Неймана:

$$\begin{aligned}
 G_{\text{RD}}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') &= \frac{2^n i}{L_1 \dots L_n} H(t - t') \times \\
 &\times \sum_{m_1=1}^{\infty} \dots \sum_{m_n=1}^{\infty} e^{-ih^2(t-t')} \prod_{l=1}^n \sin(h_l x_l) \sin(h_l x'_l), \\
 G_{\text{RN}}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') &= \frac{-i}{L_1 \dots L_n} H(t - t') \times \\
 &\times \sum_{m_1 \in \mathbb{Z}} \dots \sum_{m_n \in \mathbb{Z}} e^{-ih^2(t-t')} \prod_{l=1}^n \cos(h_l x_l) \cos(h_l x'_l). \quad (35)
 \end{aligned}$$

В случае полуограниченных областей подходящее спектральное преобразование, получаемое в подходе УПО, имеет, вообще говоря, непрерывный носитель. Например, для задачи Дирихле уравнения Шредингера в n -квадранте

$$V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n\} \quad (36)$$

получим, что оператор устранения $\mathcal{E} = \Delta_-$, который сужает область определения до $\mathcal{A}' = \mathbb{R}^n \otimes \tilde{\mathcal{I}}_q$, приводит к непрерывному тригонометрическому (с помощью синусов) преобразованию Фурье:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\varphi}_{\mathbf{k}, q}(\mathbf{x}, t) &= (-2i)^n e^{-iqt} \prod_{l=1}^n \sin(k_l x_l), \\
 \varphi_{\mathbf{k}, q}(\mathbf{x}, t) &= \frac{e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + qt)}}{(2\pi)^{n+1}}, \quad \sum_{\mathbf{k}, q} = \int_{\mathbb{R}} dq \int_{\mathbb{R}^n} d\mathbf{k}, \quad (37)
 \end{aligned}$$

и к соответствующему непрерывному многомерному синус-фурье-преобразованию решения:

$$u(\mathbf{x}, t) = - \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \frac{dq d\mathbf{k}}{(2\pi)^{n+1}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + qt)} \frac{\Delta_- \hat{f}(\mathbf{k}, q)}{q + k^2 - i0} + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - k^2 t)} \Delta_- \hat{u}_0(\mathbf{k}) + \\ + \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{d\mathbf{k}_j}{(2\pi)^{n-1}} \int_{\gamma} \frac{dk_j}{\pi} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - k^2 t)} k_j \Delta_-^{(j)} \hat{v}_{0j}(\mathbf{k}_j, -k^2), \quad (\mathbf{x}, t) \in \mathcal{D}. \quad (38)$$

Из приведенных модельных примеров следует, что метод УПО оказывается весьма эффективным в пространстве Фурье и, возможно, более простым по сравнению с подходом функции Грина, который представляет собой его аналог в конфигурационном пространстве. Сравнение этих двух методов устранения в примерах, в которых подход ФГ неприменим, будет проведено в отдельной публикации.

3. ПОДХОД УСТРАНЕНИЯ ПО ОГРАНИЧЕНИЮ. НЕЛИНЕЙНЫЙ СЛУЧАЙ

В этом разделе рассмотрим СЗ, связанную с нелинейными эволюционными УрЧП, которые интегрируются с помощью (спектрального) метода обратной задачи рассеяния. Ограничимся рассмотрением наглядного примера применения данного метода решения к НУШ

$$iq_t + q_{xx} + c|q|^2 q = 0, \quad q = q(x, t), \quad (39)$$

где c – произвольный вещественный параметр. Однако этот метод также хорошо применим и к другим $(1+1)$ -мерным солитонным уравнениям (например, к уравнению Кортевега–де Фриза (КдФ)). Более того, рассмотрение далее будет ограничено на те решения уравнения (39), которые лежат в первом квадранте плоскости (x, t) , а именно на решения на полупрямой $0 \leq x \leq \infty$ при $t \geq 0$. Решение однозначно задается совокупностью начальных данных $q(x, 0) = q_0(x)$ и граничных данных

$$f(t) = a_1 v(t) + a_2 w(t), \quad t \geq 0, \quad (40)$$

где введены обозначения

$$v(t) = q(0, t), \quad w(t) = q_x(0, t). \quad (41)$$

Здесь a_1 и a_2 – заданные вещественные константы, и при $a_2 = 0$ или $a_1 = 0$ мы получаем соответственно граничную задачу Дирихле или Неймана. Таким образом, задача состоит в построении решения $q(x, t)$ уравнения (39), когда начальные значения $q_0(x)$ и граничные условия $f(t)$ являются заданными функциями в соответствующем функциональном пространстве (можно предположить, что они представляют собой комплекснозначные функции, быстро убывающие при $x \rightarrow \infty$ и $t \rightarrow \infty$).

Главное свойство НУШ (39) – это то, что это уравнение есть условие интегрируемости для следующей пары (2×2) -матричных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ):

$$\Psi_x = (ik\sigma_3 + Q)\Psi, \quad \Psi_t = 2ik^2[\sigma_3, \Psi] + M\Psi, \quad (42)$$

где $\sigma_3 = \text{diag}(1, -1)$ и

$$Q(x, t) = \begin{pmatrix} 0 & -c\bar{q}(x, t) \\ q(x, t) & 0 \end{pmatrix}, \quad M(x, t, k) = 2kQ - i\sigma_3 Q_x + iQ^2 \sigma_3. \quad (43)$$

Решение $\Psi(x, t, k)$ этих уравнений задается асимптотическим условием

$$\Psi(x, t, k)e^{-ikx\sigma_3} \rightarrow I, \quad x \rightarrow \infty, \quad (44)$$

которое однозначно определяет матрицу рассеяния $S(k, t)$ стандартным образом, а именно как граничное значение

$$S(k, t) = \Psi(0, t, k). \quad (45)$$

Нам понадобятся следующие хорошо известные утверждения, которые оказываются весьма полезными с точки зрения излагаемого ниже метода. Матричное решение Ψ , а потому (см. (45)) и матрица рассеяния S имеют единичный детерминант

$$\det \Psi(x, t, k) = \det S(k, t) = 1. \quad (46)$$

Более того, свойство

$$Q^\dagger = -CQC^{-1}, \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}, \quad (47)$$

матрицы Q (см. (43)) приводит к соответствующим свойствам

$$\Psi^\dagger(x, t, k) = C\Psi^{-1}(x, t, \bar{k})C^{-1}, \quad S^\dagger(k, t) = CS^{-1}(\bar{k}, t)C^{-1} \quad (48)$$

для решений Йоста Ψ и матрицы рассеяния S (индекс $\dagger$ обозначает эрмитово сопряжение). Следствием этого оказывается то, что матрицу рассеяния S удобно параметризовать с помощью двух функций $\alpha(k, t)$ и $\beta(k, t)$ в соответствии с определением

$$S(k) = \begin{pmatrix} \alpha(k) & -c\bar{\beta}(\bar{k}) \\ \beta(k) & \bar{\alpha}(\bar{k}) \end{pmatrix}. \quad (49)$$

Что касается k -зависимости (здесь комплексная спектральная переменная k играет ту же роль, что и переменная Фурье в случае линейной задачи), то в этом случае функции $\alpha(k, t)$ и $\beta(k, t)$ оказываются аналитическими функциями в верхней полуплоскости ($\text{Im } k > 0$), имеющими следующее асимптотическое поведение:

$$\alpha(k, t) = 1 + O(k^{-1}), \quad \beta(k, t) = O(k^{-1}) \quad (50)$$

при больших $|k|$. Наконец, напомним, что из таких аналитических свойств функций $\alpha(k, t)$ и $\beta(k, t)$ вытекает способ решения обратной задачи, т.е. $S(k, t) \rightarrow Q(x, t)$ при любом фиксированном $t \geq 0$; при этом основные уравнения обратной задачи, которые здесь не приводятся, имеют либо вид интегральных уравнений типа Коши по переменной k , либо, эквивалентно, они записываются как интегральное уравнение типа Марченко по переменной x .

Обратимся теперь к эволюции по времени. Здесь вершиной спектрального метода является эволюционное уравнение для матрицы рассеяния (см. (42) и (45))

$$S_t = 2ik^2[\sigma_3, S] + Z(k, t)S, \quad (51)$$

которое следует из того, что зависимости матрицы $Z(k, t)$ от двух граничных функций $v(t)$ и $w(t)$ разделяются (см. (41)) в соответствии со следующими выражениями:

$$\begin{aligned} Z(k, t) &= 2kV(t) - i\sigma_3 W(t) + iV^2(t)\sigma_3, \\ V(t) &= Q(0, t), \quad W(t) = Q_x(0, t). \end{aligned} \quad (52)$$

Отсюда вытекает, что эволюционное уравнение (51) не может быть непосредственно проинтегрировано, что дало бы матрицу рассеяния, необходимую для воспроизведения $Q(x, t)$ через решения обратной задачи. Поскольку в нашей постановке заданы только граничные данные (40), в полной аналогии с методом устранения в линейном случае необходимо ввести новую матрицу

$$\tilde{S}(k, t) = A^{-1}(k)S^{-1}(-k, t)A(k)S(k, t), \quad A(k) := a_1 I + 2ika_2 \sigma_3, \quad (53)$$

которая обладает двумя важными свойствами. Во-первых, ее детерминант единичен (см. (46)) и ее асимптотическое значение при $|k| \rightarrow \infty$ оказывается единичной матрицей:

$$\det \tilde{S}(k, t) = 1, \quad \tilde{S}(k, t) = I + O(k^{-1}). \quad (54)$$

Во-вторых, эта матрица удовлетворяет эволюционному уравнению, которое содержит только лишь данное граничное условие (40), а именно,

$$\begin{aligned} \tilde{S}_t &= 2ik^2[\sigma_3, \tilde{S}] + 4kA^{-1}(k)S^{-1}(-k, t)F(t)S(k, t), \\ F(t) &= a_1 V(t) + a_2 W(t) = \begin{pmatrix} 0 & -c\bar{f}(t) \\ f(t) & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (55)$$

Хотя этот шаг весьма важен, его недостаточно для построения решения данной задачи, так как в эволюционном уравнении (первое уравнение в (55)) все еще присутствует неизвестная матрица рассеяния $S(k, t)$. Поэтому надо найти способ связать между собой матрицы $S(k, t)$ и $\tilde{S}(k, t)$. Соотношение $S(k, t) \rightarrow \tilde{S}(k, t)$ тривиально, так как оно задается собственно определением (53). Из этого соотношения следует начальное условие $\tilde{S}(k, 0)$ при интегрировании эволюционного уравнения (55), т.е. $Q(x, 0) \rightarrow \Psi(x, 0, k) \rightarrow S(k, 0) = \Psi(0, 0, k) \rightarrow \tilde{S}(k, 0)$. Что касается обратного соотношения $\tilde{S}(k, t) \rightarrow S(k, t)$, то вместо него можно задать задачу Римана–Гильберта, которая в конце концов приводит к интегральному уравнению типа Коши. Перепишав уравнение (53) в виде $A(k) \times S(k, t) = S(-k, t)A(k)\tilde{S}(k, t)$ и заметив, что первый столбец матрицы $S(k, t)$ (49) аналитичен в верхней полуплоскости и имеет асимптотическое поведение (50), можно найти два связанных интегральных уравнения для величин $\alpha(k, t)$ и $\beta(k, t)$ в терминах матрицы $\tilde{S}(k, t)$, если использовать стандартную технику задачи Римана–Гильберта. Если

предположить для простоты, что в верхней полуплоскости не содержится полюсов, и подставить вместо $\tilde{S}(k, t)$ выражение для этой величины, полученное при формальном интегрировании эволюционного уравнения (55), окончательно получим два связанных нелинейных интегральных уравнения

$$\begin{aligned}\alpha(k, t) &= 1 + \frac{c}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'}{k' - (k + i0)} e^{-4ik'^2 t} h(k', t) \bar{\beta}(k', t), \\ \beta(k, t) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'}{k' - (k + i0)} e^{-4ik'^2 t} h(k', t) \bar{\alpha}(k', t),\end{aligned}\quad (56)$$

нелинейность которых появляется за счет того, что функция $h(k, t)$ сама зависит от неизвестных функций $\alpha(k, t)$ и $\beta(k, t)$ через интегральное (относительно t) соотношение:

$$\begin{aligned}h(k, t) &= \left\{ a(k) \alpha_0(k) \beta_0(-k) - a(-k) \alpha_0(-k) \beta_0(k) - \right. \\ &\quad \left. - 4k \int_0^t dt' e^{4ik^2 t'} [f(t') \alpha(k, t') \alpha(-k, t') + c \bar{f}(t') \beta(k, t') \beta(-k, t')] \right\} \times \\ &\quad \times \left\{ a(-k) \alpha_0(-k) \bar{\alpha}_0(k) + ca(k) \beta_0(-k) \bar{\beta}_0(k) - \right. \\ &\quad \left. - 4kc \int_0^t dt' [f(t') \alpha(-k, t') \bar{\beta}(k, t') - \bar{f}(t') \bar{\alpha}(k, t') \beta(-k, t')] \right\}^{-1},\end{aligned}\quad (57)$$

где $a(k) = a_1 + 2ika_2$ и α_0 и β_0 соответственно представляют собой известные начальные значения $\alpha(k, 0)$ и $\beta(k, 0)$.

Обсуждение этих весьма сложных уравнений и их применений в различных областях лежит за пределами данной статьи и будет опубликовано отдельно. Здесь же только заметим, что эта формулировка естественным образом выделяет так называемые линейнеаризуемые СЗ, а именно те, для которых граничное значение $f(t)$ исчезает (см. (40)), $f(t) = 0$. Действительно, в этом случае функция ядра $h(k, t)$ (57) не зависит от неизвестных $\alpha(k, t)$ и $\beta(k, t)$ и уравнения (56) становятся линейными. Заметим, что, полагая $c = 0$, можно устранить нелинейность во всех вышеприведенных формулах, так что уравнение (39) становится линейным уравнением Шредингера, и тогда из уравнений (56), (57) следует, что $\alpha(k, t) = 1$, в то время как $\beta(k, t)$ совпадает со стандартным явным выражением для преобразования Фурье решения $q(x, t)$.

Наконец, мы считаем полезным представить здесь подход к решению начальной задачи для НУШ (39), который отличается от описанного выше и все-таки оказывается эквивалентным ему, поскольку в итоге приводит к тем же уравнениям (56) и (57). Основное свойство этого подхода состоит в том, что в нем СЗ формулируется на всей прямой, т.е. для $x \in (-\infty, \infty)$, и что матрица $\tilde{S}(k, t)$, определенная выражениями (53), допускает теперь спектральное описание в рамках стандартных прямой и обратной задач, связанных с уравнением Лакса – первым ОДУ в системе (42). Расплачиваться за введение этой, более знакомой формулировки приходится тем, что нелинейное УрЧП,

которое теперь надо решить, — это НУШ с неоднородным источником вместо стандартного НУШ (39). Ниже вкратце описан этот подход с двумя ограничениями, обусловленными исключительно соображениями краткости: рассматриваются только граничные задачи Дирихле и Неймана; предполагается, что спектральные данные в любой момент времени $t \geq 0$ не содержат компоненты дискретного спектра.

Исходное наблюдение состоит в том, что если $q(x, t)$ — решение НУШ (39) при $x \in (0, \infty)$ и $t \geq 0$, то функция

$$\tilde{q}(x, t) = q(x, t)H(x) - \eta q(-x, t)H(-x), \quad \eta = \pm 1, \quad (58)$$

определенная при каждом вещественном значении переменной x , удовлетворяет УрЧП

$$i\tilde{q}_t + \tilde{q}_{xx} + 2c|\tilde{q}|^2\tilde{q} = (1 + \eta)v(t)\delta'(x) + (1 - \eta)w(t)\delta(x), \quad (59)$$

где $\delta(x)$ — обобщенная функция типа дельта-функции Дирака, $\delta'(x)$ — ее производная, а v и w определены условиями (41). Очевидно, что значения $\eta = 1$ и $\eta = -1$ отвечают соответствующему выбору граничных условий Дирихле или Неймана для СЗ.

Как следует из спектрального метода, основанного на уравнениях Лакса, удобно переписать формулы (58) и (59) в матричном виде, если ввести недиагональную матрицу 2×2 (см. (43))

$$\tilde{Q}(x, t) = Q(x, t)H(x) - \eta Q(-x, t)H(-x), \quad \eta = \pm 1, \quad (60)$$

и УрЧП

$$i\tilde{Q}_t - \sigma_3(\tilde{Q}_{xx} - 2\tilde{Q}^3) = \Sigma(x, t), \quad (61)$$

которое, разумеется, эквивалентно уравнению (59), если только член с источником имеет вид (см. второе уравнение в системе (52))

$$\Sigma(x, t) = -\sigma_3[(1 + \eta)V(t)\delta'(x) + (1 - \eta)W(t)\delta(x)]. \quad (62)$$

Спектральный подход к уравнению (61) основан на спектральном уравнении

$$\tilde{\Psi}_x = (ik\sigma_3 + \tilde{Q}(x, t))\tilde{\Psi}, \quad \tilde{\Psi} = \tilde{\Psi}(x, t, k), \quad (63)$$

что вполне стандартно. Решение Йоста $\tilde{\Psi}$ задается асимптотическим условием (44), $\tilde{\Psi}e^{-ikx\sigma_3} \rightarrow I$, $x \rightarrow \infty$, с помощью которого можно явно выразить это решение через решение $\Psi(x, t, k)$, определенное выше на полупрямой,

$$\tilde{\Psi}(x, t, k) = \Psi(x, t, k)H(x) + E\Psi(-x, t, -k)E\tilde{S}(k, t)H(-x), \quad (64)$$

где $E = \text{diag}(1, \eta)$ и

$$\tilde{S}(k, t) = ES^{-1}(-k, t)ES(k, t) \quad (65)$$

— это в точности та матрица рассеяния, которая определяется стандартным образом, а именно,

$$\tilde{\Psi}(x, t, k) \rightarrow e^{ikx\sigma_3}\tilde{S}(k, t), \quad x \rightarrow -\infty. \quad (66)$$

Отметим, что эта матрица рассеяния $\tilde{S}(k, t)$ (65) совпадает с матрицей (53) при $a_2 = 0$ в случае задачи Дирихле ($\eta = 1$) и при $a_1 = 0$ в случае задачи Неймана ($\eta = -1$).

Следуя стандартной процедуре, теперь надо ввести другое решение Йоста уравнения (63),

$$\tilde{\Phi}(x, t, k) = \tilde{\Psi}(x, t, k) \tilde{S}^{-1}(k, t), \quad (67)$$

и учесть тождество

$$\tilde{S}_t + 2ik^2[\tilde{S}, \sigma_3] = i \int_{-\infty}^{\infty} dx \tilde{\Phi}^{-1}(x, t, k) [i\tilde{Q}_t - \sigma_3(\tilde{Q}_{xx} - 2\tilde{Q}^3)] \tilde{\Psi}(x, t, k), \quad (68)$$

которое вкпе с неоднородным УрЧП (61) влечет эволюционное уравнение для матрицы рассеяния

$$\tilde{S}_t = 2ik^2[\sigma_3, \tilde{S}] + i \int_{-\infty}^{\infty} dx \tilde{\Phi}^{-1}(x, t, k) \Sigma(x, t) \tilde{\Psi}(x, t, k). \quad (69)$$

Теперь легко показать, что, внося под знак интеграла в правой части этого уравнения выражения (67), (64) и (62), мы получим в точности эволюционное уравнение (55) для СЗ Дирихле или Неймана

$$\tilde{S}_t = 2ik^2[\sigma_3, \tilde{S}] + 2k(1 + \eta)S^{-1}(-k, t)V(t)S(k, t) - i(1 - \eta)\sigma_3 S^{-1}(-k, t)W(t)S(k, t). \quad (70)$$

В заключение заметим, что достижение предъявленного подхода, который мы называем “метод источника”, состоит в том, что в этом подходе можно использовать преимущества более традиционного (спектрального) метода обратной задачи рассеяния на всей прямой. В частности, становится возможным исследовать поведение решения $q(x, t)$ для СЗ при больших временах, поскольку асимптотические выражения при условии, что граничные данные быстро убывают при $t \rightarrow \infty$, оказываются сравнительно легко вычислимыми, если рассматривается обычная спектральная теория на всей прямой.

4. ЛИТЕРАТУРНЫЙ ОБЗОР

Классическая идея устранения неизвестных граничных данных из представления для решения лежит в основе метода функции Грина [1], в котором существенно используется метод отражений [2] при построении подходящей функции Грина, т.е. той, которая позволяет устранить неизвестные граничные данные. Подход УПО, введенный в данной работе, представляет собой естественное и эффективное использование стратегии устранения, примененной в пространстве Фурье. Насколько нам известно, этот метод никогда не применялся ранее к исследованию линейных УрЧП.

Альтернативный метод, который авторы называют *аналитическим подходом*, также дает полезные результаты; основан он на существовании глобального соотношения, открытого Фокасом, и на его использовании при решении СЗ [3]–[7]. Наш вклад в этот метод заключается в систематическом использовании аналитических свойств фурье-преобразований всех величин, встречающихся в формуле (8), с целью вывести набор

аналитических ограничений, которых оказывается достаточно для того, чтобы выразить неизвестные граничные условия через известные, и для того, чтобы исследовать в общем случае однозначную разрешимость СЗ [8].

За последние десятилетия были развиты разнообразные подходы к изучению задач с неизвестными граничными данными при исследовании СЗ для солитонных уравнений. В работе [9] Фокас ввел нелинейный аналог преобразования синусов. В работе [10] Сабатье построил “локтевое рассеяние” в плоскости переменных (x, t) , для того чтобы исследовать уравнение КдФ на полупрямой, что привело к формулировке Гельфанда–Левитана–Марченко. В работах [3], [4] Фокас применил другой подход, основанный на одновременном спектральном преобразовании для переменных x и t . Этот подход был строго обоснован в работах [11], [12] в применении к решению СЗ для солитонных уравнений на полупрямой. Этот подход позволяет найти строгое асимптотическое поведение решения [13] и естественным образом охватывает уже известные модели [14] линеаризуемых граничных задач. В работе [15] были предложены два альтернативных подхода к исследованию СЗ для солитонных уравнений на отрезке и на полупрямой. В первом методе неизвестные граничные данные были выражены через элементы матрицы рассеяния $S(k, t)$, что порождает нелинейное интегродифференциальное эволюционное уравнение на матрицу S . Во втором методе, который может рассматриваться как нелинейный аналог подхода УПО, развитого в разделе 2, для S было построено нелинейное эволюционное уравнение (55), которое уже не содержит неизвестных граничных данных и включает в себя естественным образом случай линеаризуемой СЗ. Некоторые интегрируемые случаи граничных условий для солитонных уравнений и их связь с симметриями были также исследованы Хабибуллиным и др. (см. [16] и ссылки в этой работе).

В некоторых необщих случаях солитонных уравнений, соответствующих сингулярным дисперсионным соотношениям, к которым относятся уравнения вынужденного рамановского рассеяния (ВРР) и уравнение синус-Гордон (СГ) в координатах светового конуса, эволюционное уравнение для матрицы рассеяния не содержит неизвестных граничных условий. Уравнение СГ на полупрямой было исследовано с помощью x - t -спектрального преобразования [3]; уравнения ВРР и СГ на полупрямой также исследовались с использованием более традиционного метода x -преобразований Леоном и Михайловым в работе [17] и Леоном и Спиро в работе [18]; x -спектральные данные, использованные в последнем подходе, удовлетворяют нелинейному эволюционному уравнению типа уравнения Риккати.

Помимо одновременного преобразования пространственно-временных переменных, все вышеприведенные подходы были основаны на традиционном методе обратной задачи рассеяния [19]. Спектральный формализм, позволяющий исследовать “нагруженные” солитонные уравнения (солитонные уравнения с заданной ненулевой правой частью), был развит несколькими авторами, особенно в связи с теорией возмущений (см., например, [20]).

Отметим, наконец, что СЗ и задача для C -интегрируемого нагруженного уравнения также рассматривались Абловицем, Калоджеро и Де Лилло [21].

Результаты, относящиеся к нелинейному случаю, включают в себя: 1) построение с помощью техники Римана–Гильберта интегрального уравнения (56), (57) для элементов матрицы рассеяния в замкнутом виде, 2) постановку СЗ Дирихле и Неймана на полупрямой для солитонных уравнений, рассматриваемых как нагруженные начальные задачи на всей прямой. Эквивалентность задач на полупрямой и на всей прямой уже использовалась в работе [9], хотя подходящие уравнения для спектральных данных, найденные в работе [9], отличаются от уравнений, представленных в настоящей работе.

Благодарности. Настоящая работа была выполнена в течение нескольких визитов и встреч. Мы благодарим за финансовую поддержку РФФИ (грант № 01-01-00929), INTAS (грант № 99-1782), а также Университет Рима “Ла Сапенца” (Италия), Национальный институт ядерных исследований (римская секция), Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау (Москва, Россия) и Институт математических наук Исаака Ньютона (Кембридж, Великобритания).

Список литературы

- [1] Ф. Морс, Г. Фешбах. Методы теоретической физики. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.
- [2] R. Terras, R. Swanson. J. Math. Phys. 1980. V. 21. P. 2140–2153.
- [3] A. S. Fokas. Proc. Roy. Soc. Lond. A. 1997. V. 53. P. 1411.
- [4] A. S. Fokas. J. Math. Phys. 2000. V. 41. P. 4188.
- [5] A. S. Fokas. Proc. Roy. Soc. Lond. A. 2001. V. 457. P. 371.
- [6] A. S. Fokas, B. Pelloni. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 2001. V. 131. P. 521.
- [7] Б. Пеллони. ТМФ. 2002. Т. 133. № 2. С. 327.
- [8] A. Degasperis, S. V. Manakov, P. M. Santini. Initial-boundary value problems for linear PDEs: the analyticity approach. nlin.SI/0210058.
- [9] A. S. Fokas. Inverse scattering transform on the half-line – the nonlinear analogue of the sine transform. In: Inverse Problems: An Interdisciplinary Study. Ed. P. C. Sabatier. London: Academic Press, 1987. P. 409.
- [10] P. C. Sabatier. J. Math. Phys. 2000. V. 41. P. 414.
- [11] A. S. Fokas, A. R. Its, L. Y. Sung. The nonlinear Schrödinger equation on the half-line. Preprint. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2001.
- [12] A. S. Fokas. Integrable nonlinear evolution equations on the half-line. Commun. Math. Phys. (in print).
- [13] A. S. Fokas, A. R. Its. Phys. Rev. Lett. 1992. V. 68. P. 3117.
- [14] M. J. Ablowitz, H. Segur. J. Math. Phys. 1975. V. 16. P. 1054.
- [15] А. Дегасперис, С. В. Манаков, П. М. Сантини. Письма в ЖЭТФ. 2001. Т. 74. С. 541.
- [16] И. Т. Хабибуллин. ТМФ. 2002. Т. 130. № 1. С. 31.
- [17] J. Leon, A. V. Mikhailov. Phys. Lett. A. 1999. V. 253. P. 33.
- [18] J. Leon, A. Spire. J. Phys. A. 2001. V. 34. P. 7359.
- [19] М. Дж. Абловиц, Х. Сигур. Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987; В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский. Теория солитонов: Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.
- [20] А. Ньюэлл. Обратное преобразование рассеяния. В сб.: Солитоны. Ред. Р. Буллаф, Ф. Кодри. М.: Мир, 1983. С. 193.
- [21] F. Calogero, S. De Lillo. Inverse Problems. 1988. V. 4. P. L33–37; J. Math. Phys. 1991. V. 32. P. 99; M. J. Ablowitz, S. De Lillo. Phys. Lett. A. 1991. V. 156. P. 483.