Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ю. Доброхотов, Е. С. Семенов, Б. Тироцци, О вычислении интегралов цепочки Гюгонио–Маслова для особых вихревых решений уравнений мелкой воды, *ТМФ*, 2004, том 139, номер 1, 62–76

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf39>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 17:42:26

© 2004 г. С. Ю. Доброхотов*, Е. С. Семенов*, Б. Тироцци†

О ВЫЧИСЛЕНИИ ИНТЕГРАЛОВ ЦЕПОЧКИ ГЮГОНИО–МАСЛОВА ДЛЯ ОСОБЫХ ВИХРЕВЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ

Обсуждаются вопросы интегрируемости цепочки Гюгонио–Маслова для особых вихревых решений уравнений мелкой воды на β -плоскости. Показано, что использование комплексных переменных при выводе цепочки автоматически приводит к появлению большинства интегралов полной и укороченной цепочки. Выявляется связь некоторых из этих интегралов с лагранжевым инвариантом – потенциальным вихрем. Обсуждается вопрос отбора решений цепочки, подходящих для описания реальных траекторий тропических циклонов.

Ключевые слова: особые вихревые решения, траектории, мелкая вода, интегралы, цепочки.

1. ВВЕДЕНИЕ

Согласно концепции Маслова [1] несколько типов сингулярных решений квазилинейных гиперболических систем имеют одинаковую математическую природу и могут быть проанализированы с одинаковой точки зрения, несмотря на их различную физическую интерпретацию. Все они (как в векторном, так и в скалярном случаях) представляются в виде

$$\mathbf{w}(x, t) = \mathbf{f}(x, t) + \mathbf{g}(x, t)F(S(x, t)), \quad x = {}^t(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n. \quad (1)$$

Здесь скалярная “фаза” $S(x, t)$, а также векторные (или скалярные) “фон” $\mathbf{f}(x, t)$ и “амплитуда” $\mathbf{g}(x, t)$ – гладкие (бесконечно дифференцируемые) функции. Скалярная функция $F(\tau)$ гладко зависит от τ при $\tau \neq 0$ и имеет особенность при $\tau = 0$. Таким образом, особенности функции $\mathbf{w}(x, t)$ определяются нулями фазы S . Индекс t слева вверху здесь и всюду ниже означает транспонирование.

К числу указанных решений относятся ударные волны; в этом случае $F = \Theta(\tau)$, где $\Theta(\tau)$ – функция Хевисайда ($\Theta = 0$ при $\tau < 0$ и $\Theta = 1$ при $\tau \geq 0$), – бесконечно узкие солитоны ($F = \text{Sol}(\tau)$, где $\text{Sol}(\tau) = 0$ при $\tau \neq 0$ и $\text{Sol}(\tau) = 1$ при $\tau = 0$). В одномерных

* Институт проблем механики РАН, Москва, Россия.

E-mail: dobr@ipmnet.ru; semenov@ipmnet.ru

† Department of Physics, University “La Sapienza”, Rome, Italy.

E-mail: tirozzi@krishna.phys.uni-roma1.it

задачах фаза S в обоих случаях имеет вид $S = x - X(t)$. Еще один пример – это слабые особые решения с особенностью типа корня квадратного из квадратичной формы; тогда $F = \sqrt{\tau}$ и S в первом приближении есть невырожденная квадратичная положительная форма от x с центром в точках $x = X(t)$, которые определяют траекторию $\Gamma = \{x = X(t)\}$ движения особенности. Некоторым свойствам особых решений последнего типа системы уравнений мелкой воды на β -плоскости посвящена эта работа.

В этом случае $x = {}^t(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, векторы $\mathbf{w}$, $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ состоят из трех компонент, и мы имеем формулы

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho(x, t) \\ u_1(x, t) \\ u_2(x, t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R(x, t) \\ U_1(x, t) \\ U_2(x, t) \end{pmatrix} \sqrt{S(x, t)}, \quad (2)$$

$$S = \frac{(x - X(t), G(t)(x - X(t)))}{2} + O(|x - X(t)|^3).$$

Здесь $\mathbf{u}(x, t) = {}^t(\mathbf{u}_1(x, t), \mathbf{u}_2(x, t))$ – двумерный вектор скорости, функция $\eta(x, t)$ – превышение свободной поверхности в теории мелкой воды или так называемый геопотенциал в физике атмосферы, $G(t)$ – положительная (2×2) -матрица с различными собственными значениями. Систему уравнений мелкой воды мы приведем несколько ниже, а сейчас подчеркнем еще раз, что особенность у решения вида (2) слабая: его компоненты – непрерывные функции, разрывными оказываются лишь некоторые производные. Кроме того, отметим, что особая составляющая решения (2) имеет вихревой характер. Таким образом, решение вида (2) описывает уединенный вихрь, “бегущий” по гладкому “фону”.

Обсуждение различных общих свойств решений (1) можно найти в работах [2]–[8]. К ним относятся, в частности, свойства “структурной” самоподобности и устойчивости, а также алгебраическое свойство: любая степень или произведение решений (1) имеют структуру, аналогичную (1), и могут быть разложены на гладкую составляющую и сингулярную часть, определяющуюся той же функцией F (т.е. решения с перечисленными функциями F образуют алгебру с двумя образующими). Наличие свойств “структурной” самоподобности и устойчивости позволяет установить для многих гиперболических систем в некотором смысле единственность перечисленных выше типов особенностей в широком классе особых решений. Например, решениями системы уравнений мелкой воды среди функций вида (1) с непрерывными F такими, что $F(0) = 0$, $F' \rightarrow \infty$ при $\tau \rightarrow +0$, и гладкими¹⁾ при $\tau > 0$ могут быть только функции (2) с особенностью типа квадратного корня из квадратичной формы.

Система уравнений мелкой воды на β -плоскости имеет вид

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + (\nabla, \eta \mathbf{u}) = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{u} - \omega \mathbf{T} \mathbf{u} + \nabla \eta = 0, \quad (3)$$

где

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla = {}^t \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right).$$

¹⁾ К таким функциям относятся, например, τ^α , $\tau \ln \tau$ и их линейные комбинации.

Эта система появляется во многих областях физики и механики. Для нас важно, что она используется в том числе как простейшая безвязкостная и бездисперсионная модель при описании движения (но не рождения и диссипации) мезомасштабных вихрей в атмосфере (тропических циклонов) [9]. В этом случае $\omega = \tilde{\omega} + \beta x_2$ — удвоенная частота Кориолиса на β -плоскости, $\tilde{\omega}$, β — соответственно значения этой частоты и ее производной вдоль меридиана x_2 в месте касания β -плоскости и сферы Земли. Система координат ориентирована так, что ось x_1 направлена вдоль параллели на восток, а ось x_2 — вдоль меридиана на север. Ограничимся рассмотрением вихрей в северном полушарии и считаем тем самым, что $\tilde{\omega} > 0$, $\beta \geq 0$.

Система уравнений (3) обладает рядом полезных свойств, в частности гамильтоновой структурой и законами сохранения (см., например, [9], [10]). Для нас важно наличие у нее лагранжева инварианта (инварианта Россби потенциального вихря)

$$\Pi = \frac{\mathbf{u}_2 x_1 - \mathbf{u}_1 x_2 + \omega}{\eta},$$

для которого справедливо равенство

$$\Pi_t + (\mathbf{u}, \nabla) \Pi = 0. \quad (4)$$

Можно видеть, что использование системы (3) и ее решений вида (2) для описания мезомасштабных вихрей в атмосфере накладывает весьма сильные ограничения как на траекторию Γ , так и на поведение фазы S , значения геопотенциала $\rho_0 = \rho|_\Gamma$, скоростей u и их производных на траектории Γ . В частности, подходящие траектории Γ должны быть достаточно гладкими в том смысле, что у них не может быть петель на протяжении жизни тропических циклонов (5–10 дней). Геопотенциал может меняться на траектории достаточно медленно. Эти соображения мы будем иметь в виду в дальнейшем. Заметим также, что для мезомасштабных вихрей в атмосфере потенциальный вихрь принимает достаточно большие значения и по крайней мере не обращается в нуль.

Укажем теперь еще на одно важное свойство решений (1) и (2): они порождают (бесконечные) цепочки обыкновенных уравнений, связывающие коэффициенты Тейлора функций $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ и S в окрестности особенности. Для ударных волн первые уравнения такой цепочки — это хорошо известные условия Гюгонио. Остальные уравнения можно рассматривать как поправки к ним. Впервые эти цепочки появились в работе [1], мы называем их цепочками Гюгонио–Маслова. Их замыкание (или обрыв) приводит к конечномерным системам (укороченным цепочкам), которые можно использовать для приближенного описания эволюции решений (1). В работах [3], [4] были обнаружены свойства интегрируемости укороченных цепочек Гюгонио–Маслова, отвечающих решениям (2) системы (4). Оказалось, что эти свойства связаны с переходом к новым переменным, в которых цепочка представляется в относительно простом виде. Однако смысл этих преобразований оставался неясным. В данной работе мы предлагаем подход, в рамках которого смысл новых переменных становится довольно прозрачным, и упрощающий довольно громоздкие вычисления, проведенные ранее. Кроме того, мы изучаем поведение решений укороченной цепочки в окрестности специальных инвариантных подмногообразий.

2. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ГЛАДКОЙ И ОСОБОЙ СОСТАВЛЯЮЩИХ РЕШЕНИЯ. УСЛОВИЯ КОШИ–РИМАНА

Подставляя решение вида (2) в систему (3) и приравнявая по отдельности гладкие и негладкие составляющие к нулю, приходим к двум подсистемам – для регулярной части, не содержащей $\sqrt{S}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\rho + (\nabla, \rho u + RUS) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}u + (u, \nabla)u + \nabla\rho - \omega \mathbf{T}u + S(U, \nabla)U + \frac{1}{2}(U, \nabla S)U &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

и для нерегулярной части (содержащей $\sqrt{S}$), которая после соответствующих дифференцирований и сокращения на $\sqrt{S}$ принимает вид

$$\begin{aligned} (S_t + (u, \nabla S))R + \rho(P, U) + 2Sf &= 0, \\ (S_t + (u, \nabla S))U + PR + 2SF &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где $f = R_t + (\nabla, uR + \rho U)$, $F = U_t + (u, \nabla)U + (U, \nabla)u - \omega \mathbf{T}U + \nabla R$. Таким образом, мы получаем шесть уравнений для семи неизвестных ρ , u_1 , u_2 , R , U_1 , U_2 , S . В работе [6] было показано, что без уменьшения общности можно считать, что функция S удовлетворяет уравнению эйконала (Гамильтона–Якоби), соответствующему “гидродинамической или медленной моде” системы (3):

$$S_t + (u, \nabla S) = 0. \quad (7)$$

В силу уравнения (7) система (6) может быть переписана в виде

$$\begin{aligned} S(R_t + (\nabla, uR + \rho U)) + \frac{1}{2}\rho(U, \nabla S) &= 0, \\ S(U_t + (u, \nabla)U + (U, \nabla)u - \omega \mathbf{T}U + \nabla R) + \frac{1}{2}R\nabla S &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Уравнения (5), (7) и (8) образуют замкнутую систему для определения семи функций ρ , u_1 , u_2 , R , U_1 , U_2 , S .

Процедуру разделения на гладкую и негладкую части можно провести и для уравнения (4). В результате дополнительно к (5), (7) и (8) мы получим еще два уравнения:

$$S\left(\left(\frac{\partial}{\partial t} + (u, \nabla)\right)\mathcal{P} + (U, \nabla)\check{\mathcal{P}}\right) - \frac{1}{2}\check{\mathcal{P}}(U, \nabla)S = 0, \quad (9)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (u, \nabla)\right)\check{\mathcal{P}} + S(U, \nabla)\mathcal{P} = 0. \quad (10)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \frac{\rho(\operatorname{rot} u + \omega) - SR \operatorname{rot} U + R(\mathbf{T}\nabla S, U)/2}{\rho^2 - SR^2}, \\ \check{\mathcal{P}} &= \frac{S \operatorname{rot} U - (\mathbf{T}\nabla S, U)/2 - SR(\operatorname{rot} u + \omega)}{\rho^2 - SR^2}. \end{aligned}$$

Поскольку (4) следует из (3), система (5), (7)–(10) не является переопределенной: уравнения (9) и (10) могут быть выведены из (5), (7) и (8). Но, как мы увидим ниже, именно с уравнениями (9) и (10) связано появление новых удобных переменных, законов сохранения и интегралов цепочки, отвечающих решению (2).

Заметим, что уравнение (7) и то условие, что фаза S “в первом приближении” есть квадратичная форма по $x - X(t)$, влечет за собой условие “вмороженности” траектории Γ в поле скоростей u :

$$\dot{X}(t) = u(X(t), t) \stackrel{\text{def}}{=} V(t). \quad (11)$$

Если считать, что функции фона ρ , u заданы, то уравнение (7) может быть проинтегрировано, и для R , U мы имеем линейную систему. Если бы функция S не обращалась в нуль на траектории, то в силу известных фактов из теории линейных гиперболических систем для уравнения (8) можно было бы построить гладкое решение задачи Коши с начальными данными из широкого класса гладких функций. Функция S , однако, имеет нуль второго порядка на траектории $x = X(t)$, который, вообще говоря, не может быть компенсирован производными первого порядка от S в последних слагаемых в уравнениях (8), поскольку эти производные имеют нуль лишь первого порядка. Таким образом, мы имеем систему с вырождением (сингулярно возмущенную), существование у которой гладких решений возможно лишь при наложении некоторых дополнительных условий на ее коэффициенты, т.е. на функции u и ρ . Неожидаанный факт, обнаруженный в работе [1], состоит в том, что первыми из таких уравнений оказываются условия Коши–Римана для комплексных скоростей $\tilde{u} = u_1 + iu_2$ на траектории Γ (см. также [8]):

$$\left. \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right|_{\Gamma} = \left. \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right|_{\Gamma} \stackrel{\text{def}}{=} q(t), \quad \left. \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right|_{\Gamma} = - \left. \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right|_{\Gamma} \stackrel{\text{def}}{=} p(t). \quad (12)$$

В равенствах (12) мы ввели новые неизвестные функции $q(t)$, $p(t)$.

Одновременно с выводом уравнения эйконала (7) и условий Коши–Римана (12) определяются первые члены тейлоровского разложения функций R и U [3]:

$$U = A \mathbf{T} \nabla S + O(|x - X(t)|)^2, \quad R = \frac{2}{3} A (2p - \omega) S + O(|x - X(t)|)^3, \quad (13)$$

где A – константа.

На условия (11) и (12) можно смотреть как на аналоги условий Гюгонио для решений типа квадратного корня (2). Эти условия, играющие важную роль в описании свойств особых решений и их траекторий, получаются в результате приравнивания в системе (8) коэффициентов Тейлора до третьего порядка включительно к нулю. Приравнивание коэффициентов в последующих порядках дает наборы дополнительных соотношений. Вычисление их явного вида требует большого количества нетривиальных вычислений и преобразований; в настоящее время они получены лишь для коэффициентов первого и второго порядков [6]. Заметим, что априори свойство аналитичности комплексной скорости $u(x, t)$ не предполагается, более того, это свойство не является справедливым для всех ${}^t(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$: оно имеет место только на траектории Γ . Оказалось [3], что

это свойство в некотором смысле является следствием существования закона сохранения потенциального вихря (4). С другой стороны, полной ясности о причине появления условия Коши–Римана еще нет.

В дальнейших вычислениях используются лишь уравнения для регулярной части, причем на условия Коши–Римана мы будем смотреть как на уравнения связи между соответствующими производными от скорости.

3. ВЫВОД ЦЕПОЧКИ ГЮГОНИО–МАСЛОВА В КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Приравнивание коэффициентов Тейлора в уравнениях (5) для гладкой составляющей приводит к незамкнутой цепочке обыкновенных дифференциальных уравнений весьма сложной структуры. Для использования в задачах об определении траекторий особенности (уединенного вихря) эту цепочку следует замкнуть. Мы замыкаем ее, аналогично работе [11], сохраняя уравнения для тейлоровских коэффициентов до 2-го порядка включительно, т.е. удерживая коэффициенты того же порядка, что и в негладкой составляющей. Такой “обрыв” дает систему, состоящую уже из 17 нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Как уже отмечалось, эта система обладает любопытными свойствами типа интегрируемости [3], основанными на наличии у нее ряда интегралов, которые легко обнаружить, если перейти в исходной цепочке к новым переменным [3], [8]. Одна из целей данной работы – показать, что эти переменные и связанные с ними уравнения возникают естественным образом, если вместо вещественных переменных x_1, x_2 в исходных уравнениях мелкой воды, а также в описании функций ρ, u использовать комплексные переменные

$$z = x_1 - X_1(t) + i(x_2 - X_2(t)), \quad \bar{z} = x_1 - X_1(t) - i(x_2 - X_2(t)).$$

Перейдем от переменных u к переменным u' : $u = u' + V$. Такое преобразование равносильно переходу в систему координат, связанную с центром особенности, а затем введению комплексных переменных $z, \bar{z}$. В дальнейшем для упрощения обозначений штрихи у новых переменных мы опускаем. Чтобы не усложнять обозначения, будем считать, что

$$(u, \nabla) = u \frac{\partial}{\partial z} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad \operatorname{div} u = \frac{\partial}{\partial z} u + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \bar{u} = 2 \operatorname{Re} \frac{\partial u}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot} u = \frac{1}{i} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \right) = 2 \operatorname{Im} \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Будем изучать одновременно уравнения (5) и (9). В новых переменных уравнения (5) запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho + (u, \nabla) \rho + \rho \operatorname{div} u &= \mathcal{F}(R, U, S), \\ \frac{\partial}{\partial t} u + (u, \nabla) u + \dot{V} + i\omega(u + V) + 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \rho &= \mathcal{G}(U, S), \end{aligned} \tag{14}$$

где $\mathcal{F} = -\operatorname{div}(SRU)$, $\mathcal{G} = -S(U, \nabla)U - U(U, \nabla)S/2$. Уравнение (9) в новых переменных и обозначениях не изменит своего вида.

Обозначим через $g^{(k)}$ однородные полиномы k -й степени в тейлоровском разложении функций g по степеням $z, \bar{z}$:

$$g^{(k)} = \sum_{i=0}^k \frac{1}{i! (k-i)!} g_{i, k-i} z^i \bar{z}^{k-i}.$$

В силу условий вмерзженности и условий (12) имеем для u : $u = u^{(1)} + u^{(2)} + O(|z|^3)$, $u^{(1)} = (q - ip)z$. Для ω получим

$$\omega = \omega_0(t) - i\frac{\beta}{2}(z - \bar{z}), \quad \omega_0(t) = \omega|_{\Gamma}.$$

Заметим, что $\rho_{m,n} = \bar{\rho}_{n,m}$, $\mathcal{P}_{m,n} = \overline{\mathcal{P}}_{n,m}$, так как ρ и $\mathcal{P}$ — вещественные функции. Будем писать ρ_0 вместо $\rho^{(0)}$.

Теперь задача вывода цепочки состоит в приравнивании коэффициентов одинакового порядка в уравнениях (14). Операция дифференцирования по t не меняет порядок полиномов от $z, \bar{z}$ в тейлоровском разложении. Операция дифференцирования по z и $\bar{z}$ понижает порядок соответствующего полинома на единицу. Умножение полинома на $z^m \bar{z}^n$ повышает порядок на $m + n$. Таким образом, систему (9), (14) мы можем переписать в виде

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \operatorname{div} u^{(1)} \rho_0 \equiv \frac{\partial \rho_0}{\partial t} + 2q\rho_0 = 0, \quad (15)$$

$$\frac{dV}{dt} + i\omega_0 V + 2\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \rho^{(1)} = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}^{(0)} = 0, \quad (17)$$

и для $k \geq 1$

$$\frac{\partial \rho^{(k)}}{\partial t} + (u^{(1)}, \nabla) \rho^{(k)} + \rho^{(k)} \operatorname{div} u^{(1)} + (u^{(k)}, \nabla) \rho^{(1)} + \rho^{(1)} \operatorname{div} u^{(k)} = \mathcal{M}_k + \mathcal{F}^{(k)}, \quad (18)$$

$$\frac{\partial u^{(k)}}{\partial t} + (u^{(1)}, \nabla) u^{(k)} + (u^{(k)}, \nabla) u^{(1)} + i\omega_0 u^{(k)} = \mathcal{N}_k + \mathcal{G}^{(k)}, \quad (19)$$

$$S^{(2)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}^{(k)} + (u^{(1)}, \nabla) \mathcal{P}^{(k)} \right) = \mathcal{L}_k. \quad (20)$$

Здесь функции $\mathcal{M}_k, \mathcal{N}_k$ — однородные полиномы k -й степени, зависящие от однородных полиномов низшей степени в разложении Тейлора функций ρ и u , от $\rho^{(k+1)}, u^{(k+1)}$ и их производных по $z, \bar{z}$. Функция $\mathcal{L}_k$ не содержит полиномов $\mathcal{P}^{(k)}$, а также производных от них. Из формул (13) следует, что $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_3 = 0$, $\mathcal{F}^{(k)} = \mathcal{G}^{(k)} = 0$ для $k = 0, 1, 2$.

Уравнение (17) немедленно дает один из интегралов цепочки:

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\omega_0 - 2p}{\rho_0} = \mathcal{P}^{(0)} \equiv \Pi^{(0)} = \text{const}. \quad (21)$$

Справедливо следующее очевидное, но важное для дальнейшего и опирающееся на условия Коши–Римана (12)

УТВЕРЖДЕНИЕ. Мономы $z^m \bar{z}^n$ являются собственными функциями оператора $(u^{(1)}, \nabla)$ с собственными значениями $(q(m+n) - ip(m-n))$:

$$(u^{(1)}, \nabla) z^m \bar{z}^n = (q(m+n) - ip(m-n)) z^m \bar{z}^n. \quad (22)$$

Дифференцируя последовательно уравнения (19) по z , $\bar{z}$ и используя (22), получим теперь систему уравнений для коэффициентов Тейлора в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} u_{m,n} + ((1+m+n)q - i(1+m-n)p + i\omega_0) u_{m,n} = \frac{\partial^{m+n}}{\partial z^m \partial \bar{z}^n} (\mathcal{N}_{m+n} + \mathcal{G}^{(m+n)}).$$

Заметим, что эта система уравнений диагональна по переменным $u_{m,n}$. К сожалению, аналогичные уравнения для тейлоровских коэффициентов, полученные из уравнения (18), не имеют подобной структуры. Однако подобную структуру, как следует из уравнения (20), имеют уравнения для тейлоровских коэффициентов $\mathcal{P}_{m,n}$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}_{m,n} + (q(m+n) - ip(m-n)) \mathcal{P}_{m,n} = \frac{\partial^{m+n}}{\partial z^m \partial \bar{z}^n} \mathcal{L}_k.$$

Поэтому при выводе уравнений для тейлоровских коэффициентов функций, определяющих особое решение (2), наряду с уравнением непрерывности из системы (3) удобно рассматривать и уравнение для потенциального вихря (4).

В силу равенства (22) в уравнениях для $u_{m,n}$ и $\mathcal{P}_{m,n}$ возникают “комплексные” частоты вида $Nq(m+n) + ipM + i\omega_0 K$. С помощью уравнения (15) вещественные части этих частот можно “убить”, произведя замену переменных $u_{m,n} = \rho_0^{(1+m+n)/2} \tilde{u}_{m,n}$, $\mathcal{P}_{m,n} = \rho_0^{(m+n)/2} \tilde{\mathcal{P}}_{m,n}$, что дает уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{u}_{m,n} + i(\omega_0 - (1+m-n)p) \tilde{u}_{m,n} = \rho_0^{-(1+m+n)/2} \frac{\partial^{m+n}}{\partial z^m \partial \bar{z}^n} (\mathcal{N}_k + \mathcal{G}^{(k)}), \quad (23)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\mathcal{P}}_{m,n} - ip(m-n) \tilde{\mathcal{P}}_{m,n} = \rho_0^{-(m+n)/2} \frac{\partial^{m+n}}{\partial z^m \partial \bar{z}^n} \mathcal{L}_k \quad (24)$$

уже с чисто вещественными частотами.

Остановимся подробнее на уравнениях цепочки с номерами $k = 1, 2$. Разлагая функции, определяющие фон, в ряд Тейлора, подставляя их в уравнения (14) и собирая слагаемые одинаковой степени по z , $\bar{z}$ до второго порядка включительно, мы получим следующий набор уравнений:

$$\frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial t} + (u^{(1)}, \nabla) \rho^{(1)} + \rho^{(1)} \operatorname{div} u^{(1)} + \rho_0 \operatorname{div} u^{(2)} = 0, \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial t} + (u^{(1)}, \nabla) \rho^{(2)} + \rho^{(2)} \operatorname{div} u^{(1)} + \\ + (u^{(2)}, \nabla) \rho^{(1)} + \rho^{(1)} \operatorname{div} u^{(2)} + \rho_0 \operatorname{div} u^{(3)} = 0, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial t} + (u^{(1)}, \nabla) u^{(1)} + i\omega_0 u^{(1)} + 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \rho^{(2)} + \frac{\beta(z - \bar{z})V}{2} = 0, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial t} + (u^{(1)}, \nabla) u^{(2)} + u^{(2)} \frac{\partial}{\partial z} u^{(1)} + i\omega_0 u^{(2)} + \\ + 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \rho^{(3)} + \frac{\beta(z - \bar{z})u^{(1)}}{2} = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Проводя аналогичную процедуру для уравнения (9), но собирая в нем слагаемые третьего порядка, и производя деление на $S^{(2)}$, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}^{(1)} + (u^{(1)}, \nabla) \mathcal{P}^{(1)} = 0. \quad (29)$$

Подставив $u^{(1)} = (q - ip)z$ в (27), получим

$$(\dot{q} - ip)z + (q - ip)^2 z + 2\rho_{11}z + 2\rho_{02}\bar{z} + i\omega_0(q - ip)z + \frac{\beta(z - \bar{z})V}{2} = 0.$$

Собирая коэффициенты Тейлора при $\bar{z}$ и приравнявая их к нулю, придем к равенствам $\bar{\rho}_{20} = \rho_{02} = \beta V/4$, которые можно рассматривать как уравнения связи, аналогичные (12).

Приравнявая далее к нулю вещественную и мнимую части коэффициентов при z , придем к уравнениям

$$\dot{q} - p^2 + q^2 + \omega_0 p + 2\rho_{11} + \frac{\beta V_1}{2} = 0, \quad (30)$$

$$\dot{p} + 2pq - \omega_0 q - \frac{\beta V_2}{2} = 0. \quad (31)$$

Заметим, что уравнение (21) может быть также получено из уравнений (15), (31) и уравнения для ω_0

$$\dot{\omega}_0 = \beta \operatorname{Im} V, \quad (32)$$

которое получается дифференцированием по t равенства $\omega_0 = \tilde{\omega} + \beta X_2$. Таким образом, вводя константу C , мы можем исключить функцию $p(t)$ и уравнение (31) из цепочки. Напомним, что мы рассматриваем случай $C \neq 0$. Из уравнений (15) и (30) можно легко вывести, что функция $\mu = 1/\sqrt{|C|\rho_0}$ удовлетворяет уравнению

$$\ddot{\mu} + \frac{\omega_0^2 + 2\beta \operatorname{Re} V}{4} \mu = \mu^{-3} \left(\frac{1}{4} - 2\rho_{11}\mu^4 \right). \quad (33)$$

Таким образом, вместо обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (15) и (30) можно использовать уравнение второго порядка для μ .

Дифференцируя (28) последовательно по z и $\bar{z}$, приходим к уравнениям (23) для $m + n = 2$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{u}_{11} + i(\omega_0 - p)\tilde{u}_{11} &= -\frac{2\rho_{12}}{\rho_0^{3/2}} + \frac{\beta(q - ip)}{2\rho_0^{3/2}}, \\ \frac{d}{dt} \tilde{u}_{20} + i(\omega_0 - 3p)\tilde{u}_{20} &= -\frac{2\rho_{21}}{\rho_0^{3/2}} - \frac{\beta(q - ip)}{\rho_0^{3/2}}, \\ \frac{d}{dt} \tilde{u}_{02} + i(\omega_0 + p)\tilde{u}_{02} &= -\frac{2\rho_{03}}{\rho_0^{3/2}}. \end{aligned}$$

Для того чтобы избавиться в этих уравнениях от переменной q , удобно ввести переменные

$$Y = \frac{1}{|C|^{5/2}} \left(2\tilde{u}_{11} - \frac{\beta}{3\rho_0^{3/2}} \right), \quad Z = \frac{1}{|C|^{5/2}} \left(\tilde{u}_{20} + \frac{\beta}{3\rho_0^{3/2}} \right), \quad U = \frac{1}{|C|^{5/2}} \tilde{u}_{02}.$$

Это дает следующие уравнения:

$$\dot{Y} = i(p - \omega_0)Y - \frac{i\beta(2p + \omega_0)\mu^3}{3|C|} - 4\frac{\rho_{12}\mu^3}{|C|}, \quad (34)$$

$$\dot{Z} = i(3p - \omega_0)Z + \frac{i\omega_0\beta\mu^3}{3|C|} - 2\frac{\rho_{21}\mu^3}{|C|}, \quad (35)$$

$$\dot{U} = -i(p + \omega_0)U - 2\frac{\rho_{03}\mu^3}{|C|}. \quad (36)$$

Дифференцируя (29) по $\bar{z}$ и умножая результат на $1/\sqrt{\rho_0}$, приходим к уравнениям (24) для $m = 0$, $n = 1$: $d\tilde{\mathcal{P}}_{01}/dt + ip\tilde{\mathcal{P}}_{01} = 0$. Вместо $\tilde{\mathcal{P}}_{01}$ удобнее использовать функцию

$$W = -\frac{2i}{|C|^{5/2}} \tilde{\mathcal{P}}_{01} = 2\frac{\mu^3}{|C|} \left(iC\rho_{01} - u_{11} + \overline{u_{20}} + \frac{\beta}{2} \right),$$

для которой выполнено уравнение

$$\dot{W} = -ipW. \quad (37)$$

Отсюда немедленно следует, что $|W|$ есть интеграл полной цепочки. Разумеется, это уравнение можно получить, комбинируя уравнения (25), (28). Однако из уравнения для потенциального вихря оно выводится непосредственно.

Выражая $\partial\rho^{(1)}/\partial\bar{z} = \rho_{01}$ в уравнении (16) через W , Y , Z и μ , приходим к уравнению

$$\dot{V} + i\omega_0 V - \frac{\sigma}{\mu^3} (Y + W - 2\bar{Z}) = 0, \quad (38)$$

где $\sigma = \text{sign } C$. Применяя $\partial^2/\partial z \partial \bar{z}$ к (26) и заменяя соответствующие коэффициенты Тейлора на функции Y , Z , U и W , мы получим уравнение

$$\dot{\rho}_{11} + 4q\rho_{11} + \sigma C^4 \rho_0^3 \text{Im}((Z + \bar{Y})W + 3YZ) + \rho_0 u_{21} + \rho_0 \overline{u_{21}} = 0.$$

Чтобы избавиться в этом уравнении от переменной q , удобно ввести переменную $r = \rho_{11}\mu^4$, для которой будет выполнено уравнение

$$\dot{r} + \frac{C}{\mu^2} \text{Im}((Z + \bar{Y})W + 3YZ) + \mu^2(\rho_0 u_{21} + \rho_0 \overline{u_{12}}) = 0. \quad (39)$$

Уравнение (33) можно переписать в виде

$$\ddot{\mu} + \frac{\omega_0^2 + 2\beta \text{Re } V}{4} \mu = \mu^{-3} \left(\frac{1}{4} - 2r \right). \quad (40)$$

Уравнения (32)–(40), где $p = (\omega_0 - \sigma\mu^{-2})/2$, можно рассматривать как первые уравнения цепочки Гюгонио–Маслова для особых решений (2) уравнений (3). Мы обрываем цепочку, положив $\rho_{21} = \rho_{12} = \rho_{03} = 0$, а также $u_{21} = u_{12} = 0$. Заметим, что функция U входит только в уравнение (36), которое всегда разрешимо относительно U , поэтому при отыскании траектории $x = X(T)$ мы можем это уравнение не рассматривать.

4. ИНТЕГРАЛЫ УКРОЧЕННОЙ ЦЕПОЧКИ И ГЛАДКИЕ ТРАЕКТОРИИ ПРИ $\beta = 0$

Как мы уже отмечали, переменные C и $|W|$ – интегралы полной цепочки. После ее замыкания при $\beta = 0$, очевидно, получаем еще три интеграла: $|Y|$, $|Z|$ и $|U|$. Еще один интеграл при $\beta = 0$, обнаруженный в работе [3], имеет вид

$$\lambda = \frac{1}{4} - 2r\mu^4 - 2|C| \operatorname{Re} \left((Z - \bar{Y})W + \frac{3}{2}YZ \right).$$

В отличие от перечисленных интегралов, его происхождение нам не понятно. Если теперь ввести переменную λ вместо переменной r и переменную $s = \dot{\mu}$, то окончательно получим искомую укороченную цепочку в виде

$$\dot{X} = V, \quad \dot{V} + i\omega_0 V - \frac{\sigma}{\mu^3}(Y + W - 2\bar{Z}) = 0, \quad (41)$$

$$\dot{Y} = i(p - \omega_0)Y - \frac{i\beta(2p + \omega_0)\mu^3}{3|C|}, \quad \dot{Z} = i(3p - \omega_0)Z + \frac{i\omega_0\beta\mu^3}{3|C|}, \quad (42)$$

$$\dot{W} = -ipW, \quad (43)$$

$$\dot{\mu} = s, \quad \dot{\omega}_0 = \beta \operatorname{Im} V, \quad (44)$$

$$\dot{s} + \frac{\omega_0^2 + 2\beta \operatorname{Re} V}{4}\mu = \mu^{-3} \left(\lambda + 2|C| \operatorname{Re} \left((Z - \bar{Y})W + \frac{3ZY}{2} \right) \right), \quad (45)$$

$$\dot{\lambda} = \beta\mu^3 \left(\omega_0 \operatorname{Im} Y - (2p + \omega_0) \operatorname{Im} Z - \frac{4p \operatorname{Im} W}{3} \right), \quad (46)$$

где $p = (\omega_0 - \sigma\mu^{-2})/2$. Вместо последних двух уравнений можно использовать уравнение

$$\dot{r} + \frac{C}{\mu^2} \operatorname{Im}((Z + \bar{Y})W + 3YZ) = 0$$

и уравнение (40). Если вместо μ использовать функцию $\psi = 1/\mu$, положить $b^2 = (\omega_0^2 + 2\beta \operatorname{Re} V)/(4|C|^2)$ и вместо t ввести новую переменную $\Phi = \int_0^t (1/\mu^2) dt = |C| \int_0^t \rho_0 dt$, то уравнение для μ можно переписать в виде уравнения Ермакова

$$\frac{d^2\psi}{d\Phi^2} + Q\psi = \frac{b^2}{\psi^3} \quad (47)$$

с потенциалом $Q = \lambda + 2|C| \operatorname{Re}((Z - \bar{Y})W + 3YZ/2)$. При $\beta = 0$ в силу специального вида “частот” в уравнениях для Y , Z и W потенциал Q представляется в виде $Q = \lambda + \operatorname{Re}(\alpha_1 e^{i\Phi} + \alpha_2 e^{2i\Phi})$, где α_1, α_2 – комплексные константы. Поэтому согласно известным свойствам уравнения Ермакова [12] уравнение (47) при $\beta = 0$ эквивалентно уравнению Хилла

$$z''_{\Phi\Phi} + Q(\Phi)z = 0. \quad (48)$$

Тем самым наличие интегралов укороченной цепочки позволяет при $\beta = 0$ свести ее интегрирование к интегрированию хорошо изученного скалярного уравнения с периодическим коэффициентом. Это позволяет выявить ряд свойств траекторий Γ , связав их

со свойствами уравнения Хилла (48) (такими, как устойчивость, наличие зон и лакун в спектре, см. [3], [4], [8]). Интересно отметить, что уравнение Хилла возникает при нахождении некоторых точных решений уравнений мелкой воды с $\beta = 0$ [13].

При $\beta = 0$ у системы (41)–(44) легко получаются некоторые простые траектории Γ . В частности, полагая последовательно $Z = 0$, $W = 0$; $Y = 0$, $W = 0$; $Z = 0$, $Y = 0$, мы получаем траектории в виде окружностей, направление движения по которым связано с зонами устойчивости уравнения (48) [3], [4]. Если считать параметр β малым, то слагаемые с β в (41)–(44) играют роль адиабатического возмущения, которое, в частности, “деформирует” указанные траектории. Один из эффектов влияния этих слагаемых состоит в том, что движение по “деформированным” окружностям может менять направление, и появляются траектории Γ в виде зигзагов. Оказывается также, что такие “деформированные” траектории могут быть описаны с помощью гамильтоновых систем с одной степенью свободы [7], [8].

5. КРИТИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ И МЕДЛЕННЫЕ ДВИЖЕНИЯ В СЛУЧАЕ НЕАДИАБАТИЧЕСКОГО ВЛИЯНИЯ β -ЭФФЕКТА

При выводе указанных в конце предыдущего пункта гамильтоновых систем существенным является предположение об относительной малости параметра β/C . Если этот параметр не мал, то ясно, что слагаемые с β нельзя рассматривать как адиабатическое возмущение; более того, они могут играть существенную роль в описании траекторий Γ . С этой точки зрения система (41)–(44) не исследовалась. С другой стороны, запас ее решений очень велик и зависит от 14 произвольных параметров (поскольку уравнение $\dot{\omega} = \beta V_2$ получается в результате дифференцирования уравнения $\omega = \tilde{\omega} + \beta X_2$, и одна из 15 констант интегрирования не является свободной; мы также не включаем в число параметров начальные данные для функции U).

Напомним, что мы хотим исследовать систему (41)–(44) для описания траекторий тропических циклонов. Как мы уже говорили, далеко не все ее решения годятся для этой цели, и при отборе подходящих решений нужно использовать дополнительные соображения. Скорости движения их центров относительно невелики (~ 4 – 20 км/час) и меняются достаточно медленно на характерных временах существования тропических циклонов (5–10 дней). Так же медленно изменяется значение геопотенциала на траектории. Таким образом, компоненты V и μ укороченной цепочки (41)–(44) должны меняться достаточно медленно, причем значения компонент V_1 , V_2 должны быть относительно небольшими. Имея в виду явные выражения для правых частей в системе (41)–(44), можно предположить, что для интересующих нас решений в первом приближении всеми производными по t можно пренебречь, что приводит к уравнению для определения критических точек системы. Элементарный анализ показывает, что эти критические точки образуют два двумерных (пересекающихся) гладких “критических” многообразия, характеризуемых условиями (а) $W = 0$ и (б) $p = 0$. Такие многообразия содержат траектории с равномерным движением, параллельным оси x_1 (т.е. движением вдоль параллели). Естественно считать, что интересующие нас решения должны находиться в

некоторой окрестности таких критических многообразий, причем все компоненты этих решений опять же меняются достаточно медленно. Ясно, что в первом приближении эти решения определяются линеаризованными уравнениями, и тем самым характеризуются собственными значениями соответствующей матрицы Якоби.

Учитывая сказанное, представим систему (41)–(44) в несколько ином виде. Добавим к комплексным неизвестным функциям V, Y, Z, W комплексно-сопряженные $\bar{V}, \bar{Y}, \bar{Z}, \bar{W}$ и выделим из полного набора неизвестных переменные $V, \bar{V}, Y, \bar{Y}, Z, \bar{Z}, W, \bar{W}, \lambda, s$. Вектор-столбец, составленный из этих функций, обозначим через ξ . Тогда систему (41)–(44) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= F^0(\omega_0, \mu) + F^1(\omega_0, \mu, \xi) + F^2(\omega_0, \mu, \xi), \\ \dot{\omega}_0 &= \frac{\beta}{2i}(V - \bar{V}), \quad \dot{\mu} = s, \\ \dot{X} &= V.\end{aligned}\tag{49}$$

Здесь $F^1(\omega_0, \mu, \xi) = Q(\omega_0, \mu)\xi$, Q – (10×10) -матрица, отличные от нуля компоненты не зависящего от ξ вектора F^0 : $F_Y^0 = -F_{\bar{Y}}^0 = -i\beta(2p + \omega_0)\mu^3/(3|C|)$; $F_Z^0 = -F_{\bar{Z}}^0 = i\beta\omega_0\mu^3/(3|C|)$; $F_s^0 = -\omega_0^2\mu/4$; а единственная отличная от нуля компонента квадратично зависящего от ξ вектора F^2 определяется равенством $F_s^2 = \mu^{-3}2|C|\operatorname{Re}((Z - \bar{Y})W + 3ZY/2)$.

Вектор $\xi^0(\omega_0, \mu)$, задающий критические точки системы (49) (без учета уравнения $\dot{X} = V$), имеет компоненты

$$\begin{aligned}V^0 &= \bar{V}^0 = \frac{\beta(2p - \omega_0)(p + \omega_0)}{|C|\omega_0(p - \omega_0)(3p - \omega_0)}, \\ Y^0 &= \bar{Y}^0 = \frac{\beta\mu^3(2p + \omega_0)}{3|C|(p - \omega_0)}, \quad Z^0 = \bar{Z}^0 = \frac{\beta\mu^3\omega_0}{3|C|(\omega_0 - 3p)}, \quad W^0 = \bar{W}^0 = 0, \\ \lambda^0 &= \mu^4 \left(\frac{\omega_0^2}{4} - \frac{k\beta}{2\omega_0} \frac{\omega_0^2 - 12p\omega_0 - 12p^2}{(\omega_0 - 3p)(\omega_0 - 2p)} \right), \quad s = 0.\end{aligned}$$

Если к уравнениям для определения критических точек добавить уравнение $V = 0$, то это дает уравнение, связывающее p или μ с ω_0 . Здесь тоже возможны две ситуации:

$$\begin{aligned}\text{a1)} \quad p &= -\omega_0 \iff \mu = \frac{1}{\sqrt{3\omega_0}}, \\ \text{a2)} \quad p &= \frac{\omega_0}{2} \iff C = 0.\end{aligned}$$

Движение по траекториям вдали от окрестности этих множеств оказывается весьма быстрым, и возможность использования соответствующих решений укороченной цепочки в задаче о тропических циклонах маловероятна. Поэтому окрестность критического многообразия (б) ($p = 0$) мы здесь не рассматриваем. Тем самым мы имеем одномерные

инвариантные многообразия, параметризуемые ω_0 . Заменяем теперь переменную ξ на ξ' по формуле $\xi = \xi' + \xi^0(\omega_0, \mu)$ и перепишем систему (49) в виде

$$\dot{\xi}' = \Lambda(\omega_0, \mu)\xi' + F^2(\omega_0, \mu, \xi'), \quad (50)$$

$$\dot{\omega}_0 = \frac{\beta}{2i}(V' - \bar{V}'), \quad \dot{\mu} = s', \quad \dot{X} = V' + V^0. \quad (51)$$

Здесь $\Lambda(\omega_0, \mu)$ – (10×10) -матрица, которая действует на вектор ξ' по следующему правилу:

$$\Lambda\xi' = Q(\omega_0, \mu)\xi' - \frac{\partial \xi^0}{\partial \omega_0} \frac{\beta}{2i}(V' - \bar{V}') - \frac{\partial \xi^0}{\partial \mu} s' + \frac{\partial F^2}{\partial \xi}(\omega_0, \mu, \xi^0(\omega_0, \mu))\xi'.$$

Теперь критические точки определяются равенством $\xi' = 0$, а медленные движения в окрестности критического многообразия – в первую очередь собственными числами матрицы $\Lambda(\omega_0, \mu)$. Обычная процедура исследования систем в окрестности инвариантных подмногообразий состоит в изучении устойчивости системы сначала в линейном приближении. Однако нас интересует прежде всего возможность наличия у системы (50) медленных движений. Если все числа матрицы Λ велики по абсолютной величине, система (50) не будет иметь медленных движений вне зависимости от того, вещественные они или комплексные, т.е. от того, порождает линейная часть системы устойчивую или неустойчивую ситуацию.

Поэтому, прежде чем проводить дальнейшее, вообще говоря, нетривиальное исследование системы (50) в окрестности критических многообразий, сначала следует выяснить, возможны ли вообще медленные траектории, а если возможны, то при каких значениях параметров.

Предварительные вычисления показывают, что в случае (a2) все собственные значения оказываются относительно большими, и использование соответствующих решений в задаче о тропических циклонах также маловероятно. Поэтому мы ограничимся здесь рассмотрением случая (a1), когда $1/\sqrt{\mu} \sim 3\omega_0 \Leftrightarrow p \sim -\omega_0$, и приведем лишь окончательный результат, полученный с помощью вычислений на компьютере. Именно, собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{10}$ матрицы в вариациях для первой подсистемы в критических точках, для которых $W = 0$, $p = -\omega_0$, определяются как $\lambda_9 = ip$, $\lambda_{10} = -ip$, а остальные собственные значения находятся из уравнения

$$\lambda_i^8 + 22\omega_0^2\lambda_i^6 + \left(105 + \frac{9\delta}{2}\right)\omega_0^4\lambda_i^4 + \left(148 + \frac{171\delta}{2}\right)\omega_0^6\lambda_i^2 + \left(64 - 81\delta - \frac{243\delta^2}{2}\right)\omega_0^8 = 0,$$

где безразмерный параметр $\delta = \beta^2/(3|C|\omega_0^3)$. Медленные движения в окрестности критического многообразия возможны тогда, когда существуют “маленькие” корни λ этого полинома. Одно из собственных значений обращается в нуль тогда и только тогда, когда слагаемое $(64 - 81\delta - 243\delta^2/2)\omega_0^8$ в последнем уравнении обращается в нуль. Это дает $\delta = (\sqrt{465} - 9)/27 \sim 0.465$.

Рассмотрим в качестве примера случай, когда β -плоскость касается земли в точке, расположенной на широте 20° ($\tilde{\omega} \approx 0.18 \text{ ч}^{-1}$) и зададимся вопросом: при каком значении геопотенциала возможна ситуация, когда одно из собственных значений обращается в нуль в окрестности этой точки? Соответствующие вычисления, основанные на равенствах (см. случай (a1)) $3\omega_0 = 1/\mu^2 = |C|\rho_0 = |C|\eta|_\Gamma$, $\eta = gH$, где g – ускорение свободного падения, а H – воображаемая высота атмосферы, показывают, что такая ситуация реализуется, если принять значение геопотенциала на траектории Γ , соответствующее высоте слоя атмосферы $\sim 10 \text{ км}$ ($\eta|_\Gamma \approx 860000 \text{ км}^2/\text{с}^2$). Иными словами, в окрестности широты 20° возможно наличие медленных траекторий, если предположить, что высота слоя атмосферы равна $\sim 10 \text{ км}$. Заметим, что в задачах о мезомасштабных вихрях в атмосфере (в отличие от океана) толщина слоя атмосферы – воображаемая величина, которой часто приписываются значения 7–12 км.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен новый способ вывода цепочки Гюгонио–Маслова, проясняющий смысл ряда интегралов укороченной и полной цепочки и упрощающий вычисления. Выявлены необходимые условия для воображаемой высоты слоя атмосферы, при которой у укороченной цепочки возможны гладкие траектории в предположении неадиабатического влияния β -эффекта.

Благодарности. Работа поддержана грантом РФФИ № 01-02-00850.

Список литературы

- [1] В. П. Маслов. УМН. 1980. Т. 35. № 2. С. 252–253.
- [2] В. Г. Данилов, В. П. Маслов, В. М. Шелкович. ТМФ. 1998. Т. 114. № 1. С. 3–55; В. В. Булатов, Ю. В. Владимиров, В. Г. Данилов, С. Ю. Доброхотов. Докл. РАН. 1994. Т. 338. № 1. С. 102–105.
- [3] S. Yu. Dobrokhotov. Russ. J. Math. Phys. 1999. V. 6. № 2. P. 137–173; № 3. P. 282–313.
- [4] С. Ю. Доброхотов. ТМФ. 2000. Т. 125. № 3. С. 491–517.
- [5] S. Yu. Dobrokhotov, K. V. Pankrashkin, E. S. Semenov. Russ. J. Math. Phys. 2001. V. 8. № 1. P. 25–54.
- [6] Е. С. Семенов. Матем. заметки. 2002. Т. 71. № 6. С. 825–838.
- [7] С. Ю. Доброхотов, Б. Тироцци. Докл. РАН. 2002. Т. 384. № 6. С. 741–746.
- [8] S. Yu. Dobrokhotov, E. S. Semenov, B. Tirozzi. Hugóniot-Maslov chains for singular vortical solutions of quasi linear hyperbolic systems and typhoon trajectory. Contemp. Math. 2004. (to appear).
- [9] J. Pedlosky. Geophysical Fluid Dynamics. Berlin: Springer, 1982; Ф. В. Должанский, В. А. Крымов, Д. Ю. Манин. УФН. 1990. Т. 160. № 7. С. 1–47.
- [10] В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов. УФН. 1997. Т. 167. № 11. С. 1137–1167.
- [11] R. Ravindran, P. Prasad. Appl. Math. Lett. 1990. V. 3. № 2. P. 107–109.
- [12] В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматлит, 1995.
- [13] C. Rogers, W. K. Schief. J. Math. Anal. Appl. 1996. V. 198. № 1. P. 194–220; C. Rogers. Phys. Lett. A. 1989. V. 138. № 6, 7. P. 267–273.