Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. М. Гехтман, А. Касман, Интегрируемые системы и условия одноранговости для прямоугольных матриц, *ТМФ*, 2002, том 133, номер 2, 211–217

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf391>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 09:43:56

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ И УСЛОВИЯ ОДНОРАНГОВОСТИ ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ МАТРИЦ

Получена детерминантная формула для тау-функций иерархии Кадомцева–Петвиашвили (КП) в терминах прямоугольных постоянных матриц A, B, C , удовлетворяющих условиям одноранговости. Показано, что этот результат обобщает и объединяет многие предыдущие результаты различных авторов по построению тау-функций дифференциальных и разностных интегрируемых систем из квадратных матриц, удовлетворяющих условиям одноранговости. В частности, в качестве явных специальных случаев он включает формулу Вильсона для тау-функций рациональных КП-решений в терминах лаксовых матриц Калоджеро–Мозера, а также наши предыдущие формулы для тау-функций иерархии КП в терминах почти сплетающих матриц.

Ключевые слова: иерархии КП, солитоны, матрицы Калоджеро–Мозера, условия одноранговости.

1. ВВЕДЕНИЕ

Во многих предыдущих работах детерминантные формулы использовались для превращения постоянных квадратных матриц, удовлетворяющих условиям одноранговости, в тау-функции интегрируемых систем. Напомним, в частности, результат Вильсона [1] о том, что $(n \times n)$ -матрицы X и Z , удовлетворяющие условию “почти канонической сопряженности”

$$\text{rank}([X, Z] + I) = 1, \quad (1)$$

дают тау-функцию для рациональных решений иерархии Кадомцева–Петвиашвили (КП) с помощью формулы

$$\tau(\vec{t}) = \det \left(X + \sum_{i=1}^{\infty} it_i Z^{i-1} \right) \quad (2)$$

(см. также [2]–[4]). Этот результат можно интерпретировать как соотношение между иерархией КП и системой частиц Калоджеро–Мозера, что делает его похожим на соотношение между солитонами Кортевега–де Фриза (КдФ) и системой частиц Руджинарса–Шнайдера [5], [6]. В последнем случае можно показать, что матрицы Лакса X и Z

*Department of Mathematics, University of Notre Dame, Notre Dame, IN, USA

†Department of Mathematics, College of Charleston, Charleston, SC, USA

для этой системы частиц удовлетворяют условиям одноранговости $\text{rank}(XZ + ZX) = 1$ и что формула

$$\tau(\vec{t}) = \det \left(\exp \left(\sum_{i=0}^{\infty} t_{2i+1} Z^{2i+1} \right) X \exp \left(\sum_{i=0}^{\infty} t_{2i+1} Z^{2i+1} \right) + I \right) \quad (3)$$

дает тау-функцию для многосолитонного решения иерархии КдФ.

Как солитонное, так и рациональное решения приведены в нашей предыдущей работе [7], где показано, что квадратные матрицы X , Y и Z , удовлетворяющие условию “почти сплетения”

$$\text{rank}(XZ - YX) = 1, \quad (4)$$

определяют тау-функцию иерархии КП:

$$\tau(\vec{t}) = \det \left(X \exp \left(\sum_{i=1}^{\infty} t_i Z^i \right) + \exp \left(\sum_{i=1}^{\infty} t_i Y^i \right) \right). \quad (5)$$

Предыдущие результаты продемонстрировали также, что матрицы, удовлетворяющие этим условиям одноранговости, полезны при построении решений разностных уравнений. В частности, в работе [8] показано, что для матриц X и Z , удовлетворяющих условию (1), собственные значения x_i^m матрицы

$$\mathbf{X}(m) = -\eta X(\lambda_1 - Z) - m\eta(\lambda_2 - Z)^{-1}(\lambda_1 - Z), \quad (6)$$

где η и λ_i — произвольным образом выбранные константы, удовлетворяют рациональным уравнениям вложенного анзаца Бете

$$\prod_{k=1}^n \frac{(x_j^m - x_k^{m-1})(x_j^m - x_k^m + \eta)(x_j^m - x_k^{m+1} - \eta)}{(x_j^m - x_k^{m-1} + \eta)(x_j^m - x_k^m - \eta)(x_j^m - x_k^{m+1})} = -1 \quad \forall 1 \leq j \leq n. \quad (7)$$

Более того, на конференции “NEEDS 2001” мы анонсировали (как немедленное следствие работы [7]) результат о том, что формула

$$\tau_l^{m,n} = \det [X(c_1 - Z)^l (c_2 - Z)^m (c_3 - Z)^n + (c_1 - Y)^l (c_2 - Y)^m (c_3 - Y)^n W] \quad (8)$$

дает решение разностного билинейного уравнения Хироты

$$(c_2 - c_3) \tau_{l+1}^{m,n} \tau_l^{m+1,n+1} - (c_1 - c_3) \tau_l^{m+1,n} \tau_{l+1}^{m,n+1} + (c_1 - c_2) \tau_l^{m,n+1} \tau_{l+1}^{m+1,n} = 0, \quad (9)$$

когда X , Y и Z удовлетворяют условию (4) (при произвольной $(n \times n)$ -матрице W).

Кроме того, недавно были опубликованы две формулы для функций Бейкера–Ахиезера q -иерархии КП в терминах матриц, удовлетворяющих q -вариантам этих “почти” операторных тождеств. В частности, в работе [9] найдена формула

$$\psi(x, z) = \frac{\det(xzI + xqZ - zX - XZ - I)}{\det(xI - X) \det(zI + qZ)} e^{xz} \quad (10)$$

для случая, когда $\text{rank}(XZ - qZX + I) = 1$. Аналогично в [10] приводится формула

$$\psi(x, z) = \frac{\det(qZX - xZ - zX + zxI)}{\det(ZX - xZ - zX + zxI)} e^{xz} \quad (11)$$

для случая, когда $\text{rank}(XZ - qZX) = 1$. В обоих случаях интерес к этим конкретным функциям Бейкера–Ахизера определяется их биспектральностью (ср. [11]).

Помимо очевидных сходств, были указаны некоторые явные связи между этими результатами. Например, формулу (6) легко вывести из (2) (хотя это и не тот способ, которым она была выведена в [8]), формула (5) позволяет строить рациональные решения, подобные (2), и солитонные решения, а (3) можно рассматривать как специальный случай (5). Формулы, относящиеся к q -иерархии КП, должны быть связаны с остальными при помощи соответствий из работы [9] (ср. [12]) между тау-функциями и волновыми функциями стандартной и q -иерархии КП. Однако отсутствует общий подход, в рамках которого все эти различные формулы появлялись бы как специальные случаи. Цель данной работы состоит в том, чтобы представить такой подход с помощью обобщения формул на случай *прямоугольных* матриц.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть A и C — $(n \times N)$ -матрицы полного ранга и пусть B — $(N \times N)$ -матрица при $N > n$. Для удобства мы предположим выполненным условие невырожденности $\det(AC^T) \neq 0$.

Пусть L — подпространство в $\mathbb{C}^N$, порожденное строками матрицы A , и $L^\perp$ — его ортогональное дополнение по отношению к стандартной билинейной форме $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^N x_i y_i$. Фиксируем базис $u_1, \dots, u_{N-n}$ в $L^\perp$ и определим U как $((N-n) \times N)$ -матрицу со строками $u_1, \dots, u_{N-n}$. Как и в [7], пусть $g(x) = \sum_{i=1}^\infty t_i x^i$ — степенной ряд по x с коэффициентами, зависящими от временных переменных $\vec{t} = (t_1, t_2, \dots)$ иерархии КП.

ТЕОРЕМА 1. Если

$$\text{rank}(ABU^T) \leq 1, \quad (12)$$

то

$$\tau_l^{m,n} = \det[A(c_1 I - B)^l (c_2 I - B)^m (c_3 I - B)^n C^T] \quad (13)$$

является решением разностного билинейного уравнения Хироты (9) и

$$\tau(\vec{t}) = \det[Ae^{g(B)} C^T] \quad (14)$$

есть тау-функция иерархии КП.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно (см., например, [13]), что для доказательства того факта, что $\tau(\vec{t})$ является тау-функцией иерархии КП, достаточно показать, что $\tau_l^{m,n} := \tau(\vec{t} - l[c_1^{-1}] - m[c_2^{-1}] - n[c_3^{-1}])$ есть решение билинейного разностного уравнения Хироты при всех значениях параметров¹⁾. Поэтому наш метод будет состоять в том, чтобы

¹⁾ Как обычно, сдвиг Мивы $\vec{t} + c[z]$ определен как

$$\vec{t} + c[z] = \left(t_1 + cz, t_2 + \frac{cz^2}{2}, t_3 + \frac{cz^3}{3}, \dots \right).$$

доказать второе утверждение посредством доказательства первого. Важно заметить, что достаточно доказать, что билинейное разностное уравнение Хироты выполняется, когда все дискретные “времена” $l, m, n = 0$. Это так, поскольку $\tau_l^{m,n} = \hat{\tau}_0^{0,0}$, если $\hat{\tau}$ является тау-функцией, соответствующей тому же самому выбору A и B , но с другой матрицей C (умноженной справа на транспонированную матрицу к $(c_1 I - B)^l \cdots (c_3 - B)^n$). Поскольку условие в теореме зависит только от свойств A и B , достаточно рассмотреть случай, когда эти параметры равны нулю. В частности, подставляя наше определение τ в (9) и полагая $l = m = n = 0$, находим, что следует показать

$$\begin{aligned} & (c_2 - c_3)\tau(\vec{t} - [c_1^{-1}])\tau(\vec{t} - [c_2]^{-1} - [c_3^{-1}]) - \\ & - (c_1 - c_3)\tau(\vec{t} - [c_2^{-1}])\tau(\vec{t} - [c_1^{-1}] - [c_3^{-1}]) + \\ & + (c_1 - c_2)\tau(\vec{t} - [c_3^{-1}])\tau(\vec{t} - [c_1^{-1}] - [c_2^{-1}]) = 0. \end{aligned}$$

Мы сведем это уравнение к следующему тождеству, доказанному в [7]:

$$h_1(c_1)h_2(c_2, c_3) - h_1(c_2)h_2(c_1, c_3) + h_1(c_3)h_2(c_1, c_2) \equiv 0, \quad (15)$$

где $h_1(c_1) = \det[c_1 - P]$, $h_2(c_1, c_2) = \det[(c_1 - P)(c_2 - P) + Q]$ для $(n \times n)$ -матриц P и Q и при $\text{rank } Q \leq 1$.

Прежде всего, пусть V^T — любая правая обратная к A матрица; определим $G = [V^T U^T]$, $\hat{B} = G^{-1}BG$, $\hat{C}^T = G^{-1}C^T$ и $M = M(\vec{t}) = [I_n 0]e^{g(\hat{B})}\hat{C}^T$. Тогда $AG = [I_n 0]$ и $\tau(\vec{t}) = \det[M(\vec{t})]$. Заметим также, что $G^{-1} = \begin{bmatrix} A \\ * \end{bmatrix}$.

Сдвиг Мивы $\tau(\vec{t} - [c^{-1}])$ можно вычислить как

$$\begin{aligned} \tau(\vec{t} - [c^{-1}]) &= \det[[I_n 0]e^{g(\hat{B})}e^{\ln(I_N - c^{-1}\hat{B})}\hat{C}^T] = \\ &= c^{-n}\tau(\vec{t})\det[c - [I_n 0]\hat{B}e^{g(\hat{B})}\hat{C}^T M(\vec{t})^{-1}] \end{aligned}$$

и аналогично

$$\tau(\vec{t} - [c_1^{-1}] - [c_2^{-1}]) = c_1^{-n}c_2^{-n}\tau(\vec{t})\det[[I_n 0](c_1 - \hat{B})(c_2 - \hat{B})e^{g(\hat{B})}\hat{C}^T M(\vec{t})^{-1}].$$

Несложно далее проверить, что левая часть билинейного разностного уравнения Хироты пропорциональна левой части (15), если определить $P = [I_n 0]\hat{B}e^{g(\hat{B})}\hat{C}^T M^{-1}$ и $Q = [I_n 0](\hat{B})^2 e^{g(\hat{B})}\hat{C}^T M^{-1} - P^2$. Таким образом, достаточно показать, что $\text{rank } Q \leq 1$. Перепишем Q как

$$Q = [I_n 0]\hat{B}(I - e^{g(\hat{B})}\hat{C}^T M^{-1}[I_n 0])\hat{B}e^{g(\hat{B})}\hat{C}^T M^{-1}$$

и заметим, что $e^{g(\hat{B})}\hat{C}^T = \begin{bmatrix} M \\ * \end{bmatrix}$. Поэтому

$$I - e^{g(\hat{B})}\hat{C}^T M^{-1}[I_n 0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ * & I_{N-n} \end{bmatrix},$$

откуда

$$[I_n 0]\hat{B}(I - e^{g(\hat{B})}\hat{C}^T M^{-1}[I_n 0]) = \left([I_n 0]\hat{B} \begin{bmatrix} 0 \\ I_{N-n} \end{bmatrix} \right) [*I_{N-n}].$$

Но множитель в круглых скобках в правой части равен ABU^T и в силу нашего предположения имеет ранг, меньший или равный единице. Поэтому то же верно и для Q , чем и завершается доказательство.

ЗАМЕЧАНИЕ. Подчеркнем, что условия одноранговости (12) не зависят от выбора базисов в подпространствах L и $L^\perp$, которые соответствуют матрице A .

Коль скоро мы построили решение иерархии КП, интересно выяснить, где соответствующие решения лежат в грассманиане Сато–Сегала–Вильсона²⁾ [14], [15]. На этот вопрос можно ответить, изучая соответствующую функцию Бейкера–Ахиезера $\psi(x, z)$. Известно, в частности, что точка $W \in \text{Gr}$ является подпространством, порожденным функцией ψ и ее x -производными при $x = 0$,

$$W = \langle \psi(0, z), \psi_x(0, z), \psi_{xx}(0, z), \dots \rangle.$$

Ниже мы покажем, что существуют такие многочлены $p(z)$ и $q(z)$, что $p(z)H_+ \subset W \subset q^{-1}(z)H_+$; в силу этого по определению W лежит в подграссманиане Gr^{rat} [16], [17].

ТЕОРЕМА 2. *Стационарная функция Бейкера–Ахиезера, соответствующая тау-функции (14), имеет вид*

$$\psi(x, z) = \frac{\det(Ae^{xB}(zI - B)C)}{z^N \det(Ae^{xB}C)} e^{xz}. \quad (16)$$

Как следствие это решение отвечает точке в подграссманиане Gr^{rat} одноранговых решений иерархии КП, соответствующих рациональным спектральным кривым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формула для $\psi(\vec{t}, z)$ следует из хорошо известной формулы для зависящей от времени волновой функции [15]:

$$\psi(\vec{t}, z) = \frac{\tau(\vec{t} - [z^{-1}])}{\tau(\vec{t})} e^{g(z)},$$

которая при вычислении для $\vec{t} = (x, 0, 0, 0, \dots)$ упрощается до формулы (16), поскольку коэффициенты при $-[x]$ являются в точности коэффициентами в степенном ряде функции $\ln(1 - x)$.

Другим способом отождествить подпространство W можно с помощью его дуальности с двойственной функцией Бейкера–Ахиезера ψ^* , относительно которой можно показать, используя аргументы, подобные приведенным выше, что $p(z)\psi^*$ не сингулярна по z при $p(z) = \det(zI - B)$. Таким образом, внутреннее произведение любого многочлена из $p(z)H_+$ на функцию ψ^* (вычисленную как интеграл по путям от произведения вблизи S^1) равно нулю. Следовательно, $p(z)H_+ \subset W$, и мы видим, что W лежит в Gr^{rat} .

²⁾Мы видоизменяем обозначение работы [15], так что $H = H_+ \oplus H_-$ есть гильбертово пространство рядов Лорана по переменной z , разложенное в прямую сумму таким образом, что H_+ порождается неотрицательными степенями z , а H_- – отрицательными. Однако мы не накладываем на элементы H аналитических ограничений. Тогда, как хорошо известно в теории, существует биекция точек грассманиана подпространств W , “сопоставимых” H_+ , и тау-функций, заданных посредством детерминанта отображения проецирования из $e^{-g(z)}W$ в H_+ .

Для решений, соответствующих рациональным спектральным кривым [15]–[18], часто оказывается полезно отождествлять решение другим способом – посредством конечномерного пространства распределений по z с конечным носителем, которые аннулируют функцию Бейкера–Ахиезера. Следствием роли характеристического многочлена $p(z)$ в приведенном выше доказательстве является тот факт, что распределения по z с конечным носителем, которые аннулируют $z^N \psi(x, z)$, имеют носитель в собственных значениях B , если старшая производная ограничивается алгебраической кратностью собственного значения.

3. СПЕЦИАЛЬНЫЕ СЛУЧАИ

Как следствие приведенной выше основной теоремы 1, мы приходим к следующему обобщению теоремы из работы [7].

ТЕОРЕМА 3. Пусть X – $(n \times (N - n))$ -матрица, Y – $(n \times n)$ -матрица и Z – $((N - n) \times (N - n))$ -матрица, причем

$$\text{rank}(XZ - YX) \leq 1. \quad (17)$$

Тогда функция (14) является тау-функцией иерархии КП, где $A = [XI_n]$, B – блочно-диагональная матрица $B = \text{diag}[Z, Y]$, а C – произвольная $(n \times (N - n))$ -матрица полного ранга.

Чтобы удостовериться в этом, заметим, что матрицу U в (12) можно выбрать как $[-I_n X^T]$. Далее получаем, что условие (12) имеет вид (17). Тем самым мы получили обобщение условия (4), где предполагалось, что $N = 2n$ и X является квадратной матрицей. В случае квадратных матриц матрицу C можно определить как $C = [I_n I_n]$, что преобразует (14) в тау-функцию $\tau(\vec{t}) = \det[Xe^{g(Z)} + e^{g(Y)}]$, совпадающую с (5).

В действительности, комбинируя обсуждения предыдущего раздела с наблюдением о том, что распределения, аннулирующие функцию Бейкера–Ахиезера, имеют носитель в собственных значениях B , причем порядок ограничен алгебраической кратностью, мы приходим к подтверждению гипотезы из работы [7], что то же верно и для собственных значений Y и Z .

Более того, можно также получить формулу Вильсона (2) и “почти канонически-сопряженное” условие одноранговости (1) как специальный случай нашего основного результата. Рассмотрим случай, когда $N = 2n$, A , C и U определены, как указано выше, но B выбрана в виде $B = \begin{bmatrix} Z & 0 \\ I_n & Z \end{bmatrix}$. Тогда $ABU^T = -([X, Z] + I_n)$, и, таким образом, (12) совпадает с (1). Кроме того, в этом случае

$$e^{g(B)} = \begin{bmatrix} e^{g(Z)} & 0 \\ g'(Z)e^{g(Z)} & e^{g(Z)} \end{bmatrix},$$

и тау-функция (14) принимает вид $\tau(\vec{t}) = \det[e^{g(Z)}] \det[X + g'(Z)]$, калибровочно-эквивалентный (2).

В заключение отметим, что, хотя многие детали изучены еще далеко не полностью, доказанная выше формула впервые позволяет в едином контексте рассматривать много

различных результатов, связывающих условия одноранговости и тау-функции. В последующей публикации мы планируем обратиться к вопросу о соотношении между геометрией пространства матриц, которую мы используем, и геометрией грассманиана, к редукциям конечномерных гамильтоновых систем (частиц) и к случаю, когда в качестве A , B и C выбираются бесконечномерные операторы.

Благодарности. Авторы выражают благодарность организаторам конференции “NEEDS 2001”, на которой были анонсированы результаты настоящей работы. Мы также благодарны за плодотворные интересные обсуждения М. Эдамсу, Ю. Бересту, Х. Брадену, А. Калини, П. Етингофу, А. Хоуну, Т. Айви, М. Ротстайну и Я. Шмигельски.

Список литературы

- [1] *G. Wilson.* Invent. Math. 1998. V. 133. P. 1.
- [2] *Y. Berest, G. Wilson.* Math. Ann. 2000. V. 318. № 1. P. 127; Int. Math. Res. Notices. 1999. № 2. P. 105.
- [3] *V. Ginzburg.* Math. Res. Lett. 2001. V. 8. № 3. P. 377.
- [4] *M. Rothstein.* Explicit formulas for the Airy and Bessel bispectral involutions in terms of Calogero–Moser pairs. In: The Bispectral Problem. Proc. of the CRM Workshop (Montreal, Canada, March, 1997). CRM Proc. & Lect. Notes. V. 14. Eds. J. Harnad, A. Kasman. Providence, RI: Amer. Math. Soc, 1998. P. 105.
- [5] *H. W. Braden, R. Sasaki.* Progr. Theor. Phys. 1997. V. 97. P. 1003.
- [6] *S. N. M. Ruijsenaars, H. Schneider.* Ann. Phys. 1986. V. 170. P. 370.
- [7] *A. Kasman, M. Gekhtman.* J. Math. Phys. 2001. V. 42. № 8. P. 3540.
- [8] *A. Kasman.* Regul. Chaotic Dyn. 2001. V. 6. № 2. P. 211.
- [9] *P. Iliev.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1999. V. 329. P. 877.
- [10] *Ф. В. Найкоф, О. А. Чалых.* УМН. 1999. Т. 54. С. 173.
- [11] *J. Harnad, A. Kasman (eds.).* The Bispectral Problem. Proc. of the CRM Workshop (Montreal, Canada, March, 1997). CRM Proc. & Lect. Notes. V. 14. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1998.
- [12] *M. Adler, E. Horozov, P. van Moerbeke.* Phys. Lett. A. 1998. V. 242. № 3. P. 139.
- [13] *I. Krichever, P. Wiegmann, O. Lipan, A. Zabrodin.* Commun. Math. Phys. 1997. V. 188. P. 267; *A. B. Забродин.* ТМФ. 1997. Т. 113. № 2. С. 179.
- [14] *M. Sato, Y. Sato.* Lect. Notes Numer. Appl. Anal. 1982. V. 5. P. 259.
- [15] *G. Segal, G. Wilson.* Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. 1985. V. 61. P. 5.
- [16] *A. Kasman.* Commun. Math. Phys. 1995. V. 172. P. 427.
- [17] *G. Wilson.* J. Reine Angew. Math. 1993. V. 442. P. 177.
- [18] *A. Kasman.* Acta Appl. Math. 1997. V. 49. № 2. P. 179.