Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Женье, Ж. Леон, Спектральное преобразование Захарова–Шабата на полу-
прямой, *ТМФ*, 2002, том 133, номер 2, 218–232

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf392>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 13:55:27

© 2002 г.

Ф. Жеңье*, Ж. Леон*

СПЕКТРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЗАХАРОВА–ШАБАТА НА ПОЛУПРЯМОЙ

Построена обратная спектральная задача Захарова–Шабата для потенциала с носителем на полупрямой и граничным условием в нуле. Показано, что это предписанное значение дает решение Йоста с существенной сингулярностью при больших значениях спектрального параметра, что требует, в частности, внимания при решении соответствующей граничной задачи Гильберта. Метод применяется для иллюстрации уравнения синус-Гордон (на световом конусе), которое обсуждается с помощью сингулярного предела уравнений вынужденного комбинационного рассеяния.

Ключевые слова: нелинейная эволюция, обратная задача рассеяния, граничная задача, задача Римана–Гильберта, уравнение синус-Гордон.

1. ВВЕДЕНИЕ

Распространение интегрируемости нелинейной эволюции с бесконечной прямой на конечную (или по крайней мере на полупрямую) – известная задача, которая в последнее время привлекала много внимания. Например, только недавно было показано, что система уравнений для описания *вынужденного комбинационного рассеяния* (ВКР), о которой в течение длительного времени было известно, что она обладает парой Лакса [1], также разрешима на полупрямой [2] (см. также [3]). В этом случае граничные значения приводят к образованию солитонов из начального вакуума, что может иметь интересные физические приложения.

Другой интенсивно изучаемой интегрируемой эволюцией является нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) [4], [5], разрешимость которого с помощью *обратного спектрального преобразования* (ОСП) на бесконечной прямой понимается как условие Дирихле на U-образной области $\{x \in \mathbb{R}, t = 0\} \cup \{x = \pm\infty, t > 0\}$. ОСП позволяет построить для любого t при всех x решение $q(x, t)$, которое обращается в нуль вместе со своими производными при $x \rightarrow \infty$, если это происходит в начальный момент времени. Таким образом, пара Лакса обеспечивает временную эволюцию спектрального преобразования, сохраняющую свойства, существенные для восстановления (с помощью обратной задачи) решения НУШ в некотором заданном классе функций.

*Physique Mathématique et Théorique, Université Montpellier 2, Montpellier, France

Однако на полупрямой вследствие свойств пары Лакса временная эволюция спектрального преобразования требует задания не только граничного значения при $x = 0$, но и значения производной. Следовательно, одна из важнейших задач – каким-либо образом выразить производную в терминах граничных значений; эта задача стимулировала множество интересных работ. Подробное исследование граничной задачи Дирихле дано в статьях [6], где показано, что задача определения производной превращается в задачу определения некоторых *пропущенных спектральных данных*. Другой метод, дающий подобные же результаты, но основанный на методе Гельфанда–Левитана–Марченко, был развит в работе [7] для уравнения Когтевега–де Фриза.

Интересный подход был предложен в работе [8], где оба оператора из пары Лакса рассматриваются как объединенные спектральные задачи. Применительно к НУШ этот метод дает решение в виде системы связанных интегральных уравнений. Хотя этот метод трудно использовать, он позволяет дать исчерпывающую спектральную характеристику и в некоторых случаях получить частные решения НУШ. Этот метод оказался также весьма полезным при рассмотрении линейных дифференциальных уравнений в частных производных с движущимися границами [9]; он был успешно применен к уравнению синус-Гордон на световом конусе, для которого пара Лакса совместна с граничными значениями [8], [10].

Важным инструментом во всех этих работах является спектральная задача Захарова–Шабата на полупрямой $x > 0$, где *потенциал* $q(x, t)$ имеет заданное граничное значение $q_0(t)$ при $x = 0^+$. Недавно оказалось, что соответствующую граничную задачу Гильберта, связывающую решения Йоста со спектральным преобразованием, следует решать специальным образом для того, чтобы учесть сингулярное поведение решений Йоста при больших значениях спектрального параметра. Это решение получено в работе [11] и используется в нашей работе в тех же обозначениях.

Целью настоящей работы является краткое представление решения граничной задачи Гильберта, связанной с системой Захарова–Шабата на полупрямой, и его применение к уравнению синус-Гордон на световом конусе. Мы покажем, что временная эволюция спектрального преобразования порождает бесконечное число дискретных собственных значений в комплексной плоскости, как уже было продемонстрировано в работе [6], где ставился вопрос об адекватности метода ОСП. В частности, для постоянных граничных значений *немедленно* строится бесконечный набор полюсов. Эта проблема рассматривается с помощью уравнения, описывающего ВКР, которое в определенном пределе переходит в уравнение синус-Гордон. Мы покажем, что этот предельный переход регуляризует спектральное преобразование даже в случае постоянного граничного значения, при котором полюсы возникают парами в различные последовательные моменты времени.

2. СПЕКТРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Для полноты изложения этот раздел мы посвятим основным положениям теории спектрального преобразования для оператора Захарова–Шабата на полупрямой [11] и введению определений и обозначений.

2.1. Основные решения. Время t , являющееся свободным параметром, не указывается в обозначениях на протяжении данного раздела. Рассмотрим спектральную задачу Захарова–Шабата [4] на полупрямой $x > 0$:

$$\phi_x = ik[\phi, \sigma_3] + Q(x)\phi, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & q \\ r & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

с заданными граничными значениями

$$q(x)|_{x=0+} = q_0, \quad r(x)|_{x=0+} = r_0. \quad (2.2)$$

Решения Йоста [12] можно определить как решения интегральных уравнений

$$\begin{pmatrix} \psi_{11}^+(k, x) \\ \psi_{21}^+(k, x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_0^x dy q(y) \psi_{21}^+(k, y) \\ \int_0^x dy r(y) \psi_{11}^+(k, y) e^{2ik(x-y)} \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

$$\begin{pmatrix} \phi_{12}^+(k, x) \\ \phi_{22}^+(k, x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\int_x^\infty dy q(y) \phi_{22}^+(k, y) e^{-2ik(x-y)} \\ \int_0^x dy r(y) \phi_{12}^+(k, y) \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

$$\begin{pmatrix} \phi_{11}^-(k, x) \\ \phi_{21}^-(k, x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_0^x dy q(y) \phi_{21}^-(k, y) \\ -\int_x^\infty dy r(y) \phi_{11}^-(k, y) e^{2ik(x-y)} \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

$$\begin{pmatrix} \psi_{12}^-(k, x) \\ \psi_{22}^-(k, x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_0^x dy q(y) \psi_{22}^-(k, y) e^{-2ik(x-y)} \\ \int_0^x dy r(y) \psi_{12}^-(k, y) \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Так называемое *физическое решение*

$$\Phi(k, x) = (\phi_1^-, \phi_2^+) \quad (2.7)$$

удовлетворяет условиям

$$\Phi \xrightarrow{x=0} \begin{pmatrix} 1 & \rho^+ \\ \rho^- & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} \tau^- & 0 \\ 0 & \tau^+ \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

где коэффициенты отражения $\rho^\pm(k)$ определяются из выписанных выше интегральных уравнений при $x = 0^+$, а именно

$$\rho^+ = -\int_0^\infty dx q \phi_{22}^+ e^{2ikx}, \quad \rho^- = -\int_0^\infty dx r \phi_{11}^- e^{-2ikx}, \quad (2.9)$$

а коэффициенты прохождения $\tau^\pm(k)$ – с помощью перехода к пределу при $x \rightarrow \infty$, т.е.

$$\tau^+ = 1 + \int_0^\infty dx r \phi_{12}^+, \quad \tau^- = 1 + \int_0^\infty dx q \phi_{21}^-. \quad (2.10)$$

Прямое вычисление с использованием (2.1) показывает, что определитель любого решения не зависит от x , а потому его можно вычислить при $x = 0$ или при $x \rightarrow \infty$. В применении к Φ это приводит к выражению

$$1 - \rho^+ \rho^- = \tau^+ \tau^-, \quad (2.11)$$

которое называется *унитарным соотношением*. Оставшаяся часть решения, а именно

$$\Psi(k, x) = (\psi_1^+, \psi_2^-), \quad (2.12)$$

используется для решения обратной задачи, и мы называем его *промежуточным решением*. При $k \in \mathbb{R}$ оно подчиняется условиям

$$\Psi \xrightarrow{x=0} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau^+} & \frac{-e^{-2ikx}\rho^+}{\tau^+} \\ \frac{-e^{2ikx}\rho^-}{\tau^-} & \frac{1}{\tau^-} \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Решения Φ и Ψ являются линейно зависимыми, и срачивая их значения при $x = 0^+$ (или, что эквивалентно, при $x = \infty$), мы легко получим

$$\Phi = \Psi e^{-ik\sigma_3 x} \begin{pmatrix} 1 & \rho^+ \\ \rho^- & 1 \end{pmatrix} e^{ik\sigma_3 x}. \quad (2.14)$$

Это выражение, определяющее трансфер-матрицу, можно также представить как граничную задачу Гильберта [13] на вещественной оси:

$$\begin{aligned} \psi_1^+ - \phi_1^- &= -e^{2ikx}\rho^- \psi_2^-, \\ \phi_2^+ - \psi_2^- &= e^{-2ikx}\rho^+ \psi_1^+. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Для того чтобы решить эту систему, нам необходимо знать свойства ее решений как функций комплексного параметра k .

2.2. Свойства аналитичности. Используя стандартный метод [12], получаем, что для потенциалов, достаточно быстро обращающихся в нуль при $x \rightarrow \infty$, вектор ψ_1^+ аналитичен в верхней половине k -плоскости, а вектор ψ_2^- – в нижней. Далее, вектор ϕ_2^+ представляет собой мероморфную функцию k в верхней полуплоскости с конечным числом N^+ простых полюсов k_n^+ , которые являются нулями аналитической функции $1/\tau^+(k)$. Действительно, из (2.13) имеем

$$\frac{1}{\tau^+} = 1 + \int_0^\infty q \psi_{21}^+, \quad (2.16)$$

где ψ_{21}^+ аналитична. Более того, вектор $\tilde{\phi}_2^+ = \phi_2^+/\tau^+$ можно найти из выражения (2.4) как решение уравнения

$$\begin{pmatrix} \tilde{\phi}_{12}^+(k, x) \\ \tilde{\phi}_{22}^+(k, x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_0^x dy q(y) \tilde{\phi}_{22}^+(k, y) e^{-2ik(x-y)} \\ \int_0^x dy r(y) \tilde{\phi}_{12}^+(k, y) \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

откуда видно, что $\tilde{\phi}_2^+$ аналитична по k и, следовательно, имеет полюсы там, где аналитическая функция $1/\tau^+(k)$ имеет нули.

Аналогично, функция ϕ_1^- мероморфна в нижней полуплоскости и имеет N^- полюсов k_n^- , являющихся нулями $1/\tau^-(k)$. Поэтому из определений (2.9), (2.10) функций $\tau^\pm$

и $\rho^\pm$ следует, что они допускают мероморфные продолжения в соответствующие полуплоскости $\pm \operatorname{Im}(k) > 0$, где обладают $N^\pm$ простыми полюсами $k_n^\pm$ (положения связанных состояний). В частности, мы имеем соотношение, полученное просто с помощью взятия вычетов в (2.14):

$$\operatorname{Ress}_{k_n^+} \{\phi_2^+\} = \rho_n^+ \psi_1^+(k_n^+) e^{-2ik_n^+ x}, \quad \rho_n^+ = \operatorname{Ress}_{k_n^+} \{\rho^+\}, \quad (2.18)$$

$$\operatorname{Ress}_{k_n^-} \{\phi_1^-\} = \rho_n^- \psi_2^-(k_n^-) e^{2ik_n^- x}, \quad \rho_n^- = \operatorname{Ress}_{k_n^-} \{\rho^-\}. \quad (2.19)$$

Таким образом, спектральные данные определяются множеством

$$\mathcal{S} = \{\operatorname{Im}(k) > 0, \rho^+(k); \operatorname{Im}(k) < 0, \rho^-(k)\}, \quad (2.20)$$

которое будет полным, если мы докажем, что оно позволяет восстановить потенциалы $r(x)$ и $q(x)$ при $q(0^+) = q_0$ и $r(0^+) = r_0$.

2.3. Поведение при больших k . Чтобы решить задачу Гильберта (2.15) с сингулярностями $k_n^\pm$ в комплексной плоскости, необходимо знать поведение решений при $|k| \rightarrow \infty$. Интегрируя по частям, из интегральных уравнений (2.4), (2.6) получаем следующее поведение решений (в области $\operatorname{Im}(k) \leq 0$ для векторов с индексом минус и в области $\operatorname{Im}(k) \geq 0$ для векторов с индексом плюс):

$$(\phi_1^-, \phi_2^+) = \mathbf{1} + \frac{1}{2ik} \begin{pmatrix} -\int_0^x r q & q \\ -r & \int_0^x r q \end{pmatrix} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad (2.21)$$

$$(\psi_1^+, \psi_2^-) = \mathbf{1} + \frac{1}{2ik} \begin{pmatrix} -\int_0^x r q & q - q_0 e^{-2ikx} \\ -r + r_0 e^{2ikx} & \int_0^x r q \end{pmatrix} + \dots \quad (2.22)$$

Следовательно, когда q_0 и r_0 не обращаются в нуль, промежуточное решение имеет существенную особенность на вещественной оси, которая должна воспроизводиться решением задачи Гильберта, как это было показано в работе [11]. Мы также имеем

$$\begin{aligned} \rho^+(k) &= \frac{1}{2ik} q_0 - \frac{1}{(2ik)^2} q'_0 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^3}\right), \\ \rho^-(k) &= -\frac{1}{2ik} r_0 - \frac{1}{(2ik)^2} r'_0 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^3}\right), \end{aligned} \quad (2.23)$$

где $q'_0 = q_x(0^+, t)$.

2.4. Решение задачи Гильберта. Рассмотрим множество *спектральных данных*

$$\mathcal{S} = \{\operatorname{Im}(k) \geq 0, \rho^+(k); \operatorname{Im}(k) \leq 0, \rho^-(k)\}, \quad (2.24)$$

где функция $\rho^+(k)$ ($\rho^-(k)$) непрерывна и ограничена на вещественной оси и мероморфна в верхней (нижней) полуплоскости с конечным числом простых полюсов k_n^+ (k_n^-) с

соответствующими вычетами ρ_n^+ (ρ_n^-). Кроме того, эти функции ведут себя в соответствующих полуплоскостях так, как указано в (2.23), где q_0 и r_0 – заданные числа.

Задача состоит в том, чтобы построить две матрицы $\Phi(k, x)$ и $\Psi(k, x)$ (решения задачи Гильберта (2.15)), обладающие предписанными аналитическими свойствами, поведением на границах при больших k , задаваемым уравнениями (2.21) и (2.22), и граничными значениями (2.8) и (2.13). Эта задача была решена в работе [11], и решение имеет вид

$$\begin{aligned} \phi_1^-(k, x) = & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty+i0}^{+\infty+i0} \frac{d\lambda}{\lambda-k} \rho^-(\lambda) e^{2i\lambda x} \psi_2^-(\lambda, x) - \\ & - \sum_{n=1}^{N^-} \frac{\rho_n^-}{k_n^- - k} \psi_2^-(k_n^-, x) e^{2ik_n^- x}, \quad \text{Im}(k) \leq 0, \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} \phi_2^+(k, x) = & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty-i0}^{+\infty-i0} \frac{d\lambda}{\lambda-k} \rho^+(\lambda) e^{-2i\lambda x} \psi_1^+(\lambda, x) - \\ & - \sum_{n=1}^{N^+} \frac{\rho_n^+}{k_n^+ - k} \psi_1^+(k_n^+, x) e^{-2ik_n^+ x}, \quad \text{Im}(k) \geq 0, \end{aligned} \quad (2.26)$$

где функция $\Psi(k, x)$ является решением следующей интегральной системы уравнений Коши–Грина:

$$\begin{aligned} \psi_1^+(k, x) = & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty-i0}^{+\infty-i0} \frac{d\lambda}{\lambda-k} \rho^-(\lambda) e^{2i\lambda x} \psi_2^-(\lambda, x) - \\ & - \sum_{n=1}^{N^-} \frac{\rho_n^-}{k_n^- - k} \psi_2^-(k_n^-, x) e^{2ik_n^- x}, \quad \text{Im}(k) \geq 0, \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} \psi_2^-(k, x) = & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty+i0}^{+\infty+i0} \frac{d\lambda}{\lambda-k} \rho^+(\lambda) e^{-2i\lambda x} \psi_1^+(\lambda, x) - \\ & - \sum_{n=1}^{N^+} \frac{\rho_n^+}{k_n^+ - k} \psi_1^+(k_n^+, x) e^{-2ik_n^+ x}, \quad \text{Im}(k) \leq 0. \end{aligned} \quad (2.28)$$

В отличие от того, что происходит в одномерном случае, когда $x \in (-\infty, +\infty)$, здесь интегралы берутся не по всей вещественной оси, а по контурам вдоль нее в верхней или нижней полуплоскостях, соответственно.

Тогда, подставляя (2.21) в уравнение (2.1), получаем для потенциала выражение

$$Q(x) = i[\sigma_3, \Phi^{(1)}(x)], \quad (2.29)$$

где мы учли, что $\Phi^{(1)}(x)$ обозначает коэффициент при $1/k$ в разложении решения $\Phi(k, x)$ при больших k . Другими словами, для $q(x)$ получаем выражение

$$\begin{aligned} q(x) = & -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty-i0}^{+\infty-i0} \rho^+(\lambda) \psi_{11}^+(\lambda, x) e^{-2i\lambda x} + \\ & + 2i \sum_{n=1}^{N^+} \rho_n^+ \psi_{11}^+(k_n^+, x) e^{-2ik_n^+ x}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

которое также можно записать как (ρ не имеет полюсов на вещественной оси)

$$q(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{C_+} \rho^+(\lambda) \psi_{11}^+(\lambda, x) e^{-2i\lambda x}, \quad (2.31)$$

где C_+ — гладкий контур в верхней полуплоскости, проходящий из $-\infty + i0$ в $+\infty + i0$ над всеми полюсами k_n^+ . Записанное выше выражение можно понимать как обратное к первому из уравнений (2.9), а именно

$$\rho^+(k) = - \int_0^\infty dx q(x) \phi_{22}^+(k, x) e^{2ikx}. \quad (2.32)$$

Отсюда видно, что как только предполагается t -зависимость у q , соответствующая t -зависимость возникает у спектрального преобразования ρ . Основной момент метода ОСП состоит в том, чтобы выразить эту связь (которая является почти тривиальной в случае бесконечной прямой).

2.5. Редукции. Рассмотрим частный случай эволюции, возникающий из редукции от двух потенциалов r и q к одному, происходящей в два шага. Во-первых,

$$\overline{Q} = \sigma_2 Q \sigma_2 \Leftrightarrow r = -\bar{q}, \quad (2.33)$$

откуда

$$\Psi(k, x) = \sigma_2 \overline{\Psi(\bar{k}, x)} \sigma_2. \quad (2.34)$$

Исследование их граничного поведения при $x \rightarrow \infty$ накладывает условие редукции на спектральное преобразование

$$\overline{\tau^-(\bar{k})} = \tau^+(k), \quad \overline{\rho^-(\bar{k})} = -\rho^+(k). \quad (2.35)$$

Тогда, рассматривая полюсы и вычеты, получим

$$N^+ = N^-, \quad \overline{\rho_n^-} = -\rho_n^+, \quad \overline{k_n^-} = k_n^+. \quad (2.36)$$

Ниже будем писать ρ вместо ρ^+ и k_n вместо k_n^+ .

Вторая редукция имеет вид

$$Q = \sigma_2 Q \sigma_2 \Leftrightarrow r = -q. \quad (2.37)$$

В этом случае легко доказать, что

$$\Psi(k, x) = \sigma_2 \Psi(-k, x) \sigma_2, \quad (2.38)$$

и исследование граничного поведения при $x \rightarrow \infty$ и $x \rightarrow 0$ дает следующее условие редукции на спектральное преобразование:

$$\begin{aligned} \rho^+(k, t) &= -\rho^-(-k, t), & \tau^-(-k) &= \tau^+(k), \\ N^+ &= N^-, & \rho_n^- &= -\rho_n^+. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Для уравнения синус-Гордон две приведенные выше редукции (2.33) и (2.37) выполняются вместе; это означает, что $q \in \mathbb{R}$. Как следствие, в результате прямых манипуляций с соотношениями (2.35) и (2.39) получаем следующее условие для спектрального преобразования $\rho = \rho^+$, которое возникает в дополнение к (2.39):

$$\bar{\rho}(-\bar{k}) = \rho(k). \quad (2.40)$$

В результате оказывается, что полюсы в комплексной плоскости появляются парами, а именно, если k_n является полюсом функции $\rho(k)$ с вычетом ρ_n , то $-\bar{k}_n$ также является полюсом с вычетом $-\bar{\rho}_n$, а именно

$$\text{Res}_{k_n}\{\rho(k)\} = \rho_n \Rightarrow \text{Res}_{-\bar{k}_n}\{\rho(k)\} = -\bar{\rho}_n. \quad (2.41)$$

3. ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СИНУС-ГОРДОН

3.1. Граничные значения и пара Лакса. Описанные выше средства успешно применяются к уравнению синус-Гордон на световом конусе

$$\theta_{xt} + \sin \theta = 0, \quad (3.1)$$

которое решается здесь при условиях Дирихле $\theta_0(t)$ и $\tilde{\theta}(x)$, т.е.

$$t \in [0, T]: \theta(0, t) = \theta_0(t), \quad x \in [0, \infty): \theta(x, 0) = \tilde{\theta}(x), \quad (3.2)$$

в классе функций, обращающихся в нуль (по модулю 2π) вместе со всеми производными при $x \rightarrow \infty$ для каждого значения времени t (значение T произвольно).

Найденная в работе [14] пара Лакса дается уравнением Захарова–Шабата при специальном выборе потенциалов r и q , а именно

$$\Phi_x = ik[\Phi, \sigma_3] + Q\Phi, \quad Q = -\frac{i}{2}\sigma_2\theta_x, \quad (3.3)$$

причем эволюция задается формулой

$$\Phi_t = -\frac{i}{4k}(\sigma_3 \cos \theta + \sigma_1 \sin \theta)\Phi + \Phi e^{-ik\sigma_3 x} \Omega e^{ik\sigma_3 x}. \quad (3.4)$$

Мы остановимся на том, чтобы записать эту пару Лакса для частного решения Φ , определенного в предыдущем разделе.

3.2. Эволюция спектрального преобразования. Используя поведение (2.8) в (3.4), вычислим Ω и получим временную эволюцию спектрального преобразования. В рамках редукционных соотношений (2.39) окончательно получаем

$$\Omega = -\frac{i}{4k} \begin{pmatrix} \cos \theta_0 - \rho(-k, t) \sin \theta_0 & 0 \\ 0 & -\cos \theta_0 + \rho(k, t) \sin \theta_0 \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

$$\rho_t = \frac{i}{4k} [\rho^2 \sin \theta_0 - 2\rho \cos \theta_0 - \sin \theta_0]. \quad (3.6)$$

Заметим, что условие редукции $\bar{\rho}(-\bar{k}) = \rho(k)$, которое обеспечивает вещественное значение потенциала $\theta(x, t)$, сохраняется указанной выше временной эволюцией (конечно, коль скоро $\theta_0 \in \mathbb{R}$). В сингулярной точке $k = 0$ спектральное преобразование обладает регулярным поведением [11]:

$$\rho(0, t) = \frac{\cos \theta_0 - 1}{\sin \theta_0}. \quad (3.7)$$

3.3. Пример. Для того чтобы проиллюстрировать описанный выше метод, рассмотрим явно разрешимый случай кусочно-постоянного граничного значения $\theta_0(t)$, а именно

$$\begin{aligned} t \in [0, t_1]: \quad \theta_0(t) &= 0, \\ t \in [t_j, t_{j+1}]: \quad \theta_0(t) &= \varphi_j, \\ t \in [t_n, \infty]: \quad \theta_0(t) &= 0, \end{aligned} \quad (3.8)$$

совместного с нулевым начальным условием

$$\theta(x, 0) = \tilde{\theta}(x) = 0. \quad (3.9)$$

Заметим, что такое граничное значение представляет произвольно локализованную функцию $\theta_0(t)$, приведенную к дискретному виду с помощью n -ступенчатой временной решетки (дискретизация входного импульса, имеющего гауссову форму, приведена на рис. 1).

Рис. 1

Примем обозначения

$$\begin{aligned} \rho_j(t) &= \rho(k, t) \quad \text{при } t \in [t_j, t_{j+1}], \\ \rho_j &= \rho_j(t_{j+1}) \equiv \rho(k, t_{j+1}). \end{aligned} \quad (3.10)$$

При $t \in [t_j, t_{j+1}]$ решение эволюции (3.6) можно записать в виде

$$\rho_j(t) = -\frac{b_j(\rho_{j-1} + a_j)e^{i(t-t_j)/2k} - a_j(\rho_{j-1} + b_j)}{(\rho_{j-1} + a_j)e^{i(t-t_j)/2k} - (\rho_{j-1} + b_j)}, \quad (3.11)$$

где введены определения

$$a_j = -\frac{1 + \cos \varphi_j}{\sin \varphi_j}, \quad b_j = \frac{1 - \cos \varphi_j}{\sin \varphi_j}. \quad (3.12)$$

Заметим, что в пределе $\varphi_j \rightarrow 0$ выражение (3.11) превращается в решение эволюции (3.6), где $\theta_0 = \varphi_j$ полагается равным нулю.

Поведение решения (3.11) при больших k можно получить по индукции; оно имеет вид

$$\rho_j(t) = -\frac{i}{4k} \left[(t - t_j) \sin \varphi_j + \sum_{\ell=1}^j (t_\ell - t_{\ell-1}) \sin \varphi_{\ell-1} \right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right). \quad (3.13)$$

Отсюда

$$\partial_t \rho_j(t) = -\frac{i}{4k} \sin \varphi_j + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad (3.14)$$

т.е. видно, что (3.11) демонстрирует ожидаемое поведение при больших k .

Наконец, при $\varphi_n = 0$ выражение (3.11) можно записать как

$$\rho_n(t) = -\frac{(b_n \rho_{n-1} - 1)e^{i(t-t_n)/2k} - a_n \rho_{n-1} + 1}{(\rho_{n-1} + a_n)e^{i(t-t_n)/2k} - (\rho_{n-1} + b_n)}, \quad (3.15)$$

что окончательно упрощается до

$$\rho_n(t) = \rho_{n-1} e^{i(t-t_n)/2k}. \quad (3.16)$$

Как следствие, спектральное преобразование, вычисленное после окончательного учета влияния граничного условия $\theta_0(t)$, т.е. при $t > t_n$, полностью определено соотношением $\rho_{n-1} = \rho(k, t_n)$. Эта функция от k получена как отображение

$$\begin{aligned} \rho_0 &= 0, \\ \rho_j &= -\frac{b_j(\rho_{j-1} + a_j)e^{i(t_{j+1}-t_j)/2k} - a_j(\rho_{j-1} + b_j)}{(\rho_{j-1} + a_j)e^{i(t_{j+1}-t_j)/2k} - (\rho_{j-1} + b_j)}, \quad j = 1, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Такое явное выражение дает нам возможность разобраться в том, как влияют входные данные общего положения $\theta_0(t)$ на обращающийся в нуль фон при подходящей (произвольной) дискретизации. Исследованию описанного выше отображения (в комплексной k -плоскости) будет посвящена следующая публикация, а в настоящей работе мы просто упомянем, что основной момент состоит в изучении рождения (аннигиляции) полюсов $\rho(k, t)$ в верхней k -полуплоскости.

Учитывая условие вещественности (2.41), мы видим, что полюсы $\rho(k)$ возникают парами, а полюс $k = k_n(t)$ функции $\rho_j(t)$ имеет вид

$$e^{i(t-t_j)/(2k_n)} = \frac{\rho_{j-1} + b_j}{\rho_{j-1} + a_j}, \quad (3.18)$$

Рис. 2

где ρ_{j-1} сама является функцией k_n . Для любого (гладкого и локализованного) граничного значения с достаточно большой амплитудой имеется бесконечное число таких полюсов в верхней полуплоскости.

На рис. 2 показан случай, когда временной шаг $t_{j+1} - t_j = \delta$ постоянен для всех j . Полюсы показаны в плоскости $\zeta = e^{i\delta/(2k)}$; вне единичной окружности они принадлежат верхней половине k -плоскости. При обратном преобразовании от ζ к k становится ясно, что один полюс в ζ -плоскости соответствует бесконечному счетному множеству в k -плоскости, причем точка $k = 0$ есть точка сгущения. Теория при этом теряет силу, поскольку собственная функция Йоста не непрерывна в окрестности вещественной оси. Далее мы рассмотрим этот вопрос в свете системы ВКР и ее предела – уравнения синус-Гордона.

4. ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ВКР

4.1. Граничные значения и пара Лакса. Применим формализм к системе уравнений, описывающей ВКР и записанной для огибающей импульса накачки $a(k, x, t)$, стоксова импульса $b(k, x, t)$ и возбуждения среды $q(x, t)$:

$$\begin{aligned} \partial_x a &= q b e^{2ikx}, & \partial_x b &= -\bar{q} a e^{-2ikx}, \\ \partial_t q &= - \int g(k) dk a \bar{b} e^{-2ikx}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $g(k)$ определяет взаимодействие (связанное с комбинационным усилением), а параметр k является волновым числом невязки вследствие дисперсии групповой скорости [2]. Пара Лакса для уравнений ВКР была выписана в статье [1] для случая $g(k) = \delta(k - k_0)$, а в работах [15] регуляризована с помощью параметра k , физический смысл которого был установлен авторами [2].

Условия Дирихле предписаны на прямой $x = 0$, $t > 0$:

$$a(k, x, t)|_{x=0} = A(t), \quad b(k, x, t)|_{x=0} = B(t), \quad (4.2)$$

и на прямой $x > 0$, $t = 0$:

$$q(x, t)|_{t=0} = Q(x). \quad (4.3)$$

Предполагается, что заданное начальное значение $Q(x)$ имеет шварцевский тип (убывает при больших x вместе со всеми своими производными быстрее, чем любой полином).

Временная зависимость спектральных данных возникает за счет требования, чтобы решение уравнения Захарова–Шабата $\mu^+ = (\psi_1^+, \phi_2^+)$ при $k \in \mathbb{R}$ было также решением уравнения

$$\begin{aligned} \mu_t^+ &= V^+ \mu^+ + \mu^+ e^{-ik\sigma_3 x} \Omega^+ e^{ik\sigma_3 x}, \\ V^+ &= \frac{1}{4i} \int \frac{g(\lambda) d\lambda}{\lambda - (k + i0)} \begin{pmatrix} |a|^2 - |b|^2 & 2\bar{a}b e^{-2i\lambda x} \\ 2\bar{a}b e^{2i\lambda x} & |b|^2 - |a|^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Заметим, что поскольку матрица $V(k, x, t)$ разрывна, когда k пересекает вещественную ось, мы должны записывать временную эволюцию в заданной полуплоскости. Аналогичное уравнение можно было бы записать для $\mu^- = (\phi_1^-, \psi_2^-)$ с V^- и Ω^- , однако это излишне вследствие симметрии редукции. Совместность двух операторов (2.1) и (2.4) с условием $\Omega_x = 0$ приводит к уравнению (4.1) в рамках редукции (2.33).

4.2. Эволюция спектрального преобразования. Свободный элемент $\Omega^+ = \Omega^+(k, t)$ является дисперсионным соотношением [15], поскольку в случае бесконечной прямой он совпадает с законом дисперсии линеаризованной эволюции. Дифференциальное уравнение (4.4) вычисляется при $x = 0$ и $x \rightarrow \infty$, откуда получается восемь уравнений для четырех компонент Ω^+ и четыре эволюционных уравнения для ρ , τ и сопряженных им величин (эти эволюции совместны, как это в действительности следует из редукции). Мы получаем

$$\Omega^+(k, t) = -\frac{i}{4} \mathcal{I}(k) \left[2\rho(k, t) \bar{A}B\sigma_3 + \begin{pmatrix} |A|^2 - |B|^2 & 0 \\ 2\bar{A}B & -|A|^2 + |B|^2 \end{pmatrix} \right], \quad (4.5)$$

где мы определили $\mathcal{I}(k)$ как

$$\mathcal{I}(k) = \int \frac{g(\lambda) d\lambda}{\lambda - k}, \quad \text{Im}(k) > 0 \quad (4.6)$$

(заметим, что дисперсионное соотношение зависит от самого спектрального преобразования) и эволюцию в соответствии с уравнением Риккати

$$\rho_t = \frac{i}{2} \mathcal{I}(k) [\bar{A}B\rho^2 - (|A|^2 - |B|^2)\rho - A\bar{B}]. \quad (4.7)$$

В работе [11] было показано, что указанная эволюция сохраняет разложение $\rho(k, 0)$ при больших k .

4.3. Уравнение синус-Гордон в пределе. Уравнение синус-Гордон получается из системы ВКР (4.1), во-первых, когда распределение $g(k)$ переходит в распределение Дирака, а именно

$$g(k) = -\delta(k), \quad (4.8)$$

а во-вторых, когда граничные значения вещественны и нормированы, т.е.

$$A, B, Q \in \mathbb{R}, \quad A^2 + B^2 = 1. \quad (4.9)$$

Заметим, что из закона сохранения $\partial_x(|a|^2 + |b|^2) = 0$ следует, что записанная выше нормировка не накладывает ограничений. Тогда непосредственно из (4.1) легко показать, что с течением времени поля остаются вещественнозначными. Окончательно отображение на уравнение синус-Гордон достигается, если положить

$$a = \cos \frac{\theta}{2}, \quad b = \sin \frac{\theta}{2}, \quad (4.10)$$

с помощью чего (4.1) отображается в

$$\theta_{xt} + \sin \theta = 0, \quad q = -\frac{1}{2}\theta_x. \quad (4.11)$$

Тогда граничные значения оказываются связанными с помощью соотношений

$$A = \cos \frac{\theta_0}{2}, \quad B = \sin \frac{\theta_0}{2}, \quad (4.12)$$

и эволюция спектрального преобразования (4.7) отображается точно в эволюцию (3.6). Действительно, если выбрать $g(k)$ в виде дельта-функции (4.8), то интеграл принимает вид $\mathcal{I}(k) = 1/k$.

Теперь можно использовать эту эквивалентность для рассмотрения уравнения синус-Гордон как *предела*, выбрав

$$g(k) = -\frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{k^2 + \epsilon^2} \quad (4.13)$$

при $\epsilon > 0$. Тогда, поскольку интеграл $\mathcal{I}(k)$ записан для $\text{Im}(k) > 0$, мы можем использовать контурное интегрирование в нижней полуплоскости и в результате получить

$$\mathcal{I}(k) = \frac{1}{k + i\epsilon}. \quad (4.14)$$

Следовательно, временная эволюция спектрального преобразования с граничными значениями (4.12) имеет вид

$$\rho_t = \frac{i}{4(k + i\epsilon)} [\rho^2 \sin \theta_0 - 2\rho \cos \theta_0 - \sin \theta_0]. \quad (4.15)$$

Переход к пределу при $\epsilon \rightarrow 0^+$ дает уравнение синус-Гордон, а приведенная выше эволюция – регуляризацию спектрального преобразования.

4.4. Применение. Сказанное выше можно проиллюстрировать на простом, но представительном примере, когда θ_0 является одноступенчатой функцией:

$$\theta_0(t) = 0, \quad t \in [0, t_1]; \quad \theta_0(t) = \varphi_1, \quad t > t_1, \quad (4.16)$$

а среда исходно находится в состоянии покоя, т.е. $\theta(x, 0) = 0$, что с точки зрения спектрального преобразования означает $\rho(k, 0) = 0$. Из результатов предыдущего раздела следует, что решение $\rho(k, t)$ имеет вид

$$\rho(k, t) = (1 - \cos \varphi_1) \left[1 - e^{i(t-t_1)(2(k+i\epsilon))} \right] \left[e^{i(t-t_1)(2(k+i\epsilon))} + \frac{1 - \cos \varphi_1}{1 + \cos \varphi_1} \right]^{-1}. \quad (4.17)$$

Отсюда полюсы $k_n(t) = \zeta_n + i\eta_n$ функции ρ являются решениями уравнения

$$\zeta_n = 2(n+1) \frac{\pi}{\alpha} (\eta_n + \epsilon), \quad \eta_n = \frac{\alpha(t-t_1)}{\alpha^2 + 4(n+1)^2 \pi^2} - \epsilon, \quad (4.18)$$

где предполагается, что $\varphi_1 \in [0, \pi]$ и $\alpha = \ln(1 - \cos \varphi_1) - \ln(1 + \cos \varphi_1)$. Заметим, что эти полюсы появляются парами $\{k_n, k_m = -\bar{k}_n\}$, поскольку

$$m = -n - 2 \Rightarrow \{\eta_m = \eta_n, \zeta_m = -\zeta_n\}. \quad (4.19)$$

Постоянная ϵ регуляризует спектральное преобразование следующим образом. В начальный момент времени $t = t_1$ все полюсы лежат в существенной сингулярности $-i\epsilon$, которая принадлежала бы вещественной оси в случае уравнения синус-Гордон, когда $\epsilon = 0$. Если $\varphi_1 < \pi/2$, то все полюсы остаются в нижней полуплоскости и спектральное преобразование не имеет дискретной части. Однако если $\varphi_1 > \pi/2$, то по прошествии времени полюсы перемещаются из точки $-i\epsilon$ и пересекают вещественную ось (парами) в *последовательные* моменты времени

$$T_n = t_1 + \frac{\epsilon}{\alpha} [\alpha^2 + 4(n+1)^2 \pi^2]. \quad (4.20)$$

Отсюда следует, что при $\epsilon = 0$ все полюсы (бесконечное число) должны пересечь вещественную ось в *один и тот же момент времени* t_1 .

Одним из остающихся открытыми вопросов является отождествление бризера в самом решении $\theta(x, t)$. Проблема в том, что в отличие от случая бесконечной прямой, спектр не может содержать только дискретную часть и, следовательно, нельзя явно восстановить решение из спектра. Этот вопрос возникает в случае общего положения для задач с граничными значениями.

Благодарности. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке INTAS (грант № 99-1782).

Список литературы

- [1] *F. Y. F. Chu, A. C. Scott.* Phys. Rev. A. 1975. V. 12. P. 2060.
- [2] *J. Leon, A. V. Mikhailov.* Phys. Lett. A. 1999. V. 253. P. 33.
- [3] *M. Boiti, J.-G. Caputo, J. Leon, F. Pempinelli.* Inverse Problems. 2000. V. 16. P. 303.
- [4] *В. Е. Захаров, А. Б. Шабат.* ЖЭТФ. 1971. Т. 61. С. 118.
- [5] *M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, H. Segur.* Stud. Appl. Math. 1974. V. 53. P. 249.
- [6] *A. S. Fokas, A. R. Its.* Phys. Rev. Lett. 1992. V. 68. P. 3117; SIAM J. Math. Anal. 1996. V. 27. P. 738.
- [7] *P. C. Sabatier.* J. Math. Phys. 2000. V. 41. P. 414.
- [8] *A. S. Fokas.* Proc. Roy. Soc. London. A. 1997. V. 453. P. 1411; J. Math. Phys. 2000. V. 41. P. 4188.
- [9] *A. S. Fokas, B. Pelloni.* Proc. Roy. Soc. London. A. 1998. V. 454. P. 645; Phys. Rev. Lett. 2000. V. 84. P. 4785.
- [10] *B. Pelloni.* Comm. Appl. Anal. 2002. V. 6. P. 179.
- [11] *J. Leon, A. Spire.* J. Phys. A. 2001. V. 34. P. 7359.
- [12] *Б. М. Левитан, И. С. Саргсян.* Введение в спектральную теорию. Самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1970; *I. D. Plev, E. Kh. Khristov, K. P. Kirchev.* Spectral methods in soliton equations. Harlow, UK: Pitman monographs, Longman, 1994.
- [13] *Н. И. Мустелишвили.* Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике. М.: Наука, 1970.
- [14] *M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, H. Segur.* Phys. Rev. Lett. 1973. V. 30. P. 1262; *Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев.* ТМФ. 1974. Т. 21. № 2. С. 160.
- [15] *J. Leon.* J. Math. Phys. 1994. V. 35. P. 3054; Phys. Rev. A. 1993. V. 47. P. 3264; Phys. Lett. A. 1992. V. 170. P. 283.