Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Эрнандес Эредеро, Интегрируемые квазилинейные уравнения, *ТМФ*, 2002, том 133, номер 2, 233–246

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf393>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 16:58:31

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Развита схема, позволяющая классифицировать интегрируемые скалярные эволюционные уравнения третьего порядка с использованием симметричного подхода к интегрируемости. Эта схема применена к исследованию квазилинейных уравнений специального вида, что позволило доказать, что некоторые из этих уравнений, которые, как ожидалось, должны быть интегрируемы, могут быть сведены к хорошо известным уравнениям Кортевега–де Фриза и Кричевера–Новикова с помощью дифференциальных подстановок типа Миуры.

Ключевые слова: классификация интегрируемых дифференциальных уравнений, формальный симметричный подход, дифференциальные подстановки.

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема идентифицирования и классификации интегрируемых уравнений вида

$$w_t = F(t, x, w, w_x, w_{xx}, w_{xxx}) \quad (1)$$

с использованием так называемого *симметричного подхода* представляет собой классическую задачу, возникающую при исследовании свойств интегрируемости. В рамках этой задачи было получено множество частных и разрозненных результатов [1]–[6]. Вычислительная сложность задачи приводит к тому, что до сих пор имеются многочисленные пробелы в классификации и многие предположения остаются недоказанными. Тем не менее современная компьютерная техника и разработанные пакеты программ позволяют выйти на такой уровень вычислений, который дает возможность заполнить указанные пробелы.

Главное предположение в предыдущих исследованиях состояло в том, что все интегрируемые уравнения из семейства (1) могут быть приведены либо с помощью классического (точечного или контактного) преобразования, либо в результате более сложной дифференциальной подстановки (типа преобразования Миуры или преобразования Коля–Хопфа [7], см. ниже (23)) к одному из трех фундаментальных интегрируемых уравнений:

*Departamento de Física Teórica II, Facultad de Ciencias Físicas, Universidad Complutense de Madrid, Madrid, Spain. E-mail: rafahh@fis.ucm.es

$$w_t = w_{xxx} + \alpha(x)w_x + \beta(x)w, \quad (2)$$

$$w_t = w_{xxx} + ww_x, \quad (3)$$

$$w_t = w_{xxx} - \frac{3}{2}w_x^{-1}w_{xx}^2 + (4w^3 + g_1w + g_2)w_x^{-1} + cw_x, \quad (4)$$

т.е. или к линейному уравнению, или к уравнению Кортевега–де Фриза (КдФ), или к уравнению Кричевера–Новикова (КН).

Общее утверждение симметричного подхода к интегрируемости [5], [8]–[10] состоит в том, что любое интегрируемое уравнение допускает последовательность так называемых канонических локальных законов сохранения

$$(\rho_i)_t = (\sigma_i)_x, \quad i = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Канонические плотности ρ_i могут быть явно записаны в терминах величин в правой части уравнения (1) и в терминах потоков σ_j , $j = 1, \dots, i-1$ (механизм получения таких формул подробно описан в работе [4]). Система уравнений (5) при этом превращается в набор условий интегрируемости для семейства уравнений (1). Неизвестная, которую надо найти, – это функция F , которая, будучи найдена, порождает полный набор интегрируемых уравнений из семейства (1). Система уравнений (5) столь переопределена, что уже наложение нескольких первых условий интегрируемости обычно оказывается достаточным для нахождения всех интегрируемых случаев.

В данной работе получены следующие результаты. Во-первых, получила дальнейшее развитие предварительная классификация из работы [2] и получена классификационная схема, пригодная для проведения окончательной подклассификации подсемейств уравнения (1). Во-вторых, в качестве примера приложения этой схемы продемонстрировано ее применение к подсемейству квазилинейных уравнений, исследование которых было намечено в работе [4]. При этом получены новые результаты относительно преобразований между уравнениями. Показано, что два уравнения (названные в разделе 4 уравнениями 3В1-2 и 3В1-4), обнаруженные в работе [4], связаны соответственно с уравнениями (3) и (4), а потому оказываются интегрируемыми.

Настоящая работа лежит в русле исследований интегрируемых уравнений с помощью симметричного подхода, выполняемых многочисленным сообществом исследователей [2]–[5], [9], [10].

2. ПОЛНАЯ ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ

В этом разделе мы расширяем предварительную классификацию, введенную в работе [2], в которой уравнения (1) переписываются через так называемые *нестандартные* динамические переменные [11]. Зададим новую динамическую переменную

$$u = \left(\frac{\partial H}{\partial w_{xxx}} \right)^{-1/3} \quad (6)$$

и введем также дополнительные динамические переменные $v_1 = w$, $v_2 = w_x$, $\dots$, $v_n = \partial^{n-1}w/\partial x^{n-1}$. Здесь $n = 0, 1, 2$ или 3 в зависимости от того, каков порядок старшей

производной функции w , явно входящей в определение функции u . Если $n < 3$, то уравнение (1) оказывается квазилинейным. Для квазилинейных уравнений вида

$$w_t = \alpha(x, w)w_{xxx} + \beta(x, w, w_x, w_{xx}) \quad (7)$$

имеем $n = 0$, так что $u = w$, а переменные v_i отсутствуют. В случаях $n = 1, n = 2$ уравнение (1) может быть сведено к соответствующему виду:

$$w_t = \alpha(x, w, w_x)w_{xxx} + \beta(x, w, w_x, w_{xx}), \quad (8)$$

$$w_t = \alpha(x, w, w_x, w_{xx})w_{xxx} + \beta(x, w, w_x, w_{xx}). \quad (9)$$

Для уравнений вида

$$w_t = \alpha(x)w_{xxx} + \beta(x, w, w_x, w_{xx}) \quad (10)$$

функция u зависит только от x и не задает правильную динамическую переменную. Уравнения типа (10) будут сводиться к уравнениям типа (8) с помощью преобразования $\bar{x} = w, \bar{w} = x$. Наконец, уравнение (1) становится полностью нелинейным в случае, когда $n = 3$.

Обозначив $\mathbf{v} = (v, v_1, \dots, v_n)$, можно записать каждое уравнение (1) (в нестандартных переменных $\mathbf{v}$, $\partial^i u / \partial x^i$) в виде системы

$$\mathbf{v}_x = (\mathbf{v}, u), \quad \mathbf{v}_t = \mathbf{G}(\mathbf{v}, u, u_x, u_{xx}), \quad u_t = F(\mathbf{v}, u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}). \quad (11)$$

Первые условия интегрируемости (5) в нестандартных переменных были найдены в работе [11]:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= u, \quad \rho_2 = u^3 \frac{\partial F}{\partial u_{xx}}, \\ \rho_3 &= \left(2u^{-2}u_x + u^2 \frac{\partial F}{\partial u_{xx}} \right)_x + u^{-3}u_x^2 + \frac{1}{3}u^5 \left(\frac{\partial F}{\partial u_{xx}} \right)^2 + uu_x \frac{\partial F}{\partial u_{xx}} - u^2 \frac{\partial F}{\partial u_x} + u\sigma_1, \\ \rho_4 &= -\frac{1}{3}u_{xx} \frac{\partial F}{\partial u_{xx}} - u_x \frac{\partial F}{\partial u_x} + u \frac{\partial F}{\partial u} + u^{-1}u_x^2 \frac{\partial F}{\partial u_{xx}} - \frac{1}{3}u^4 \frac{\partial F}{\partial u_x} \frac{\partial F}{\partial u_{xx}} + \\ &\quad + \frac{1}{3}u^3 u_x \left(\frac{\partial F}{\partial u_{xx}} \right)^2 + \frac{2}{27}u^7 \left(\frac{\partial F}{\partial u_{xx}} \right)^3 + \frac{1}{3}u\sigma_2, \\ \rho_5 &= u\sigma_3 - \rho_3\sigma_1 - 3 \frac{\partial \Phi}{\partial u}(F). \end{aligned}$$

Вводя обозначение $u_i = \partial^i u / \partial x^i$, можно переписать все уравнения (11), (частично) удовлетворяющие первым трем условиям, в виде следующей системы уравнений [2]:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_x &= \Phi(\mathbf{v}), \\ \mathbf{v}_t &= \left(\frac{u_2}{u^3} - \frac{3}{2} \frac{u_1^2}{u^4} - \frac{3}{4} P^{-1} \frac{\partial P}{\partial u} \frac{u_1^2}{u^3} - \frac{3}{2} P^{-1} \Phi(P) \frac{u_1}{u^3} + E \frac{u_1}{u^3} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial u} - \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{u_1^2}{u^3} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} - \frac{u_1}{u^3} \left[\Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right] + \mathbf{r}(\mathbf{v}, u), \\ u_t &= D_x \left(\frac{u_2}{u^3} - \frac{3}{2} \frac{u_1^2}{u^4} - \frac{3}{4} P^{-1} \frac{\partial P}{\partial u} \frac{u_1^2}{u^3} - \frac{3}{2} P^{-1} \Phi(P) \frac{u_1}{u^3} + E \frac{u_1}{u^3} + q(\mathbf{v}, u) \right), \end{aligned} \quad (12)$$

условия совместности которой имеют вид

$$\frac{\partial^3 \Phi}{\partial u^3} + \frac{3}{2} P^{-1} \frac{\partial P}{\partial u} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} = 0, \quad (13)$$

$$\left[\Phi, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} \right] + \left(\frac{1}{2} P^{-1} \frac{\partial P}{\partial u} - \frac{1}{u} \right) \left[\Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right] + \left(P^{-1} \frac{\partial P}{\partial u} - \frac{2}{3} E \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} = 0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \frac{\partial q}{\partial u} \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \frac{1}{u^3} \left[\Phi, \left[\Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right] \right] + \frac{3}{2u^3} \left(P^{-1} \frac{\partial P}{\partial u} - \frac{2}{3} E \right) \left[\Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right], \quad (15)$$

$$[\Phi, \mathbf{r}] - \Phi(q) \frac{\partial \Phi}{\partial u} = 0. \quad (16)$$

При исследовании уравнений совместности, следуя работе [2], можно обнаружить несколько семейств интегрируемых уравнений. В первую очередь, получим три типа уравнений общего вида ($\Phi_2 \neq 0$)

$$\Phi = u^2 \Phi_2(\mathbf{v}) + \Phi_0(\mathbf{v}), \quad P = 1, \quad E = 0, \quad (17)$$

$$\Phi = S^{1/2} \Phi_2(\mathbf{v}) + \Phi_0(\mathbf{v}), \quad S = P^{1/2}, \quad P = \alpha(\mathbf{v})u^2 - 1, \quad E = 0, \quad (18)$$

$$\Phi = u \Phi_1(\mathbf{v}) + \Phi_0(\mathbf{v}), \quad [\Phi_1, \Phi_0] \neq 0, \quad P = \alpha(\mathbf{v})u^2, \quad E = E(\mathbf{v}), \quad (19)$$

в которых величина n может принимать значения 0, 1, 2 или 3. Кроме того, можно найти несколько уравнений специального вида (с ограничениями на n), которые с точностью до локальных преобразований эквивалентности могут быть приведены к следующим трем уравнениям:

$$\Phi = \frac{\partial}{\partial x}, \quad u = w, \quad \mathbf{v} = x, \quad (20)$$

$$P = \alpha(x)u^2 + \beta(x)u + \gamma, \quad E = E(x, u), \quad \gamma E = 0;$$

$$\Phi = \frac{1}{\theta(x)u} \Phi_2 + u \Phi_1 + \Phi_0, \quad [\Phi_2, \Phi_1] = -\frac{2}{3} \varepsilon(x) \Phi_2, \quad (21)$$

$$[\Phi_2, \Phi_0] = \frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \Phi_2, \quad P = \theta^2 u^2, \quad E = \varepsilon(x)u;$$

$$\Phi = \frac{1}{\theta(x)u - 1} \Phi_2 + u \Phi_1 + \Phi_0, \quad [\Phi_2, \Phi_0] = \frac{1}{2\theta} [\Phi_1, \Phi_0] + \frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \Phi_2, \quad (22)$$

$$[\Phi_2, \Phi_0] = -\frac{1}{2} [\Phi_1, \Phi_0], \quad P = (\theta u - 1)^2, \quad E = 0.$$

Здесь $\Phi_2 = a(x, w) \partial / \partial w$, $\Phi_1 = b(x, w) \partial / \partial w$, $\Phi_0 = \partial / \partial x + c(x, w) \partial / \partial w$ и $n = 1$, за исключением уравнения (20), где $n = 0$.

Уравнение (11) может быть классифицировано в зависимости от того, принадлежит ли оно к общему типу (тип 1, 2 или 3) или является уравнением необщего типа. Кроме того, будем называть уравнение принадлежащим классу 0, если это уравнение вида (10), и классу 1, 2, 3 или 4, если n равно соответственно 0, 1, 2 или 3 (при этом оно будет или уравнением некоторого уровня квазилинейности, или полностью нелинейным).

2.1. Эквивалентность и дифференциальные подстановки. Важной концепцией указанной классификации является эквивалентность уравнений. Предполагается, что соотношения эквивалентности суть классические преобразования, т.е. точечные или контактные преобразования $\bar{x} = \phi(x, w, w_x)$, $\bar{w} = \psi(x, w, w_x)$, в которых $D_x(\phi)\partial\psi/\partial w_x = D_x(\psi)\partial\phi/\partial w_x$. Такое понятие эквивалентности автоматически продолжается на множество нестандартных переменных, так как переход от стандартных переменных к нестандартным представляет собой обратимое преобразование. Также используются и более общие *дифференциальные подстановки*

$$\bar{x} = \phi(x, w, w_x, w_{xx}, \dots), \quad \bar{w} = \psi(x, w, w_x, w_{xx}, \dots), \quad (23)$$

которые могут связывать различные интегрируемые уравнения, хотя и с помощью необратимых преобразований. Само по себе существование дифференциальной подстановки, связывающей два уравнения, нетривиально, так как такая подстановка может рассматриваться как ограниченный тип преобразований Беклунда. Например, в п. 3.2 рассматриваются дифференциальные подстановки, существующие в случае, если уравнение допускает классическую симметрию группы Ли. Исчерпывающая информация о дифференциальных подстановках может быть найдена в работах [7], [12].

2.2. Две схемы классификации. Классы уравнений, описанные выше, не обязательно контактно-инвариантны. Например, полностью нелинейные уравнения образуют класс 4 ($n = 3$), который контактно-инвариантен, и, более того, каждое уравнение типа 1, 2 или 3 из класса 4 также контактно-инвариантно. Тем не менее некоторые семейства квазилинейных уравнений могут быть связаны между собой с помощью контактных преобразований. Известно, что всякое уравнение из классов 0, 1 или 2 может быть преобразовано в уравнение из класса 3. Более того, уравнения класса 3 и типа 2 всегда могут быть преобразованы в уравнения класса 3 и типа 1. Поэтому достаточно распределить уравнения (1) на подсемейства в соответствии с первой схемой, представленной в табл. 1. Эта схема, предложенная в работе [2], хорошо работает в случае, когда имеются мощные вычислительные машины и методы, поскольку вычисление уравнений класса 3 и типа 3 может быть очень трудоемким. Другой подход, описанный в работе [4], состоит в том, чтобы разбить уравнения из этого последнего семейства на несколько подсемейств. Любое уравнение класса 3 и типа 3 с помощью контактного преобразования можно превратить в квазилинейные уравнения класса 0, 1 или 2 вида

$$w_t = \frac{w_{xxx}}{u(x, w, w_x)^3} + H(x, w, w_x, w_{xx}),$$

который инвариантен относительно точечных преобразований $\bar{x} = \phi(x, w)$, $\bar{w} = \psi(x, w)$. Если $\partial^2 u / \partial w_1^2 = 0$, то в зависимости от того, представляет ли собой функция u полную производную или не является таковой, получаются два семейства уравнений:

$$w_t = w_{xxx} + H(x, w, w_x, w_{xx}), \quad (24)$$

$$w_t = D_x \left(\frac{w_{xx}}{w^3} + H(x, w, w_x) \right). \quad (25)$$

Уравнения (24) добавляют в схему новую ячейку, отвечающую уравнениям класса 0 необщего вида, в то время как уравнения (25) отвечают уравнениям необщего вида уравнения типа (20). Если $\partial^2 u / \partial w_1^2 \neq 0$, то можно использовать точечные преобразования,

для того чтобы ограничить поиск новых уравнений на класс 2 и тип 1 или на необщие типы уравнений (21), (22). Получающаяся при этом схема представлена в правой части табл. 1.

ТАБЛИЦА 1

Семейства интегрируемых уравнений

	тип 1	тип 2	тип 3	необщие		тип 1	тип 2	тип 3	необщие
класс 0					класс 0				
класс 1					класс 1				
класс 2					класс 2				
класс 3					класс 3				
класс 4					класс 4				

Квазилинейные интегрируемые уравнения были перечислены в работе [4]. В следующем разделе будут найдены некоторые явные формулы для уравнений типа 1 и класса 3 и рассмотрение работы [4] будет дополнено анализом преобразований, которые связывают между собой некоторые из этих уравнений. Это подсемейство уравнений появляется в обеих классификационных схемах.

3. УРАВНЕНИЯ ТИПА 1

Хорошей отправной точкой для построения полной классификации уравнений вида (1) в соответствии с правой схемой в табл. 1 может послужить исследование общего уравнения типа 1 (уравнение (17)). Из формул (17) и (12) следует, что исследуемые уравнения имеют вид

$$u_t = D_x \left(\frac{u_2}{u^3} - \frac{3}{2} \frac{u_1^2}{u^4} + q(\mathbf{v}, u) \right), \quad (26)$$

$$D_x \mathbf{v} = u^2 \Phi_2(\mathbf{v}) + \Phi_0(\mathbf{v}), \quad (27)$$

$$\mathbf{v}_t = \left(2 \frac{u_2}{u^2} - 4 \frac{u_1^2}{u^3} \right) \Phi_2 + 2 \frac{u_1}{u^2} [\Phi_2, \Phi_0] + \mathbf{r}(\mathbf{v}, u). \quad (28)$$

При этом выполняется второе условие интегрируемости, которое принимает вид $\rho_2 = D_x(-6 \ln u)$. Третья каноническая плотность при этом равна

$$\rho_3 = D \left(3 \frac{u_1}{u^2} \right) + \frac{3}{2} \frac{u_1^2}{u^3} + \beta(\mathbf{v}, u), \quad \beta(\mathbf{v}, u) = qu - q_u u^2,$$

в то время как четвертая каноническая плотность представляет собой $\rho_4 \sim 2 \Phi_2(q) u^2$ (где символ $\sim$ означает равенство с точностью до полной x -производной). Можно проверить, что

$$(\rho_3)_t \sim \frac{1}{2} (3q + \beta_u)_{uu} \frac{u_1^3}{u^3} + \left(\frac{1}{2} \Phi_2(3q + \beta_u) \frac{1}{u^2} + \frac{3}{2} \Phi_2(3q_u + \beta_{uu}) \frac{1}{u} - \right. \\ \left. - \frac{3}{2} \Phi_0(3q + \beta_u) \frac{1}{u^4} + \frac{3}{2} \Phi_0(3q_u + \beta_{uu}) \frac{1}{u^3} - 2 \Phi_2(\beta_u) \frac{1}{u^2} \right) u_1^2 + \kappa(\mathbf{v}, u). \quad (29)$$

Коэффициенты при членах u_1^3, u_1^2 в формуле (29) вместе с условиями совместности (16) позволяют еще более сузить класс возможных представлений для функций $q(\mathbf{v}, u)$ и $\mathbf{r}(\mathbf{v}, u)$, так что все интегрируемые уравнения типа 1 должны иметь вид

$$u_t = D_x \left(\frac{u_2}{u^3} - \frac{3}{2} \frac{u_1^2}{u^4} + \frac{Q(\mathbf{v})}{u^2} + T(\mathbf{v}) + l(\mathbf{v})u^2 + m(\mathbf{v})u \right), \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_t = & \left(2 \frac{u_2}{u^2} - 4 \frac{u_1^2}{u^3} \right) \Phi_2 + 2 \frac{u_1}{u^2} [\Phi_2, \Phi_0] + \left(4 \frac{Q(\mathbf{v})}{u} + m(\mathbf{v})u^2 + \frac{4}{3} l(\mathbf{v})u^3 \right) \Phi_2 + \\ & + 2 [\Phi_0, [\Phi_2, \Phi_0]] \frac{1}{u} - 2 [\Phi_2, [\Phi_2, \Phi_0]] u + \mathbf{s}(\mathbf{v}), \end{aligned} \quad (31)$$

где

$$\Phi_2(l) = 0, \quad (32)$$

$$\Phi_0(T) - \Phi_2(Q) = 0, \quad (33)$$

$$\Phi_2(m) = 0. \quad (34)$$

Из формулы (16) следует, что еще имеются условия совместности

$$[\Phi_2, [\Phi_2, [\Phi_2, \Phi_0]]] + \frac{2}{3} l [\Phi_2, \Phi_0] + \left(\Phi_2(T) + \frac{1}{3} \Phi_0(l) \right) \Phi_2 = 0, \quad (35)$$

$$[\Phi_0, [\Phi_0, [\Phi_2, \Phi_0]]] - 2Q[\Phi_2, \Phi_0] + \Phi_0(Q)\Phi_2 = 0, \quad (36)$$

$$[\Phi_2, \mathbf{s}] - m[\Phi_2, \Phi_0] - \Phi_0(m)\Phi_2 = 0, \quad (37)$$

$$[\Phi_0, \mathbf{s}] = 0. \quad (38)$$

Условие интегрируемости (29) все еще не выполнено. Необходимыми и достаточными условиями интегрируемости будут в данном случае условия

$$0 = \Phi_2 \Phi_2 \Phi_2(T) - 3\Phi_2 \Phi_2 \Phi_0(l) + \frac{8}{3} \Phi_2(T)l, \quad (39)$$

$$0 = 15\Phi_0 \Phi_2 \Phi_0(Q) - 10\Phi_0 \Phi_0 \Phi_2(Q) - 6\Phi_2 \Phi_0 \Phi_0(Q) + 8\Phi_2(Q)Q, \quad (40)$$

$$\Phi_2(E) = \Phi_0 \Phi_2 \Phi_2(T) + \Phi_0 \Phi_2 \Phi_0(l), \quad (41)$$

$$\Phi_0(E) = 2\Phi_0 \Phi_0 \Phi_2(T) + \Phi_2 \Phi_2 \Phi_0(Q) - 2\Phi_2 \Phi_0 \Phi_2(Q) + \frac{2}{3} \Phi_0 \Phi_0 \Phi_0(l), \quad (42)$$

$$\mathbf{s}(l) = -3\Phi_2 \Phi_2 \Phi_0(m) - 2\Phi_0(m)l + m\Phi_0(l), \quad (43)$$

$$\mathbf{s}(T) = 3\Phi_0 \Phi_2 \Phi_0(m) - 3\Phi_2 \Phi_0 \Phi_0(m) + m\Phi_2(Q), \quad (44)$$

$$\mathbf{s}(Q) = -\Phi_0 \Phi_0 \Phi_0(m) + \Phi_0(Q)m + 2Q\Phi_0(m), \quad (45)$$

где $E = E(\mathbf{v}, u)$ представляет собой функцию

$$E(\mathbf{v}, u) = \frac{5}{3} \Phi_0 \Phi_0(l) + \frac{7}{3} \Phi_0 \Phi_2(T) + \frac{4}{3} \Phi_2 \Phi_0(T) + \frac{1}{6} T^2 - lQ.$$

Вышеприведенные условия интегрируемости достаточны, чтобы можно было применить нашу классификацию. Для некоторого простого уравнения (класса 0) условие, связанное с величиной ρ_5 , оказывается необходимым.

3.1. Классические симметрии. “Хвосты” уравнений (30), (31), т.е. члены, зависящие от $m(\mathbf{v})$ и $s(\mathbf{v})$, суть классические симметрии уравнений (30), (31). Эти симметрии могут быть представлены в виде

$$u_t = D_x(m(\mathbf{v})u), \quad v_t = m(\mathbf{v})u^2\Phi_2 + s(\mathbf{v}). \quad (46)$$

Тем самым, если $m(\mathbf{v})$ и $s(\mathbf{v})$ удовлетворяют условиям совместности (37), (38) и условию (34), то (46) представляет собой классическую симметрию, и наоборот. Условия (43)–(45) позволяют найти классические симметрии интегрируемых уравнений.

3.2. Дифференциальные подстановки для уравнения КдФ. Покажем теперь, как найти дифференциальные подстановки, которые переводят уравнения (30), (31) в уравнение, тесно связанное с уравнением КдФ (3). Если уравнение эволюции обладает классической симметрией, то существует дифференциальная подстановка (23), которая приводит это уравнение к уравнению с меньшей группой симметрий. Это так называемые *групповые преобразования* [7]. Проблема, связанная с исходным уравнением КдФ (3), состоит в том, что это уравнение имеет классические симметрии, а потому должно существовать “более фундаментальное” уравнение, связанное с уравнением КдФ с помощью групповой подстановки и имеющее тривиальную группу симметрий. Это уравнение имеет вид

$$w_t = D_y\left(\frac{w_{yy}}{w^3} - 3\frac{w_y^2}{w^4} - 3y\right), \quad (47)$$

и оно получается из уравнения КдФ при подстановке $w = 1/u_x$, $y = u$ и масштабном преобразовании.

Общее свойство дифференциальных подстановок (23) заключается в том, что если начальное уравнение (в данном случае уравнение (30)) имеет сохраняющуюся плотность ρ (следовательно, $\rho_t = \sigma_x$), то преобразованное уравнение имеет сохраняющуюся плотность $\bar{\rho} = \rho/D_x\phi$. Теперь u есть сохраняющаяся плотность уравнения (30), а потому она должна преобразовываться в сохраняющуюся плотность w уравнения (47), поэтому подстановка должна иметь вид

$$y = Z, \quad w = \frac{u}{D_x Z}. \quad (48)$$

Налагая условие, что дифференциальная подстановка (23) должна переводить (30) в (47), получим, что

$$Z_t = \frac{D_x Z}{u} \left(\frac{Q}{u^2} + T + lu^2 + mu \right) + \frac{D_x^3 Z}{u^3} - 3D_x^2 Z \frac{u_1}{u^4} + \frac{3}{2} D_x Z \frac{u_1^2}{u^5} + 3 \frac{Z D_x Z}{u}$$

и возможны два типа подстановок. Первый тип, обозначаемый как КдФ1, имеет вид

$$Z = \frac{1}{u} D_x \left(-\frac{u_1}{u^2} + N(\mathbf{v})u \right) - \frac{1}{2} \frac{u_1^2}{u^4} - \frac{Q}{u^2} - \frac{1}{3} T + \frac{1}{3} lu^2,$$

где $N = N(\mathbf{v})$. Из условий совместности вытекают следующие необходимые и достаточные условия:

$$\begin{aligned}\Phi_2(N) &= -\frac{2}{3}l - \frac{1}{4}N^2, \\ 0 &= 6\Phi_2\Phi_2\Phi_0(N) + 3N\Phi_2\Phi_0(N) - 2\Phi_2(T)N + 2\Phi_2\Phi_2(T) + 6\Phi_2\Phi_0(l), \\ 0 &= 3\Phi_0\Phi_2\Phi_0(N) - 3\Phi_2\Phi_0\Phi_0(N) + \frac{3}{2}N\Phi_0\Phi_0(N) + 2\Phi_2(Q)N - \\ &\quad - \frac{3}{2}QN^2 - 2\Phi_0\Phi_2(T) - \frac{4}{3}Ql + E, \\ 0 &= \Phi_0\Phi_0\Phi_0(N) - 2Q\Phi_0(N) - \Phi_0(Q)N + 2\Phi_0\Phi_2(Q) - \Phi_2\Phi_0(Q), \\ s(N) &= \Phi_0(N)m - \Phi_0(m)N + 2\Phi_2\Phi_0(m).\end{aligned}$$

Для подстановок второго типа, обозначаемых как КдФ2, получим

$$Z = \frac{1}{u}D_x \left(\frac{u_1}{u^2} + \frac{N(\mathbf{v})}{u} \right) - \frac{1}{2} \frac{u_1^2}{u^4} - \frac{Q}{u^2} - \frac{1}{3}T + \frac{1}{3}lu^2,$$

где $N = N(\mathbf{v})$, и

$$\begin{aligned}\Phi_0(N) &= 2Q - \frac{1}{4}N^2, \\ 0 &= \Phi_2\Phi_2\Phi_2(N) + \frac{2}{3}l\Phi_2(N) - \Phi_2\Phi_2(T) - \Phi_2\Phi_0(l), \\ 0 &= 3\Phi_2\Phi_0\Phi_2(N) - 3\Phi_0\Phi_2\Phi_2(N) + \frac{3}{2}N\Phi_2\Phi_2(N) - N\Phi_2(T) - \\ &\quad - N\Phi_0(l) + \frac{1}{2}lN^2 - 2\Phi_2\Phi_2(Q) - \frac{4}{3}Ql + E, \\ 0 &= 3\Phi_0\Phi_0\Phi_2(N) + \frac{3}{2}N\Phi_0\Phi_2(N) - N\Phi_2(Q) + 3\Phi_2\Phi_0(Q) - 8\Phi_0\Phi_2(Q), \\ s(N) &= -\frac{1}{4}N^2m + N\Phi_0(m) + 2Qm - 2\Phi_0\Phi_0(m).\end{aligned}$$

3.3. Дифференциальные подстановки для уравнения КН. Несимметричная версия уравнения КН (4) имеет вид

$$w_t = D_y \left(\frac{w_{yy}}{w^3} - \frac{3}{2} \frac{w_y^2}{w^4} + R(y)w^2 \right), \quad R(y) = y^3 + \lambda_1 y + \lambda_0.$$

Дифференциальная подстановка при этом также имеет вид (48), в котором

$$Z_t = \frac{D_x Z}{u} \left(\frac{Q}{u^2} + T + lu^2 + mu \right) + \frac{1}{u^3} \left(D_x^3 Z - \frac{3}{2} \frac{(D_x^2 Z)^2}{D_x Z} \right) - \frac{R(Z)}{D_x Z} u.$$

При этом $Z = Z(\mathbf{v})$, и опять возможны два типа дифференциальных подстановок. Для первого типа подстановок, обозначаемого как КН1, характерно существование непостоянной функции $Z(\mathbf{v})$, удовлетворяющей системе уравнений

$$\begin{aligned}\Phi_2(Z) &= 0, \\ 0 &= \Phi_2 \Phi_2 \Phi_0(Z) - \frac{1}{2} \frac{(\Phi_2 \Phi_0(Z))^2}{\Phi_0(Z)} + \frac{1}{3} l \Phi_0(Z) - \frac{1}{3} \frac{R(Z)}{\Phi_0(Z)}, \\ 0 &= \Phi_2 \Phi_0 \Phi_0(Z) - \Phi_0 \Phi_2 \Phi_0(Z) - \frac{\Phi_2 \Phi_0(Z) \Phi_0 \Phi_0(Z)}{\Phi_0(Z)} + \frac{1}{3} T \Phi_0(Z), \\ 0 &= \Phi_0 \Phi_0 \Phi_0(Z) - \frac{3}{2} \frac{(\Phi_0 \Phi_0(Z))^2}{\Phi_0(Z)} + Q \Phi_0(Z), \\ s(Z) &= m \Phi_0(Z).\end{aligned}$$

В случае подстановки типа КН2 функция $Z(\mathbf{v})$ должна удовлетворять системе

$$\begin{aligned}\Phi_0(Z) &= 0, \\ 0 &= \Phi_0 \Phi_0 \Phi_2(Z) - \frac{1}{2} \frac{(\Phi_0 \Phi_2(Z))^2}{\Phi_2(Z)} - Q \Phi_2(Z) - \frac{1}{3} \frac{R(Z)}{\Phi_2(Z)}, \\ 0 &= \Phi_0 \Phi_2 \Phi_2(Z) - \Phi_2 \Phi_0 \Phi_2(Z) - \frac{\Phi_2 \Phi_2(Z) \Phi_0 \Phi_2(Z)}{\Phi_2(Z)} + \frac{1}{3} T \Phi_2(Z), \\ 0 &= \Phi_2 \Phi_2 \Phi_2(Z) - \frac{3}{2} \frac{(\Phi_2 \Phi_2(Z))^2}{\Phi_2(Z)} - \frac{1}{3} l \Phi_2(Z), \\ s(Z) &= 0.\end{aligned}$$

4. КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Дадим теперь набросок схемы классификации уравнений типа 1 (17) и квазилинейных уравнений

$$w_t = A(\mathbf{v}, u) w_3 + B(\mathbf{v}, u), \quad w_i \equiv \frac{\partial^i w}{\partial x^i},$$

но ограничим реальный поиск случаем двух уравнений, про которые ранее не было известно, что они относятся к классу интегрируемых. В нестандартных переменных это семейство уравнений может быть записано в виде

$$\begin{aligned}u &= A(\mathbf{v})^{-1/3}, \\ u_t &= D_x \left(\frac{u_2}{u^3} - \frac{3}{2} \frac{u_1^2}{u^4} + \frac{Q(\mathbf{v})}{u^2} + T(\mathbf{v}) + l(\mathbf{v}) u^2 + m(\mathbf{v}) u \right), \\ D_x \mathbf{v} &= \Phi(\mathbf{v}) = u^2 \Phi_2(\mathbf{v}) + \Phi_0(\mathbf{v}), \\ \mathbf{v}_t &= \left(2 \frac{u_2}{u^2} - 4 \frac{u_1^2}{u^3} + 4 \frac{Q(\mathbf{v})}{u} + m(\mathbf{v}) u^2 + \frac{4}{3} l(\mathbf{v}) u^3 \right) \Phi_2 + 2 \frac{u_1}{u^2} [\Phi_2, \Phi_0] + \\ &\quad + 2 [\Phi_0, [\Phi_2, \Phi_0]] \frac{1}{u} - 2 [\Phi_2, [\Phi_2, \Phi_0]] u + s(\mathbf{v}).\end{aligned}$$

Уравнения класса 3 типа 1 задаются системой

$$\begin{aligned} w_t &= A(x, w, w_1, w_2)w_3 + B(x, w, w_1, w_2), \\ \Phi_2 &= a(x, w, w_1)\partial_{w_1}, \quad \Phi_0 = \partial_x + w_1\partial_w - b(x, w, w_1)\partial_{w_1}, \\ A(x, w, w_1, w_2) &= u^{-3} = \left(\frac{w_2 + b(x, w, w_1, w_2)}{a(x, w, w_1, w_2)} \right)^{-3/2}. \end{aligned}$$

Точечные преобразования, сохраняющие вид этих уравнений, суть

$$\begin{aligned} \bar{t} &= k t, \quad \bar{x} = \phi(x, w), \quad \bar{w} = \psi(x, w), \\ J &\equiv \phi_x \psi_w - \phi_w \psi_x \neq 0. \end{aligned} \quad (49)$$

Также ниже используются некоторые контактные преобразования, имеющие вид (49).

Первая часть классификации состоит в разрешении условий интегрируемости (32), (33), (39)–(42) и условий (35) и (36). Во-первых, из уравнения (35) следует, что $l = -3(a^2)_{w_1 w_1}/4$, и тогда уравнение (32) дает $(a^2)_{w_1 w_1 w_1}$, т.е. $a = (\alpha_2 w_1^2 + \alpha_1 w_1 + \alpha_0)^{1/2}$, $\alpha_i = \alpha_i(x, w)$. Два различных случая соответствуют тому, имеет ли многочлен по w_1 два простых корня или один двойной. Преобразования (49) позволяют записать эти два случая в соответствующих формах $a = 1$ или $a = \alpha(x, w)^{-1/2} w_1^{1/2}$, которые будут называться соответственно классами 3А или 3В. В обоих случаях $l = 0$.

Нас интересуют уравнения класса 3В. Для этого класса получим $a = \alpha(x, w)^{-1/2} w_1^{1/2}$. Тогда из условия (39) следует, что

$$T = t_2(x, w)w_1 + t_1(x, w)w_1^{1/2} + t_0(x, w),$$

а из условия (35) –

$$\begin{aligned} b &= \beta_5 w^{5/2} + \beta_4 w^2 + \beta_3 w^{3/2} + \beta_2 w + \beta_1 w^{1/2}, \quad \beta_i = \beta_i(x, w), \\ t_2 &= 3\beta_5 \alpha^{-1/2}, \quad t_1 = \frac{3}{2}\beta_4 \alpha^{-1/2} - \frac{3}{2}\alpha_w \alpha^{-3/2}. \end{aligned}$$

Условие (36) позволяет найти явный вид функции Q , и из условия (33) следует система

$$(\beta_5 \alpha^{-3/2})_w = 0, \quad (\beta_1 \alpha^{-3/2})_x = 0, \quad (\beta_2)_w + (\beta_4)_x = 0, \quad (50)$$

$$(t_0)_w + \frac{3\alpha^{-3/2}}{16} [\beta_5 \alpha_x + 2(\beta_5)_x \alpha - 2(\beta_3)_w \alpha + \beta_3 \alpha_w] = 0, \quad (51)$$

$$(t_0)_x + \frac{3\alpha^{-3/2}}{16} [\beta_1 \alpha_w + 2(\beta_1)_w \alpha - 2(\beta_3)_x \alpha + \beta_3 \alpha_x] = 0. \quad (52)$$

Разрешая уравнения (50) и используя допустимые преобразования, положим

$$\begin{aligned} \beta_5 &= \lambda_1 \alpha^{3/2}, \quad \beta_1 = \lambda_2 \alpha^{3/2}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \{0, 1\}, \\ \beta_4 &= \beta_w + \frac{\alpha_w}{\alpha}, \quad \beta_2 = -\beta_x - \frac{\alpha_x}{\alpha}, \quad \beta_3 = \gamma \alpha^{1/2}, \end{aligned}$$

где $\beta(x, w)$ и $\gamma(x, w)$ – произвольные функции. Уравнения (51), (52) при этом принимают вид

$$(t_0)_w = \frac{3}{8}\gamma_w - \frac{3}{4}\lambda_1 \alpha_x, \quad (t_0)_x = \frac{3}{8}\gamma_x - \frac{3}{4}\lambda_2 \alpha_w.$$

Тогда уравнения класса 3В задаются системой уравнений

$$\begin{aligned} a &= \alpha^{-1/2} w_1^{1/2}, \\ b &= \lambda_1 \alpha^{3/2} w_1^{5/2} + \left(\beta_w + \frac{\alpha_w}{\alpha} \right) w_1^2 + \gamma \alpha^{1/2} w_1^{-3/2} - \left(\beta_x + \frac{\alpha_x}{\alpha} \right) w_1 + \lambda_2 \alpha^{3/2} w_1^{1/2} \end{aligned}$$

и могут быть классифицированы, если определить три функции $\alpha(x, w)$, $\beta(x, w)$ и $\gamma(x, w)$ и две константы λ_1 и λ_2 . Получим три основных случая:

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1 & \quad (\text{уравнения 3В1}), \\ \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1 & \quad (\text{уравнения 3В2}), \\ \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0 & \quad (\text{уравнения 3В3}). \end{aligned}$$

Есть также дополнительный случай, когда уравнения вырождаются, который будем называть случаем 3В0. В этом случае a и b зависят только от w_1 , так что α и γ суть константы, а β оказывается линейной функцией от w_1 и x .

ТАБЛИЦА 2

Интегрируемые уравнения класса 3В1

	Функции α, β, γ
Уравнение 3В1-1	$\alpha = \alpha(w+x), \quad \beta = \beta(w+x), \quad \gamma = \gamma(w+x)$
Уравнение 3В1-2	$\alpha = f(w+x) - g(w-x), \quad \beta = 0, \quad \gamma = 10(f^2 - g^2),$ где $(f')^2 + 16f^5 + 2\lambda f^3 + \lambda_2 f^2 + \lambda_1 f + \lambda_0 = 0,$ $(g')^2 + 16g^5 + 2\lambda g^3 + \lambda_2 g^2 + \lambda_1 g + \lambda_0 = 0$
Уравнение 3В1-3	$\alpha = \alpha(w+x), \quad \beta = -\ln \alpha(w+x) - \ln \delta(w-x),$ $\gamma = 2\alpha^2(w+x)$
Уравнение 3В1-4	$\alpha = f(w+x) - g(w-x),$ $\beta = -\ln f(w+x) - \ln g(w-x),$ $\gamma = 2(f-g)(f+g),$ где $(f')^2 + 4f^5 + 2\lambda_4 f^4 + \lambda_3 f^3 + \lambda_2 f^2 + \lambda_1 f = 0,$ $(g')^2 + 4g^5 + 2\lambda_4 g^4 + \lambda_3 g^3 + \lambda_2 g^2 + \lambda_1 g = 0$

Уравнения, которые нас интересуют, принадлежат классу 3В1. Этот класс содержит уравнения, приведенные в табл. 2. Функции $\alpha(w+x)$, $\beta(w+x)$ и $\gamma(w+x)$ из уравнения 3В1-1 должны удовлетворять следующей системе:

$$\begin{aligned} \gamma &= -\frac{1}{\alpha} \left(2\beta'' - (\beta')^2 + 2\frac{\alpha'}{\alpha} \beta' \right) + 10\alpha^2 + \lambda\alpha, \\ \gamma'' - \left(\frac{1}{2}\beta' + 3\frac{\alpha'}{\alpha} \right) \gamma' + \left(-2\beta' + \frac{5}{2}\frac{\alpha'}{\alpha} \beta' - \frac{\alpha''}{\alpha} + 3\frac{(\alpha')^2}{\alpha^2} \right) \gamma &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -4\alpha^2\beta'' - 3\alpha\alpha'\beta' - 10\alpha\alpha'' + 10(\alpha')^2 = 0, \\
& \left(\frac{\beta''}{\alpha} - 3\frac{(\beta')^2}{\alpha} + 4\frac{\alpha''}{\alpha^2} - 4\frac{(\alpha')^2}{\alpha^3} + \frac{3}{4}\frac{\gamma^2}{\alpha^2} - \frac{3}{2}\alpha^2 \right)' + \\
& + 5\frac{\beta'}{\alpha} \left(\beta'' + \alpha''\alpha - \frac{(\alpha')^2}{\alpha^2} \right) + \frac{7}{2}\gamma' - \frac{5}{2}\frac{\alpha'}{\alpha}\gamma = 0.
\end{aligned}$$

Для уравнения 3В1-3 получим

$$(\delta')^2 + \lambda_2\delta^2 + \lambda_1\delta = 0, \quad (\alpha')^2 + 4\alpha^5 + \lambda_4\alpha^4 + \lambda_3\alpha^3 + \lambda_2\alpha^2 = 0.$$

ТАБЛИЦА 3

**Дифференциальные подстановки для уравнений класса 3В1
без классических симметрий**

	Дифференциальные подстановки
Уравнение 3В1-2	<p>КдФ2, где $N = 2\alpha^{3/2}w_1^{3/2} - 4(\alpha^3/s)w_1 + \alpha^{1/2}nw_1^{1/2} + s - 2(\alpha_x/\alpha)$. Функция $s(x, w) \neq 0$ произвольна, а n должна удовлетворять $0 = n^2 + A_1n + B_1$, $0 = A_2n + B_2$. Если $\delta = f(w+x) + g(w-x)$, то $A_1 = 8\alpha^4s^{-2} - 20\delta - (1/2)\alpha^{-2}s^2$, $B_1 = -160\alpha^4\delta s^{-2} - 32\alpha_x\alpha s^{-1} + 160\delta^2 +$ $+28\alpha^2 + 8\lambda - \alpha_w\alpha^{-2}s$, $A_2 = s^8 + 40\delta\alpha^2s^6 - 32\alpha_w\alpha^2s^5 -$ $-128\alpha^5\alpha_xs^3 - 640\delta\alpha^8s^2 - 256\alpha^{12}$, $B_2 = 16\alpha_ws^7 - (48\alpha^4 + 320\delta^2\alpha^2 + 16\lambda\alpha^2)s^6 +$ $+ (128\alpha^3\alpha_ws + 960\delta\alpha^6)s^4 + 2560\delta\alpha^5\alpha_xs^3 -$ $- (768\alpha^{10} - 7680\delta^2\alpha^8 + 256\lambda\alpha^8)s^2 +$ $+ 1024\alpha^9\alpha_xs + 5120\delta\alpha^{12}$.</p>
Уравнение 3В1-3	<p>КН1, где $Z = \alpha(w+x)$ и многочлен $R(x)$ есть $R(x) = -(3/2)(4x^4 + \lambda_4x^3 + \lambda_3x^2 + \lambda_2x)$</p>
Уравнение 3В1-4	<p>КН1, где $Z = f(w+x) + g(w-x)$ и многочлен $R(x)$ есть $R(x) = -(3/2)(4x^4 + \lambda_4x^3 + \lambda_3x^2 + \lambda_2x)$</p>
Уравнение 3В3-4	КдФ1, где $N = 0$

Симметрии и дифференциальные подстановки класса 3В. Из условий симметрии следует, что $m = m(x)$, $s = s\partial_w + (s_x - bs_{w_1})\partial_{w_1}$, где $s(x, w, w_1) = m(x)w_1 +$

$n(x)$, и должна выполняться система уравнений

$$\begin{aligned} 0 &= m''w_1 + n'' - 2bm' + nb_w b_{w_1}(m'w_1 + n'), \\ 0 &= nT_w + (m'w_1 + n')T_{w_1}, \\ 0 &= m''' + nQ_w + (m'w_1 + n')Q_{w_1} - 2m'Q. \end{aligned}$$

Решая эту систему, получим, что из всего класса 3В1 одно лишь уравнение 3В1-1 допускает симметрию, причем вполне очевидную, $m = n = k$.

Подводя итог, в табл. 3 мы собрали дифференциальные подстановки для уравнений семейства 3В1, которые связывают уравнения из этого семейства с уравнениями КдФ и КН. Приведены только те подстановки, которые соответствуют уравнениям без классических симметрий. Это сделано, во-первых, для краткости, а во-вторых, из-за того, что наилучшим способом обработки уравнений, обладающих классическими симметриями, служит нахождение групповых преобразований (см. [7], [13]). Заметим, что было ранее неизвестно, что уравнения 3В1-2 и 3В1-4 связаны с соответствующими уравнениями КдФ и КН, равно как и то, являются ли вообще эти уравнения интегрируемыми. В работе [4] было только показано, что они удовлетворяют некоторым первым условиям интегрируемости, но полная интегрируемость оставалась под вопросом до тех пор, пока не была найдена связь между этими уравнениями и интегрируемыми уравнениями с помощью дифференциальной подстановки.

Благодарности. Автор глубоко признателен С. И. Свинолупову и В. В. Соколову за сотрудничество. Работа была поддержана DG CYT (проект PB98-0821) и Институтом математических наук Исаака Ньютона (Кембридж, Великобритания).

Список литературы

- [1] *L. Abellanas, A. Galindo.* Phys. Lett. A. 1985. V. 107. № 4. P. 159–160; *F. Calogero, A. Degasperis.* J. Math. Phys. 1981. V. 22. P. 23–31; *A. S. Fokas.* J. Math. Phys. 1980. V. 21. № 6. P. 1318–1325.
- [2] *R. Hernández Heredero, V. V. Sokolov, S. I. Svinolupov.* J. Phys. A. 1994. V. 27. P. 4557–4568.
- [3] *Н. Х. Ибрагимов, А. Б. Шабат.* Функц. анализ и его прилож. 1980. Т. 14. № 1. С. 25–36.
- [4] *A. V. Mikhailov, A. B. Shabat, V. V. Sokolov.* The symmetry approach to classification of integrable equations. In: What is Integrability? Ed. V. Zakharov. Berlin: Springer, 1991. P. 115–184.
- [5] *С. И. Свинолупов, В. В. Соколов.* Функц. анализ и его прилож. 1982. Т. 16. № 4. С. 86–87.
- [6] *H. D. Wahlquist, F. B. Estabrook.* J. Math. Phys. 1975. V. 16. P. 1–7.
- [7] *С. И. Свинолупов, В. В. Соколов.* УМН. 1992. Т. 47. № 3. С. 115–146.
- [8] *H. H. Chen, Y. C. Lee, C. S. Liu.* Physica Scripta. 1979. V. 20. № 3/4. P. 490–492.
- [9] *Н. Х. Ибрагимов, А. Б. Шабат.* Функц. анализ и его прилож. 1980. Т. 14. № 4. С. 79–80.
- [10] *V. V. Sokolov, A. B. Shabat.* Sov. Math. Phys. Rev. 1984. V. 4. P. 221–280.
- [11] *Ф. Х. Мукминов, В. В. Соколов.* Матем. сб. 1987. Т. 133(175). № 3. С. 392–414.
- [12] *В. В. Соколов.* УМН. 1988. Т. 43. № 5. С. 133–163.
- [13] *R. Hernández Heredero, V. V. Sokolov, S. I. Svinolupov.* Why are there so many integrable evolution equations of third order? In: Proc. NEEDS'94. Eds. V.G. Manakov, A.R. Bishop, D.D. Holm. Los Alamos: World Scientific, 1995. P. 42–53.