Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Г. Конопельченко, Л. Мартинес Алонсо, Е. Медина, Квазиконформные отображения и решения бездисперсионной иерархии КП, *ТМФ*, 2002, том 133, номер 2, 247–258

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf394>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 14:04:41

© 2002 г. Б. Конопельченко*, Л. Мартинес Алонсо†, Е. Медина‡

КВАЗИКОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И РЕШЕНИЯ БЕЗДИСПЕРСИОННОЙ ИЕРАРХИИ КП

$\bar{\partial}$ -Формализм, используемый для исследования бездисперсионных интегрируемых иерархий применен к бездисперсионной иерархии Кадомцева–Петвиашвили (КП). Этот формализм привязывается к теории квазиконформных отображений на плоскости, что позволяет описать некоторые классы явных решений бездисперсионной иерархии КП.

Ключевые слова: бездисперсионные иерархии, квазиконформные отображения, $\bar{\partial}$ -уравнения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Бездисперсионные, или квазиклассические, интегрируемые иерархии занимают существенное место в теории интегрируемых систем. Они лежат в основе многочисленных подходов к решению задач, возникающих в физике и математике (см., например, [1]–[8]). Эти иерархии связаны с некоторыми классическими задачами теории конформных отображений [9]. Для исследования бездисперсионных интегрируемых иерархий недавно был предложен $\bar{\partial}$ -метод [10], [11]. Этот метод позволяет обнаружить глубокую взаимосвязь этих иерархий и теории квазиконформных отображений [12]–[15].

Наш подход основан на нелинейном $\bar{\partial}$ -уравнении

$$S_{\bar{z}} = W(z, \bar{z}, S_z), \quad (1)$$

где $z \in \mathbb{C}$, а $S(z, \bar{z}, \mathbf{t})$ представляет собой комплекснозначную функцию, зависящую от бесконечного набора $\mathbf{t}$ параметров (времен), $S_{\bar{z}} := \partial S / \partial \bar{z}$, $S_z := \partial S / \partial z$, W – подходящая функция переменных z , $\bar{z}$ и S_z .

Уравнение (1) предполагает, что первые производные от функции S по параметрам $\mathbf{t}$ удовлетворяют семейству уравнений Бельтрами

$$f_{\bar{z}} = \mu(z, \mathbf{t}) f_z, \quad (2)$$

*Dipartimento di Fisica, Università di Lecce and Sezione INFN, Lecce, Italy

†Departamento de Física Teórica II, Universidad Complutense, Madrid, Spain

‡Departamento de Matemáticas, Universidad de Cádiz, Puerto Real, Cádiz, Spain

где

$$\mu := W'(z, \bar{z}, S_z), \quad W' = W_\xi(z, \bar{z}, \xi). \quad (3)$$

Это обеспечивает связь между $\bar{\partial}$ -методом и теорией квазиконформных отображений, которая основана на уравнении Бельтрами. Заметим, что уравнение (1) также хорошо известно из теории квазиконформных отображений (см., например, [16]).

Метод данной работы основан на нахождении решений уравнения (1) с использованием классических методов решения уравнений с частными производными первого порядка типа Гамильтона–Якоби. В данной работе в рамках этого метода будут явно найдены некоторые частные решения бездисперсионной иерархии Кадомцева–Петвиашвили (КП). Также будет показано, что даже простейшее из этих решений (см. пример 1 из раздела 4) не может быть получено с помощью стандартных методов, основанных на технике преобразования годографа [2].

2. БЕЗДИСПЕРСИОННЫЕ ИЕРАРХИИ КП

Бездисперсионная иерархия КП представляет собой следующую *классическую версию* пары уравнений Лакса для стандартной теории КП [1]–[7]:

$$\frac{\partial z}{\partial t_n} = \{\Omega_n, z\}, \quad \Omega_n(p, \mathbf{t}) := (z^n)_+, \quad n \geq 1. \quad (4)$$

Здесь $z = z(p, \mathbf{t})$ представляет собой комплекснозначную функцию от комплексного переменного p и от бесконечного набора $\mathbf{t} := (t_1, t_2, \dots)$ комплексных параметров, которая допускает разложение в ряд Лорана вида

$$z = p + \sum_{n \geq 1} \frac{a_n(\mathbf{t})}{p^n}, \quad p \rightarrow \infty, \quad (5)$$

а через $(z^n)_+$ обозначена полиномиальная часть разложения z^n в ряд по p ,

$$(z)_+ = p, \quad (z^2)_+ = p^2 + 2a_1, \quad (z^3)_+ = p^3 + 3pa_1 + 3a_2 \quad \text{и т.д.}$$

Скобка Пуассона определена как

$$\{F, G\} := \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial p}, \quad x := t_1.$$

Условия совместности системы (4) имеют вид

$$\frac{\partial \Omega_m}{\partial t_n} - \frac{\partial \Omega_n}{\partial t_m} + \{\Omega_m, \Omega_n\} = 0, \quad m \neq n. \quad (6)$$

Рассмотрим два интересных примера нелинейных уравнений бездисперсионной иерархии КП.

1. В случае $n = 2$ уравнение (4) сводится к импульсным уравнениям Бенни

$$\frac{\partial a_{n+1}}{\partial t} + \frac{\partial a_{n+2}}{\partial x} + na_n \frac{\partial a_1}{\partial x} = 0, \quad t := -2t_2. \quad (7)$$

2. Условия совместности (6) в случае, когда $n = 2$ и $m = 3$, приводят собственно к бездисперсионному уравнению КП (уравнению Заболоцкой–Хохлова)

$$\left(u_t - \frac{3}{2}uu_x \right)_x = \frac{3}{4}u_{yy}, \quad u := 2a_1, \quad t := t_3, \quad y := t_2. \quad (8)$$

Из условий (6) следует (см. [6]), что для всякого решения $z = z(p, \mathbf{t})$ бездисперсионной иерархии КП найдется соответствующая функция $S = S(z, \mathbf{t})$ такая, что

$$\frac{\partial S(z, \mathbf{t})}{\partial t_n} = \Omega_n(p(z, \mathbf{t}), \mathbf{t}), \quad n \geq 1, \quad (9)$$

где $p = p(z, \mathbf{t})$ получается, если обратить решение $z = z(p, \mathbf{t})$. Без потери общности будем предполагать, что функция S допускает разложение Лорана вида

$$S(z, \mathbf{t}) = \sum_{n \geq 1} z^n t_n + \sum_{n \geq 1} \frac{S_n(\mathbf{t})}{z^n}, \quad z \in \Gamma, \quad (10)$$

где $\Gamma = \{z: |z| = r\}$. Заметим, что полагая $n = 1$ в (9) и используя разложение (10), можно получить, что $p = p(z, \mathbf{t})$ записывается в виде

$$p = \frac{\partial S(z, \mathbf{t})}{\partial x} = z + \sum_{n \geq 1} \frac{b_n(\mathbf{t})}{z^n}, \quad b_n := \frac{\partial S_n}{\partial x}. \quad (11)$$

Обратно, если задана функция $S = S(z, \mathbf{t})$, которая удовлетворяет условиям (9) и (10), то можно доказать [4], что функция $z = z(p, \mathbf{t})$, обратная по отношению к функции $p = p(z, \mathbf{t})$ в (11), задает решение бездисперсионной иерархии КП.

Здесь и далее будем называть функции, удовлетворяющие условиям (9) и (10), *S-функциями* бездисперсионной иерархии КП. Они связаны с тау-функциями [4], поскольку

$$S(z, \mathbf{t}) = \sum_{n \geq 1} z^n t_n + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{nz^n} \frac{\partial \ln \tau(\mathbf{t})}{\partial t_n}, \quad z \in \Gamma.$$

Заметим, что система уравнений (9) для S -функции бездисперсионной иерархии КП представляет собой набор согласованных уравнений типа Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t_n} = \Omega_n \left(\frac{\partial S}{\partial x}, \mathbf{t} \right), \quad n \geq 2, \quad (12)$$

которые описывают *квазиклассический предел* линейной системы уравнений на волновую функцию стандартной иерархии КП.

В работах [2], [4], [6] были предложены различные способы построения решений бездисперсионной иерархии КП с помощью S -функций. В данной работе используется $\bar{\partial}$ -метод, предложенный в работах [10], [11], в рамках которого S -функции описываются с помощью решений $\bar{\partial}$ -уравнений (1). Напомним, что симметрии уравнения (1) (вариации первого порядка $f := \delta S$) описываются в этом подходе с помощью семейства уравнений Бельтрами (2), (3). Из этого свойства следует, в частности, что все первые производные $\partial S / \partial t_n$ решения уравнения (1) удовлетворяют уравнениям (2).

Рассмотрим локальное решение f уравнения Бельтрами. Если f имеет ненулевой якобиан в некоторой точке z_0 , то все гладкие локальные решения F в окрестности z_0 имеют вид аналитических функций от f : $F = F(f)$. Из этого свойства следует, что при подходящих условиях те решения S $\bar{\partial}$ -уравнения (1), которые допускают разложения вида (10), также удовлетворяют условиям (12). Таким образом, эти решения задают S -функции бездисперсионной иерархии КП. Ниже данная схема описана более строго.

3. КВАЗИКОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Квазиконформные отображения представляют собой естественное и весьма богатое расширение концепции конформных отображений. Напомним некоторые базисные свойства квазиконформных отображений (см., например, [10]–[15]).

Пусть $\mu = \mu(z)$ – измеримая функция на области G комплексной плоскости такая, что почти всюду на G справедливо неравенство $|\mu(z)| < k$ для некоторого числа k , $0 < k < 1$. Функция $f = f(z)$ называется *квазиконформным отображением с комплексным растяжением μ* в области G , если выполняются следующие условия:

- 1) f представляет собой гомеоморфизм $f: D \rightarrow D'$;
- 2) f есть обобщенное решение линейного уравнения Бельтрами (2) на D , причем частные производные $f_{\bar{z}}$ и f_z представляют собой функции, локально интегрируемые с квадратом.

Свойства решений уравнения Бельтрами (2) хорошо известны (см., например, [13]). Некоторые из этих свойств принципиально важны для нашего рассмотрения. Но прежде чем описать эти свойства, введем оператор Кальдерона–Зигмунда [13]

$$(Th)(z) := \frac{1}{2\pi i} \iint_G \frac{h(z')}{(z' - z)^2} dz' \wedge d\bar{z}', \quad (13)$$

где интеграл берется по Коши в смысле главного значения. Тогда имеет место следующий фундаментальный результат [13].

ТЕОРЕМА 1. *Для любого $p \geq 2$ оператор T задает ограниченный оператор в пространстве $L^p(\mathbb{C})$. Более того, норма $\|T\|_p$ непрерывна по отношению к параметру p и удовлетворяет условию*

$$\lim_{p \rightarrow 2} \|T\|_p = 1. \quad (14)$$

Эта теорема утверждает, что для любого $0 \leq k < 1$ существует $\delta(k) > 0$ такое, что $k\|T\|_p < 1$ для всех $2 < p < 2 + \delta(k)$.

Следующая теорема формулирует свойство квазиконформных отображений, которое оказывается важным для описания $\bar{\partial}$ -метода.

ТЕОРЕМА 2. Пусть μ — измеримая функция с компактным носителем, содержащимся внутри круга $|z| < R$, и такая, что $\|\mu\|_\infty < k < 1$. Тогда для любого $p > 2$ такого, что $k\|T\|_p < 1$, единственным обобщенным решением уравнения Бельтрами (2), для которого справедливы условия

$$f(z) = O\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \rightarrow \infty, \quad (15)$$

и $f_{\bar{z}}, f_z \in L^p(\mathbb{C})$, будет $f \equiv 0$.

Этот результат представляет собой утверждение о единственности из формулировки теоремы о существовании так называемого нормального решения уравнения Бельтрами [12]–[14]. Доказательство этого утверждения основано на том, что оператор T задает действие $\partial_z \partial_{\bar{z}}^{-1}$ на пространстве $L^p(\mathbb{C})$, и по предположению теоремы получим, что уравнение Бельтрами для f превращается в интегральное уравнение

$$\phi - \mu T \phi = 0, \quad \phi := f_{\bar{z}},$$

на $L^p(\mathbb{C})$. Тогда поскольку $\|\mu T\|_p \leq k\|T\|_p < 1$, то получим, что $\phi \equiv 0$, и с учетом свойства (15) имеем $f \equiv 0$.

Вернемся теперь к $\bar{\partial}$ -уравнению (1), предполагая, что $W(z, \bar{z}, S_z) = 0$ для всех z , лежащих вне круга $\Gamma = \{z: |z| = r\}$. Допустим, что известно решение $S = S(z, \bar{z}, \mathbf{t})$ уравнения (1) внутри диска $D = \{z: |z| < r\}$ с граничным условием $S|_\Gamma := S(z, r^2/z, \mathbf{t})$ вида (10) и такое, что множество

$$\Omega := \{\mathbf{t}: \sup_{z \in D} |W'(z, \bar{z}, S_z(z, \mathbf{t}))| \leq k\}$$

непусто при некотором k , $0 < k < 1$. В этом случае можно применить теорему 2 к уравнению Бельтрами (2), (3). Более того, принимая во внимание, что

$$\frac{\partial S}{\partial t_n} = z^n + \sum_{m \geq 1} \frac{\partial S_m(\mathbf{t})}{\partial t_n} z^{-m}, \quad z \in \Gamma,$$

получим, что эти функции допускают непрерывное продолжение из D в аналитические функции вне контура Γ . Тем самым эти функции задают решения системы (2), (3) во всей плоскости комплексного переменного. С другой стороны, ясно, что

$$\frac{\partial S}{\partial t_n} - (z^n)_+ = \frac{\partial S}{\partial t_n} - \Omega_n \left(\frac{\partial S}{\partial x}, \mathbf{t} \right) = O\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \rightarrow \infty,$$

а потому из теоремы 2 следует, что выполняется условие (9), откуда получаем, что функция $S = S(z, \bar{z}, \mathbf{t})$ задает S -функцию бездисперсионной иерархии КП для $\mathbf{t} \in \Omega$.

4. РЕШЕНИЯ БЕЗДИСПЕРСИОННОЙ ИЕРАРХИИ КП

Чтобы построить явные решения бездисперсионной иерархии КП, рассмотрим $\bar{\partial}$ -уравнения вида

$$S_{\bar{z}} = \theta(r - |z|)V(z, \bar{z}, S_z), \quad (16)$$

где $r > 0$, $\theta(\xi)$ – стандартная функция Хевисайда, а V – аналитическая функция от z , $\bar{z}$ и S_z . Решение строится следующим образом.

1. Найдем сначала решения $S = S(z, \mathbf{a})$ уравнения (16),

$$S_{\bar{z}} = V(z, \bar{z}, S_z), \quad |z| < r, \quad (17)$$

зависящие от набора свободных параметров $\mathbf{a} := (a_0, a_1, \dots)$.

2. Затем выберем те решения, граничные значения которых на круге $\Gamma = \{z: |z| = r\}$ имеют вид (10).

Уравнение (17) представляет собой уравнение с частными производными типа Гамильтона–Якоби, и мы можем использовать хорошо развитые методы построения решений таких уравнений. Например, если $V = V(S_z)$ содержит зависимость только от S_z , то из уравнения (17) следует, что

$$m_{\bar{z}} = V_m(m)m_z, \quad m := S_z.$$

Это уравнение легко решается, если применить метод характеристик. Общее решение уравнения (17) при этом неявно параметризуется:

$$\begin{aligned} S &= V(m)\bar{z} + mz - f(m), \\ V_m\bar{z} + z &= f_m(m), \end{aligned} \quad (18)$$

где $f = f(m)$ – произвольная функция. Заметим, что из второго уравнения системы (18) следует, что

$$f_m(m_0) = z, \quad m_0 := m(z, \bar{z})|_{\bar{z}=0},$$

и тогда $f_m(m_0)$ представляет собой функцию, обратную $m_0 = m_0(z)$.

Чтобы построить явные решения, надо еще больше сузить класс возможных решений. Например, исследуем случай, когда в рассмотрении участвует только лишь конечный набор из $N + 1$ параметров $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_N)$. Тогда возникает проблема вычлениить те решения S , в которых в формуле (10) не появляется членов $z^n t_n$ при $n > N$. В других случаях решения $\bar{\partial}$ -уравнения могут зависеть от времен t_n , $n > N$, которые сами по себе являются функциями от $t_1, \dots, t_N$, но на этом пути невозможно получить решение бездисперсионной иерархии КП.

Начнем исследование возможных допустимых случаев с рассмотрения подкласса $\bar{\partial}$ -уравнений (17) вида

$$S_{\bar{z}} = \bar{z}^s \sum_{m \geq 0}^M p_m(z)(S_z)^m, \quad |z| < r, \quad (19)$$

где $s \geq 0$, $M \geq 2$, коэффициенты $p_m = p_m(z)$ суть многочлены от переменной z , причем $p_M \neq 0$. Будем искать решение уравнения (19) в виде следующего ряда:

$$S = \sum_{n \geq 0} c_n(z) \bar{z}^{n(s+1)}, \quad (20)$$

где c_0 — произвольный многочлен N -й степени ($N \geq 2$),

$$c_0(z) = \sum_{n=0}^N a_n z^n, \quad a_N \neq 0. \quad (21)$$

Подставляя (20) в (19), получим рекуррентное соотношение

$$c_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(s+1)} \sum_{m \geq 0}^M p_m(z) \left(\sum_{r_1 + \dots + r_m = n} c'_{r_1} \dots c'_{r_m} \right), \quad n \geq 0, \quad (22)$$

из которого следует, что все коэффициенты $c_n(z)$ в выражении (20) имеют вид многочленов. Чтобы найти вид функции S на границе $|z| = r$, необходимо определить степени этих многочленов.

ЛЕММА. Если степени коэффициентов p_m в (19) удовлетворяют условиям

$$\deg p_m \leq (M-m)(N-1), \quad m = 0, 1, \dots, M,$$

то

$$\deg c_n = n[M(N-1) - N] + N, \quad n \geq 0. \quad (23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим метод математической индукции. Очевидно, что условие (23) выполнено при $n = 0$. Предположим, что это условие выполняется при $n' \leq n$, и рассмотрим члены в выражении (22) для c_{n+1} . Принимая во внимание, что $r_1 + \dots + r_m = n$, получим

$$\begin{aligned} \deg(p_m c'_{r_1} \dots c'_{r_m}) &= \sum_{i=1}^m [r_i [M(N-1) - N] + N - 1] + \deg p_m = \\ &= n[M(N-1) - N] + m(N-1) + \deg p_m \leq \\ &\leq n[M(N-1) - N] + M(N-1) = (n+1)[M(N-1) - N] + N. \end{aligned}$$

Более того, так как p_M есть ненулевая константа, ясно, что соответствующие члены в формуле (22) удовлетворяют условию

$$\deg(p_M c'_{r_1} \dots c'_{r_M}) = n[M(N-1) - N] + M(N-1) = (n+1)[M(N-1) - N] + N.$$

Тем самым можно заключить, что условие (23) выполнено и для коэффициента c_{n+1} , что завершает доказательство.

Предполагая, что ряд (20) сходится при некотором $r \geq 0$, найдем, что в предположениях леммы непрерывное продолжение функции S на границу $|z| = r$ имеет вид

$$S = \sum_{n \geq 0} r^{2n(s+1)} \frac{c_n(z)}{z^{n(s+1)}}, \quad \frac{c_n(z)}{z^{n(s+1)}} = O(z^{d_n}), \quad (24)$$

где

$$d_n = n[M(N-1) - N - s - 1] + N. \quad (25)$$

Поскольку решение, отвечающее (21), зависит от $N + 1$ свободных параметров $(a_0, \dots, a_N)$, интерес представляют лишь те случаи, в которых $d_n \leq N$ при всех $n \geq 0$. Из формулы (25) очевидно, что это возможно, только если

$$N \leq \frac{M + s + 1}{M - 1}. \quad (26)$$

Например, полагая $s = 0$, получим, что возможны только три случая, приведенные в таблице.

(M, N)	$V(z, S_z)$	$S _{\bar{z}=0}$
$(2, 2)$	$\alpha(S_z)^2 + (\sum_{i=0}^1 \beta_i z^i) S_z + \sum_{i=0}^2 \gamma_i z^i$	$\sum_{i=0}^2 a_i z^i$
$(3, 2)$	$\alpha(S_z)^3 + (\sum_{i=0}^1 \beta_i z^i)(S_z)^2 + (\sum_{i=0}^2 \gamma_i z^i) S_z + \sum_{i=0}^3 \eta_i z^i$	$\sum_{i=0}^2 a_i z^i$
$(2, 3)$	$\alpha(S_z)^2 + (\sum_{i=0}^2 \beta_i z^i) S_z + \sum_{i=0}^4 \gamma_i z^i$	$\sum_{i=0}^3 a_i z^i$

ПРИМЕР 1. Простейший случай из класса решений $(2, 2)$ отвечает уравнению

$$S_{\bar{z}} = \theta(1 - |z|)(S_z)^2, \quad (27)$$

где $S|_{\bar{z}=0}$ — многочлен второго порядка. Этот случай дает

$$S = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{(z-b)^2}{a-2\bar{z}} - c, & |z| \leq 1, \\ \frac{1}{2} \frac{z(z-b)^2}{az-2} - c, & |z| \geq 1. \end{cases}$$

Из условия регулярности функции S внутри единичного круга следует, что $|a| > 2$.

На границе $|z| = 1$ получим

$$S = \frac{1}{2a} z^2 + \left(\frac{1}{a^2} - \frac{b}{a} \right) z + \frac{2}{a^3} + \frac{b^2}{2a} - \frac{2b}{a^2} - c + O\left(\frac{1}{z}\right).$$

Таким образом, из условия, что ответ должен иметь необходимый вид S -функции бездисперсионной иерархии КП, следуют отождествления

$$x = \frac{1}{a^2} - \frac{b}{a}, \quad t_2 = \frac{1}{2a}, \quad c = \frac{2}{a^3} + \frac{b^2}{2a} - \frac{2b}{a^2}.$$

С другой стороны, масштабное преобразование с комплексным параметром соответствующего уравнения Бельтрами (1), (2) имеет вид

$$\mu(z, \bar{z}) := 2\theta(1 - |z|) \frac{z - b}{a - 2\bar{z}}. \quad (28)$$

С учетом вышесказанного получим следующее ограничение:

$$|\mu(z, \bar{z})| < 2 \frac{|b| + 1}{|a| - 2}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Таким образом, для любого $0 < k < 1$ имеем $|\mu(z)| \leq k$, если только $k|a| > 2(|b| + k + 1)$. Тем самым доказано, что в пространстве параметров существует не пустая область, в которой уравнение Бельтрами (1), (2) удовлетворяет условиям, обсуждавшимся в разделе 3. Это означает, что

$$p := S_x = \frac{z^2 - 4t_2 z + 2(x + 4t_2^2)}{z - 4t_2}, \quad |z| = 1,$$

и мы получаем следующее решение для t_2 -потока (потока Бенни) бездисперсионной иерархии КП:

$$z = \frac{p}{2} + 2t_2 + \sqrt{\left(\frac{p}{2} - 2t_2\right)^2 - 2x - 8t_2^2}. \quad (29)$$

Заметим, что зависимость от переменных времен входит в это решение через две функции $u_1 = 2t_2$ и $u_2 = -2x - 8t_2^2$, поскольку это решение переписывается в виде

$$z = \frac{p}{2} + u_1 + \sqrt{\left(\frac{p}{2} - u_1\right)^2 + u_2}.$$

Если бы это решение могло быть получено с помощью метода годографа [2], то оно бы соответствовало такой редукции бездисперсионной иерархии КП, в которой функции $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ удовлетворяли бы диагонализуемой системе уравнений гидродинамического типа с инвариантами Римана, задаваемыми нулями функции $\partial z(p, \mathbf{u})/\partial p$. Но эта функция не имеет нулей при $u_2 \neq 0$, поскольку

$$\frac{\partial z(p, \mathbf{u})}{\partial p} = \frac{p/2 - u_1 + \sqrt{(p/2 - u_1)^2 + u_2}}{2\sqrt{(p/2 - u_1)^2 + u_2}}.$$

Тем самым можно заключить, что решение (29) бездисперсионной иерархии КП не может быть получено в рамках метода годографа.

ПРИМЕР 2. $\bar{\partial}$ -Уравнение

$$S_{\bar{z}} = \theta(1 - |z|)(S_z)^3, \quad (30)$$

где $S|_{\bar{z}=0}$ – многочлен второго порядка, представляет собой пример случая (3, 2). Соответствующая S -функция имеет вид

$$S = \bar{z}m^3 + (z - b)m - \frac{a}{2}m^2 - c, \quad |z| < 1,$$

где

$$m = \frac{1}{6\bar{z}}(a - \sqrt{a^2 - 12(z - b)\bar{z}}).$$

Соотношения, определяющие параметры x, t_2 бездисперсионной иерархии КП, имеют вид

$$x = \frac{b}{6}(\sqrt{a^2 - 12} - a), \quad t_2 = \frac{1}{108}(18a - a^3 + (a^2 - 12)^{3/2}). \quad (31)$$

Соответствующее решение t_2 -потока бездисперсионной иерархии КП есть

$$z = a\left(a - \sqrt{a^2 - 12}\right)\frac{p}{12} + \frac{3x}{\sqrt{a^2 - 12}} + \frac{1}{12}\left[\left(a\left(a - \sqrt{a^2 - 12}\right)p + \frac{36x}{\sqrt{a^2 - 12}}\right)^2 - 12\left(\left(a - \sqrt{a^2 - 12}\right)p + \frac{3(a + \sqrt{a^2 - 12})x}{\sqrt{a^2 - 12}}\right)^2\right]^{1/2},$$

где $a = a(t_2)$ получается из (31).

ПРИМЕР 3. Класс решений (2, 3) представляет наибольший интерес, поскольку он содержит решения бездисперсионной иерархии КП, зависящие от параметров x, t_2, t_3 . Рассмотрим уравнение

$$S_{\bar{z}} = \theta(1 - |z|)(S_z)^2, \quad (32)$$

в котором $S|_{\bar{z}=0}$ есть многочлен третьего порядка. Выбирая $m_0 := S_z|_{\bar{z}} = az^2 + bz + c$ и используя параметризацию (18), получим

$$f(m) = -\frac{b}{2a}m + \frac{1}{12a^2}(4am + b^2 - 4ac)^{3/2} + d = -\frac{b}{2a}m + \frac{1}{12a^2}(4a\bar{z}m + 2az + b)^3 + d \quad (33)$$

и

$$m = \frac{1}{8\bar{z}^2}\left[\frac{1}{a} - 4\left(z + \frac{b}{2a}\right)\bar{z} - \sqrt{\frac{4}{a}\left(\frac{b^2}{a} - 4c\right)\bar{z}^2 - \frac{8}{a}\left(z + \frac{b}{2a}\right)\bar{z} + \frac{1}{a^2}}\right]. \quad (34)$$

Тем самым получим, что

$$S = \left(z + \frac{b}{2a}\right)m + \bar{z}m^2 - \frac{1}{12a^2}(4a\bar{z}m + 2az + b)^3 - d, \quad |z| < 1. \quad (35)$$

Теперь становится ясно, что для того чтобы функция S была непрерывной, необходимо потребовать [11], чтобы

$$\frac{4}{a}\left(\frac{b^2}{a} - 4c\right)\bar{z}^2 - \frac{8}{a}\left(z + \frac{b}{2a}\right)\bar{z} + \frac{1}{a^2} \neq 0, \quad |z| < 1.$$

Заметим также, что функция S регулярна в начале координат, так как $\lim_{z \rightarrow 0} m = c$.

Приведем теперь схему вычисления $u = -2\partial S_1/\partial x$. Сначала надо вычислить несколько первых членов в разложении функции S при $|z| = 1$. Для этого полезно использовать следующее тождество:

$$S_z = m - \left(\frac{m}{z}\right)^2, \quad |z| = 1. \quad (36)$$

Теперь, раскладывая m при $|z| = 1$ и полагая

$$S_z = 3t_3 z^2 + 2t_2 z + x - \frac{S_1}{z^2} + \dots, \quad |z| = 1,$$

в формуле (36), получим

$$\begin{aligned} 3t_3 &= -\frac{3}{4} + \frac{3}{8a} + \frac{1}{32a^2}((1-8a)^{3/2} - 1), & 2t_2 &= \frac{b}{8a^2}(1-4a-\sqrt{1-8a}), \\ x &= -\frac{b^2}{8a^2} \left(1 + \frac{4a-1}{2\sqrt{1-8a}}\right) + \frac{c}{4a}(1-\sqrt{1-8a}) \end{aligned}$$

и

$$S_1 = \frac{(2b^2 + (1-8a)c)^2}{(1-8a)^{5/2}}. \quad (37)$$

Из этих выражений следует, что $u = -2\partial S_1/\partial x$ дается выражением ($t := t_3$, $y := t_2$)

$$u = \frac{4(5-12t+4\sqrt{1-12t})^2((-1+12t)x-4y^2)}{3(1+4t)(1-12t+2\sqrt{1-12t})^3}, \quad (38)$$

которое удовлетворяет системе (8). Заметим, что в соответствии с работой [8] решение (38) принадлежит классу решений бездисперсионного уравнения КП, которые задают структуры Эйнштейна–Вейля, конформные по отношению к метрике Эйнштейна.

Более общее рассмотрение решений, допускающих разложение (19), но теперь уже с $s \neq 0$ и с нетривиальной зависимостью от переменной z в правой части, будет проведено в последующих работах.

Благодарности. Б. К. благодарен организаторам программы “Интегрируемые системы” за финансовую поддержку. Работа Б. К. была частично поддержана грантом SOFIN 2000 “Sintesi”. Пребывание Л. М. А. в Университете г. Кембриджа было профинансировано Fundación Banco Bilbao Vizcaya Argentaria. Работа Е. М. была частично поддержана CICYT (проект PB98-0821).

Список литературы

- [1] *В. Е. Захаров*. Функц. анализ и его прилож. 1980. Т. 14. № 2. С. 15–24; *Physica D*. 1981. V. 3. P. 193–202; *P. D. Lax, C. D. Levermore*. *Commun. Pure Appl. Math.* 1983. V. 36. P. 253–290; P. 571–593; P. 809–830.
- [2] *Y. Kodama*. *Phys. Lett. A*. 1988. V. 129. P. 223–226; 1990. V. 147. P. 477–482; *И. М. Кривчер*. Функц. анализ и его прилож. 1988. Т. 22. № 3. С. 37–52; *I. M. Krichever*. *Commun. Pure Appl. Math.* 1994. V. 47. P. 437–475.
- [3] *Б. А. Дубровин, С. П. Новиков*. УМН. 1989. Т. 44. № 6. С. 29–98.
- [4] *K. Takasaki, T. Takebe*. *Int. J. Mod. Phys. A*. 1992. V. 1. Suppl. 1B. P. 889–922; *Rev. Math. Phys.* 1995. V. 7. P. 743–818.
- [5] *N. M. Ercolani et al. (eds.)*. *Singular Limits of Dispersive Waves*. *Nato ASI Ser. B*. V. 320. New York: Plenum, 1994.
- [6] *I. M. Krichever*. *Commun. Math. Phys.* 1992. V. 143. P. 415–429.
- [7] *B. A. Dubrovin*. *Commun. Math. Phys.* 1992. V. 145. P. 195–203; *B. A. Dubrovin, Y. Zhang*. *Commun. Math. Phys.* 1998. V. 198. P. 311–361; Normal forms of hierarchies of integrable PDEs, Frobenious manifolds and Gromov-Witten invariants. *math.DG/0108160*.
- [8] *M. Dunajski, L. J. Mason, P. Tod*. *J. Geom. Phys.* 2001. V. 37. P. 63–93.
- [9] *J. Gibbons, S. P. Tsarev*. *Phys. Lett. A*. 1999. V. 258. P. 263–271; *P. B. Wiegmann, A. Zabrodin*. *Commun. Math. Phys.* 2000. V. 213. P. 523–538.
- [10] *B. Konopelchenko, L. Martinez Alonso, O. Ragnisco*. *J. Phys. A*. 2001. V. 34. P. 10209–10217.
- [11] *B. Konopelchenko, L. Martinez Alonso*. *Phys. Lett. A*. 2001. V. 286. P. 161–166.
- [12] *И. Н. Векун*. Обобщенные аналитические функции. 2-е изд. М.: Наука, 1988.
- [13] *L. V. Ahlfors*. *Lectures on Quasi-Conformal Mappings*. Princeton, NJ: Van Nostrand, 1966.
- [14] *O. Lehto*. *Univalent Functions and Teichmüller Spaces*. Berlin: Springer, 1987.
- [15] *Q. Lehto, K. I. Virtanen*. *Quasiconformal Mappings in the Plane*. Berlin: Springer, 1973.
- [16] *B. Bojarski*. *Symp. Math.* 1976. V. 18. P. 458–499; *T. Iwaniec*. *Symp. Math.* 1976. V. 18. P. 501–517.