Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ломбардо, Обратное спектральное преобразование для q -деформированного уравнения Вольтерра, *ТМФ*, 2002, том 133, номер 2, 259–269

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf395>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 08:44:06

© 2002 г.

С. Ломбардо*

ОБРАТНОЕ СПЕКТРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДЛЯ q -ДЕФОРМИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА

Изучается q -деформация уравнения Вольтерра с помощью обратного спектрального преобразования. Вычислена зависимость q -деформированных спектральных данных от времени и явно построено односолитонное решение.

Ключевые слова: q -уравнения, q -деформации.

1. ВВЕДЕНИЕ

С уравнением Вольтерра, или моделью Вольтерра, обычно связывают дифференциально-разностные уравнения

$$\frac{dc_n}{dt} = c_n(c_{n+1} - c_{n-1}), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(t) > 0. \quad (1)$$

Вольтерра использовал эту модель для изучения экологических проблем [1], однако она оказалась достаточно универсальной и имеет множество применений [2]. В последнее время интерес к различным версиям этой модели заметно возрос, в частности было обнаружено, что модель связана с уравнениями Лиувилля, и ее правильная гамильтонова интерпретация приводит к решеточной деформации алгебры Вирасоро [3]. Исследовался также квантовый вариант модели [4], а ее q -деформация, как выяснилось, естественно возникает как редукция подобия q -деформированного уравнения Пенлеве I [5]. Этот q -деформированный вариант уравнения Вольтерра является начальной точкой нашего исследования.

Насколько нам известно, q -деформация модели Вольтерра

$$q^2 D_t \bar{R}_n = q^2 T_t (\bar{R}_n \bar{R}_{n+1}) - \bar{R}_n \bar{R}_{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (2)$$

впервые появляется в статье Нийхоффа [5], посвященной установлению связи между q -деформацией дискретного уравнения Пенлеве I и q -деформацией ортогональных многочленов. Здесь $q^a D_t$ — оператор q -дифференцирования

$$q^a D_t f(t) \equiv \frac{f(tq^a) - f(t)}{(q^a - 1)t} = \frac{q^a T_t f(t) - f(t)}{(q^a - 1)t}, \quad a \in \mathbb{Z}, \quad (3)$$

*Department of Applied Mathematics, University of Leeds, Leeds, UK.
E-mail: sara@maths.leeds.ac.uk

${}_q^a T_t$ – оператор q -дилатации:

$${}_q^a T_t f(t) \equiv f(tq^a), \quad a \in \mathbb{Z}. \quad (4)$$

В действительности мы будем изучать систему уравнений

$${}_q^2 D_t R_n = Q_n - Q_{n+1}, \quad (5)$$

$$({}_q^2 T_t R_n) Q_{n-1} = Q_n R_{n-2}, \quad (6)$$

которая сводится к (2) в предположении, что $\overline{R}_n = R_n + (1 - q^2)tQ_{n+1}$.

Уравнения (5), (6) можно представить как *условия совместности* для системы линейных уравнений

$$\hat{\psi}_{n+1} + R_n \hat{\psi}_{n-1} = \lambda \hat{\psi}_n, \quad (7)$$

$${}_q^2 D_t \hat{\psi}_n = Q_n \hat{\psi}_{n-2}, \quad (8)$$

где уравнение (7) тесно связано со стандартной *вспомогательной линейной задачей* для модели Вольтерра (см. раздел 3), решенной много лет назад (см., например, [2]), тогда как уравнение (8) является q -дифференциальным уравнением; оно определяет временную зависимость спектральных данных.

Целью данной работы являются нахождение временной зависимости спектральных данных и явное построение *односолитонного решения* системы (7), (8). Мы покажем, что решение имеет некоторые *солитоноподобные* черты, хотя оно и движется с непостоянной скоростью. При $q \rightarrow 1$ решение стремится к стандартному односолитонному решению уравнения (1).

Прежде чем двигаться дальше, обсудим очень важное свойство уравнений такого типа, характеризующее q -уравнения в целом. Несмотря на сходство q -производной и частной производной по времени (в действительности по любой переменной), их свойства достаточно различны. Действительно, в то время как из равенства $\partial_t f(t, \cdot) = 0$ немедленно следует, что $f(t, \cdot)$ не зависит от времени t , имеется бесконечное множество *зависящих от времени* функций, которые принадлежат ядру оператора ${}_q D_t$, т.е.

$$\text{Ker}({}_q D_t) \equiv \{f(t, \cdot): {}_q D_t f(t, \cdot) = 0\}.$$

Например, любая функция $f(\ln t / \ln q)$, где $f(y) = f(y + 1)$, принадлежит $\text{Ker}({}_q D_t)$. Поэтому необходимо обобщить задачу Коши так, чтобы обеспечить *существование* и *единственность* решения в этом случае. Для решения такой задачи мы ограничимся классом функций, мероморфных в окрестности $t = 0$. Следующая лемма позволяет сформулировать задачу Коши для q -уравнений с обычными и частными производными.

ЛЕММА. Пусть $g(t)$ – мероморфная функция t в открытой окрестности $t = 0$. Пусть также $g(t) \in \text{Ker}({}_q D_t)$, т.е. ${}_q D_t g(t) = 0$. Тогда $g(t)$ – константа, т.е. не зависит от t .

ЛОКАЗАТЕЛЬНОСТЬ. Если $g(t)$ мероморфна вблизи $t = 0$, ее можно представить в виде сходящегося ряда Лорана

$$g(t) = \sum_{k=-n}^{+\infty} g_k t^k. \quad (9)$$

Тогда из ${}_q D_t g(t) = 0$ следует, что

$${}_q D_t g(t) = \sum_{k=-n}^{+\infty} g_k t^{k-1} \frac{q^k - 1}{q - 1} = 0, \quad (10)$$

откуда

$$g_k t^{k-1} \frac{q^k - 1}{q - 1} = 0, \quad (11)$$

т.е. $g_k = 0$ для любого $k \neq 0$. Следовательно,

$$g(t) = g_0 = \text{const}. \quad (12)$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что *все* функции являются мероморфными в окрестности $t = 0$.

2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЛАКСА

Проведем подробное дифференцирование q -уравнений Вольтерра (2), а также уравнений (5), (6). Сначала возьмем q -временную производную уравнения (7):

$${}_q D_t \hat{\psi}_{n+1} + {}_q D_t (R_n \hat{\psi}_{n-1}) = \lambda {}_q D_t \hat{\psi}_n. \quad (13)$$

Предполагая, что ${}_q D_t \lambda = 0$, и вспоминая q -модифицированное правило Лейбница

$${}_q D_t (f \cdot g) = ({}_q D_t f)g(t) + f(q^\alpha t)({}_q D_t g) = ({}_q D_t f)g(q^\alpha t) + f(t)({}_q D_t g), \quad (14)$$

получим

$$Q_{n+1} \hat{\psi}_{n-1} + {}_q D_t R_n \hat{\psi}_{n-1} + R_n (q^2 t) Q_{n-1} \hat{\psi}_{n-3} = \lambda Q_n \hat{\psi}_{n-2}. \quad (15)$$

Используя теперь уравнение (7), разрешенное относительно $\hat{\psi}_{n-2}$ ($\lambda \hat{\psi}_{n-2} = \hat{\psi}_{n-1} + R_{n-2} \hat{\psi}_{n-3}$), мы можем переписать последнее выражение как

$$(Q_{n+1} + {}_q D_t R_n - Q_n) \hat{\psi}_{n-1} + (R_n (q^2 t) Q_{n-1} - Q_n R_{n-2}) \hat{\psi}_{n-3} = 0. \quad (16)$$

Полагая коэффициенты при членах $\hat{\psi}_{n-1}$ и $\hat{\psi}_{n-3}$ равными нулю, окончательно получаем соответственно уравнения (5) и (6). Из уравнения (5) следует, что

$${}_q D_t R_n = R_n + (q^2 - 1)t(Q_n - Q_{n+1}). \quad (17)$$

Уравнение (6) можно теперь переписать в виде

$$R_n Q_{n-1} + (q^2 - 1)t(Q_n - Q_{n+1})Q_{n-1} = Q_n R_{n-2} \quad (18)$$

и, перегруппировав члены, получить

$$\frac{Q_n}{Q_{n-1}} = \frac{\bar{R}_n}{\bar{R}_{n-2}}, \quad (19)$$

где

$$\bar{R}_n = R_n + (1 - q^2)tQ_{n+1}. \quad (20)$$

Из соотношения (19) следует, что Q_n можно представить в виде

$$Q_n = -c\bar{R}_n\bar{R}_{n-1}, \quad (21)$$

где множитель c не зависит от n , однако может зависеть от времени. Тогда из (5) получаем уравнение

$$q^2 D_t \bar{R}_n = q^2 T_t (c(t)\bar{R}_n\bar{R}_{n+1}) - c(t)\bar{R}_n\bar{R}_{n-1}. \quad (22)$$

Выбор $c = \text{const}$ ($c = 1$ в работе [5]) приводит нас к уравнению (2), однако в этом случае Q_n и R_n имеют зависящие от времени асимптотики при $|n| \rightarrow \infty$.

Мы будем исследовать задачу, в которой R_n и Q_n имеют постоянные и не зависящие от времени асимптотики. Поэтому выберем $Q_n \rightarrow -1$, $R_n \rightarrow 1$ при $|n| \rightarrow \infty$; отсюда сразу же следует, что

$$c(t) = [1 - (1 - q^2)t]^{-2}. \quad (23)$$

3. ПРЯМОЕ И ОБРАТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАССЕЯНИЯ

Предположим, что все R_n положительны, $R_n \rightarrow 1$ при $|n| \rightarrow \infty$ и бесконечное произведение

$$\Delta_\infty = \prod_{n=-\infty}^{+\infty} R_n < \infty \quad (24)$$

сходится. Оказывается, что если функции R_n удовлетворяют системе (5), (6), то Δ_∞ не зависит от времени; поэтому, если исходно она была ограничена, то остается ограниченной в любой момент времени t . Действительно, имеет место следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Предположим, что $\Delta_\infty = \prod_{-\infty}^{+\infty} R_k$ — аналитическая функция в окрестности $t = 0$. Тогда Δ_∞ постоянна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если вспомнить лемму, то оказывается, что требуется лишь доказать ${}_q D_t \Delta_\infty = 0$, т.е. ${}_q T_t \Delta_\infty = \Delta_\infty$. Имеем

$${}_q T_t \Delta_\infty = {}_q T_t \left(\prod_{k=-\infty}^{\infty} R_k \right) = \prod_{k=-\infty}^{\infty} {}_q T_t R_k. \quad (25)$$

Теперь из уравнения (6) получаем равенство ${}_q T_t R_k = Q_k R_{k-2} / Q_{k-1}$, подстановка которого в предыдущее соотношение дает искомый результат.

Простое калибровочное преобразование

$$\psi_n = \sqrt{\Delta_n} \hat{\psi}_n, \quad \Delta_n = \prod_{k=n+1}^{\infty} R_k, \quad (26)$$

отображает задачу (7) в соответствующую задачу

$$\sqrt{R_{n+1}} \psi_{n+1} + \sqrt{R_n} \psi_{n-1} = \lambda \psi_n \quad (27)$$

для самосопряженного оператора

$$L_{nm} = \sqrt{R_n} \delta_{n,m+1} + \sqrt{R_m} \delta_{n+1,m}. \quad (28)$$

Связанные с этим оператором прямое и обратное преобразования рассеяния подробно изучены (см., например, [2]). Напомним кратко основные факты и определения, которые потребуются для нашего исследования.

Задача на собственные значения (27) имеет дважды вырожденный непрерывный спектр, заполняющий интервал $I = \{\lambda; -2 \leq \lambda \leq 2\}$; соответствующие собственные функции ограничены для всех n . В общем случае задача (27) также может иметь вещественные дискретные собственные значения. Мы предполагаем, что их конечное число, т.е. что $J = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N; |\lambda_k| > 2\}$. Об этом множестве обычно говорят как о дискретном спектре, а соответствующие собственные функции являются квадратично-интегрируемыми.

Если $\lambda \in I$, то асимптотика ψ_n при $|n| \rightarrow \infty$ имеет вид

$$\psi_n = c_1 z^{-n} + c_2 z^n + o(1), \quad |z| = 1, \quad \lambda = z + z^{-1}. \quad (29)$$

Можно ввести *функции Йоста*, т.е. специальные решения уравнения (27), определяемые асимптотическим поведением

$$\psi_n = z^n + o(1) \quad \text{при } n \rightarrow +\infty; \quad \phi_n = z^{-n} + o(1) \quad \text{при } n \rightarrow -\infty. \quad (30)$$

Функции ψ_n и ϕ_n аналитичны внутри единичной окружности в комплексной z -плоскости. Вторая пара специальных решений $\tilde{\psi}_n$ и $\tilde{\phi}_n$ определяется асимптотическим поведением

$$\tilde{\psi}_n = z^{-n} + o(1) \quad \text{при } n \rightarrow +\infty; \quad \tilde{\phi}_n = z^n + o(1) \quad \text{при } n \rightarrow -\infty. \quad (31)$$

Они аналитичны вне единичной окружности.

Заметим, что эти функции, являясь решениями вещественнозначного уравнения с асимптотическими формами, задаваемыми вещественнозначными функциями z , удовлетворяют соотношениям $\bar{\psi}_n(z) = \psi_n(\bar{z})$, $\bar{\phi}_n(z) = \phi_n(\bar{z})$ и т.д. Очевидно, что на единичной окружности

$$\tilde{\psi}_n(z) = \bar{\psi}_n(z), \quad \tilde{\phi}_n(z) = \bar{\phi}_n(z), \quad |z| = 1. \quad (32)$$

Продолжая эти соотношения на комплексную z -плоскость, получаем

$$\tilde{\psi}_n(z) = \bar{\psi}_n(\bar{z}^{-1}) = \psi_n(z^{-1}), \quad \phi_n(z^{-1}) = \tilde{\phi}_n(z) = \bar{\phi}_n(\bar{z}^{-1}). \quad (33)$$

На z -плоскости спектр является непрерывным на единичной окружности ($\lambda = z + z^{-1}$). При $|z| = 1$ решения ψ_n и $\bar{\psi}_n$ линейно независимы, а поскольку уравнение (27) имеет не более двух линейно независимых решений, то любое его решение должно быть линейной комбинацией ψ_n и $\bar{\psi}_n$. В частности,

$$\phi_n = \alpha(z)\bar{\psi}_n + \beta(z)\psi_n, \quad |z| = 1, \quad (34)$$

$$|\alpha(z)|^2 - |\beta(z)|^2 = 1, \quad |z| = 1. \quad (35)$$

Точки $z_k: |z| < 1$, $k = 1, \dots, N$, в которых $\alpha(z) = 0$, взаимно однозначно соответствуют собственным значениям дискретного спектра оператора L : $\lambda_k = z_k + z_k^{-1}$. В этих точках

$$\phi_n(z_k) = b_k \psi_n(z_k), \quad (36)$$

т.е. $\phi_n(z_k)$ являются соответствующими собственными функциями.

Назовем множество

$$\mathcal{S}(n; z) = \left\{ z_k, b_k, r(z) \equiv \frac{\beta(z)}{\alpha(z)}; k = 1, 2, \dots, N \right\} \quad (37)$$

спектральным преобразованием, а его элементы — *данными рассеяния* или *спектральными данными* для оператора L . Заметим, что для каждого n

$$\psi_n(-z) = (-1)^n \psi_n(z), \quad \phi_n(-z) = (-1)^n \phi_n(z), \quad (38)$$

так что

$$\alpha(-z) = \alpha(z), \quad \beta(-z) = \beta(z), \quad |z| = 1. \quad (39)$$

Таким образом, в терминах спектральных данных оператор L выбирается согласно условию $r(-z) = r(z)$, $|z| = 1$. Более того, точки z_k образуют *множество*, симметричное относительно $z = 0$, и в симметричных точках этого множества значения b_k одни и те же.

Имеется взаимно однозначное отображение между спектральными данными и последовательностью R_n ; задача нахождения данных рассеяния для заданной последовательности $\{R_n\}$ называется *прямым спектральным преобразованием*. Решение *обратной*

спектральной задачи, т.е. восстановление R_n по заданному набору $\mathcal{S}(n, t; z)$, подробно описано в работе [2].

Обратную спектральную задачу можно явно решить для безотражательных потенциалов, когда $r(z)$ тождественно равно нулю. Введем обозначение

$$\phi_n(z) = z^{-n} \theta_n(z) \sqrt{\Delta_n}, \quad \tilde{\psi}_n(z) = z^{-n} \tilde{\chi}_n(z) \sqrt{\Delta_n}, \quad \psi_n(z) = z^n \chi_n(z) \sqrt{\Delta_n}. \quad (40)$$

В силу уравнений (33) имеем

$$\tilde{\chi}_n(z) = \chi_n(z^{-1}). \quad (41)$$

Функции $\theta_n(z)$ и $\tilde{\chi}_n(z)$ аналитичны соответственно внутри и вне единичной окружности; $\tilde{\chi}_n(z)$ удовлетворяет соотношению

$$z \tilde{\chi}_{n-1} + z^{-1} R_{n+1} \tilde{\chi}_{n+1} = (z + z^{-1}) \tilde{\chi}_n \quad (42)$$

(такое же уравнение имеет место для $\theta_n(z)$). Из свойства аналитичности и уравнения (41) следует, что

$$R_n = \frac{\tilde{\chi}_{n-1}(0)}{\tilde{\chi}_n(0)}. \quad (43)$$

Используя теперь уравнения (6), получаем

$$Q_n = -\gamma(t) \frac{\tilde{\chi}_{n-2}(0)}{q^2 T_t \tilde{\chi}_n(0)}, \quad (44)$$

где множитель $\gamma(t)$ можно определить из асимптотического поведения $\tilde{\chi}_n$ и Q_n ; в нашем случае он оказывается равным единице. Тогда решение имеет вид

$$R_n = \frac{\tilde{\chi}_{n-1}(0)}{\tilde{\chi}_n(0)}, \quad Q_n = -\frac{\tilde{\chi}_{n-2}(0)}{q^2 T_t \tilde{\chi}_n(0)}, \quad (45)$$

где $\tilde{\chi}_n$ получается из решения обратной задачи.

В случае безотражательных потенциалов решение определяется характеристиками только дискретных спектров; в общем случае $\alpha(z)$ имеет N нулей и записывается как

$$\alpha(z) = \operatorname{sgn} \left(\prod_{k=1}^N z_k \right) \prod_{k=1}^N \frac{z - z_k}{z z_k - 1}. \quad (46)$$

В этом случае функция $\tilde{\chi}_n(z)$ является рациональной, и ее можно представить в виде

$$\tilde{\chi}_n(z) = 1 + \sum_{m=1}^N \frac{z_m^{2n} b_m \tilde{\chi}_n(z_m^{-1})}{\alpha'(z_m)(z - z_m)}, \quad (47)$$

где коэффициенты $\tilde{\chi}_n(z_k^{-1})$, $k = 1, \dots, N$, являются решениями замкнутой системы линейных алгебраических уравнений

$$\tilde{\chi}_n(z_k^{-1}) = 1 + \sum_{m=1}^N \frac{z_m^{2n} b_m \tilde{\chi}_n(z_m^{-1})}{\alpha'(z_m)(z_k^{-1} - z_m)}. \quad (48)$$

Подробности этого вывода можно найти в работе [2].

В следующем разделе мы найдем временную зависимость спектральных данных. В частности, мы покажем, что если R_n и Q_n удовлетворяют q -уравнению Вольтерра, то $\{z_k\}$ и $\alpha(z)$ не зависят от времени, тогда как $r(z)$ и b_k являются явными функциями времени.

В простейшем случае (односолитонное решение) $\alpha(z)$ имеет два нуля: $z_1 = z_0$, $z_2 = -z_0$, $|z_0| < 1$, и система алгебраических уравнений (48) состоит только из одного уравнения; его решение имеет вид

$$\tilde{\chi}_n(z_1^{-1}) = \tilde{\chi}_n(z_2^{-1}) = A_n = \left(1 + \frac{2f(t)z_0^{2n}}{(z_0^{-2} - z_0^2)}\right)^{-1}, \quad f(t) = -\frac{z_0}{\alpha'(z_0)}b_0(t). \quad (49)$$

Отсюда

$$\tilde{\chi}_n(z; t) = 1 - \frac{f(t)z_0^{2n-1}A_n(t)}{(z - z_0)} + \frac{f(t)z_0^{2n-1}A_n(t)}{(z + z_0)}, \quad (50)$$

$$\tilde{\chi}_n(z; t)|_{z=0} = 1 + 2f(t)z_0^{2n-2}A_n(t). \quad (51)$$

Тогда из соотношения (43) следует, что

$$R_n = \frac{\tilde{\chi}_{n-1}(0)}{\tilde{\chi}_n(0)} = \frac{1 + 2f(t)z_0^{2n-4}A_{n-1}(t)}{1 + 2f(t)z_0^{2n-2}A_n(t)}. \quad (52)$$

Аналогично из (44) следует, что

$$Q_n = -\frac{\tilde{\chi}_{n-2}(0)}{q^2 T_t \tilde{\chi}_n(0)} = -\frac{1 + 2f(t)z_0^{2n-6}A_{n-2}(t)}{1 + 2f(q^2 t)z_0^{2n-2}A_n(q^2 t)}. \quad (53)$$

В частности, для односолитонного решения

$$\Delta_\infty = \frac{\tilde{\chi}_{-\infty}(0)}{\tilde{\chi}_{+\infty}(0)} = z_0^{-4}. \quad (54)$$

4. ВРЕМЕННАЯ ЭВОЛЮЦИЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Чтобы найти временную эволюцию спектральных данных, необходимо принять во внимание уравнение (8), описывающее q -дифференциальную временную эволюцию. Заметим, что спектральные данные были определены для задачи (27), которая отличается от (7) калибровочным преобразованием (26). Используя это преобразование, можно отождествить спектральные задачи для операторов, соответствующих (7) и (27). Таким образом получаем

$$\hat{\phi}_n = \alpha(z)\bar{\hat{\psi}}_n + \beta(z)\hat{\psi}_n, \quad (55)$$

где функции $\hat{\phi}_n$, $\bar{\hat{\psi}}$ и $\hat{\psi}_n$ удовлетворяют уравнению (7) и имеют асимптотики

$$\hat{\phi}_n \rightarrow z^{-n}(\Delta_\infty)^{-1/2} \quad \text{при } n \rightarrow -\infty, \quad (56)$$

$$\hat{\psi}_n \rightarrow z^n, \quad \bar{\hat{\psi}}_n \rightarrow z^{-n} \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (57)$$

Аналогично стандартному подходу [2], из совместности (7) и (8), асимптотического вида функций Йоста и сформулированного нами предложения следует, что

$${}_q D_t \hat{\phi}_n - Q_n \hat{\phi}_{n-2} = z^2 {}_q T_t \hat{\phi}_n. \quad (58)$$

Подставляя (55) в (58), находим уравнения для $\alpha(z)$ и $\beta(z)$:

$${}_q D_t \alpha = -z^2 \alpha + z^2 {}_q T_t \alpha, \quad (59)$$

$${}_q D_t \beta = -z^{-2} \beta + z^2 {}_q T_t \beta. \quad (60)$$

Из (59) следует, что ${}_q D_t \alpha = 0$, а потому с учетом леммы получаем, что $\alpha(z)$ постоянна по времени.

Теперь рассмотрим уравнение (60). Используя определение q -производной (3), для $\beta(z, t)$ получаем уравнение

$${}_q D_t \beta = \frac{1 - z^{-4}}{z^{-2} + (1 - q^2)t} \beta. \quad (61)$$

Аналогично находим, что $b_k(z, t)$ удовлетворяет такому же уравнению

$${}_q D_t b_k = \frac{1 - z^{-4}}{z^{-2} + (1 - q^2)t} b_k. \quad (62)$$

В частности, легко проверить, что

$${}_q D_t (|\alpha|^2 - |\beta|^2) = 0, \quad |z| = 1. \quad (63)$$

Чтобы решить уравнения (61) и (62), перепишем их (например, уравнение для β) как

$${}_q T_t \beta = \frac{1 - (q^2 - 1)z^{-2}t}{1 - (q^2 - 1)z^2t} \beta, \quad (64)$$

т.е.

$$\beta(q^2 t) = \frac{1 - (q^2 - 1)z^{-2}t}{1 - (q^2 - 1)z^2t} \beta(t). \quad (65)$$

После k итераций уравнения (65) получим

$$\beta(q^{2k} t) = \prod_{j=0}^k \frac{1 - (q^2 - 1)z^{-2}q^{2j}t}{1 - (q^2 - 1)z^2q^{2j}t} \beta(t). \quad (66)$$

Отсюда, предполагая $|q| < 1$, в пределе $k \rightarrow \infty$ имеем

$$\beta(0) = \prod_{j=0}^{\infty} \frac{1 - (q^2 - 1)z^{-2}q^{2j}t}{1 - (q^2 - 1)z^2q^{2j}t} \beta(t), \quad (67)$$

что дает

$$\beta(t) = \frac{((q^2 - 1)z^2t; q^2)_\infty}{((q^2 - 1)z^{-2}t; q^2)_\infty} \beta(0), \quad (68)$$

где мы использовали обозначения

$$(a; q)_\infty \equiv \prod_{k=0}^{\infty} (1 - aq^k), \quad (a; q)_0 = 1; \quad |q| < 1, \quad a \in \mathbb{C}. \quad (69)$$

Уравнение (68) можно переписать в терминах q -экспонент [6], которые определяются как

$$e_q(\zeta) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\zeta^k}{(q; q)_k} = \frac{1}{(\zeta; q)_\infty}, \quad |\zeta| < 1, \quad (70)$$

$$E_q(\zeta) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{k(k-1)/2} \zeta^k}{(q; q)_k} = (-\zeta; q)_\infty, \quad \zeta \in \mathbb{C}; \quad (71)$$

$e_q(\zeta)$ и $E_q(\zeta)$ представляют собой наиболее элементарные q -гипергеометрические ряды и являются q -аналогами стандартных экспонент в соответствии с предельными формулами

$$\lim_{q \rightarrow 1} E_q((1 - q)\zeta) = e^\zeta = \lim_{q \rightarrow 1} e_q((1 - q)\zeta). \quad (72)$$

Здесь предел должен рассматриваться почленно; иногда он обозначается как $\lim_{q \uparrow 1}$.

Используя эти обозначения, можно окончательно выразить решения уравнений (61), (62) в терминах *элементарных q -функций*, т.е.

$$\beta(t) = e_{q^2}((q^2 - 1)z^{-2}t) E_{q^2}((1 - q^2)z^2t) \beta(0), \quad (73)$$

$$b_k(t) = e_{q^2}((q^2 - 1)z_k^{-2}t) E_{q^2}((1 - q^2)z_k^2t) b_k(0). \quad (74)$$

В частности (с учетом (49)), получаем функцию

$$f(t) = e_{q^2}((q^2 - 1)z_0^{-2}t) E_{q^2}((1 - q^2)z_0^2t) f(0), \quad (75)$$

которая, очевидно, аналитична в окрестности $t = 0$.

Окончательно, подставляя (75) в (49), (52) и (44), получаем в явном виде односолитонное решение q -уравнения Вольтерра.

Отметим, что, используя (72), мы получаем

$$\lim_{q^2 \uparrow 1} \beta(t) = e^{(z^2 - z^{-2})t} \beta(0), \quad \lim_{q^2 \uparrow 1} b_k(t) = e^{(z_k^2 - z_k^{-2})t} b_k(0), \quad (76)$$

т.е. стандартную временную зависимость (см. [2]). Отсюда в пределе $q \rightarrow 1$ воспроизводится *односолитонное решение* уравнения (1).

Сравнивая q -деформированное решение с решением уравнения (1) (см., например, [2]), можно сделать вывод о том, что при фиксированном t оба решения имеют одну и ту же форму (как функции n). Напротив, временные зависимости различны (см. рисунок):

Представление функции R_n изменением плотности изображения. Левая часть рисунка соответствует солитонному решению модели Вольтерра, а правая – солитонному решению q -деформированной модели Вольтерра (по осям отложены t и n).

q -деформированное решение *перемещается* с непостоянной скоростью вследствие сингулярностей (полюсов) функции e_{q^2} ($e_q(\zeta)$ является мероморфной функцией с простыми полюсами при $\zeta = q^{-k}$, $k \in \mathbb{Z}$).

Благодарности. Я благодарна А. В. Михайлову за то, что он привлек мое внимание к этой задаче, за полезные советы и поощрение к опубликованию данной работы, а также В. Кузнецову и Ф. Нийхоффу за стимулирующие обсуждения. Я признательна за гостеприимство сотрудникам Университета Лидса и Института математических наук Исаака Ньютона в Кембридже, где была выполнена часть данной работы в рамках программы “Интегрируемые системы”.

Список литературы

- [1] V. Volterra. *Lecçon sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie*. Paris: Guatier-Villars, 1931.
- [2] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский. *Теория солитонов: Метод обратной задачи*. М.: Наука, 1980.
- [3] L. D. Faddeev, L. A. Takhtajan. Liouville model on the lattice. In: *Field Theory, Quantum Gravity and Strings*. Lect. Notes Phys. V. 246. Eds. J. de Vega, N. Sánchez. Berlin: Springer, 1986. P. 66.
- [4] A. Yu. Volkov. *Phys. Lett. A*. 1992. V. 167. P. 345–355; A. B. Антонов. *ТМФ*. 1997. Т. 113. № 3. С. 384–396; hep-th/9607031.
- [5] F. W. Nijhoff. *Lett. Math. Phys.* 1994. V. 30. P. 327–336.
- [6] T. H. Koornwinder. q -Special function, a tutorial. math.CA/9403216; Special function and q -commuting variables. q-alg/9608008.