Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Лорис, Билинейные представления интегрируемых уравнений, *ТМФ*, 2002, том 133, номер 2, 270–278

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf396>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 12:54:43

БИЛИНЕЙНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ УРАВНЕНИЙ

Предложен метод, позволяющий получать операторы рекурсии и канонические пары Лакса непосредственно из билинейных тождеств типа Кадомцева–Петвиашвили. Приведенные примеры включают в себя уравнение Кортевега–де Фриза, уравнение Буссинеска и вещественный аналог нелинейного уравнения Шредингера.

Ключевые слова: солитон, симметрия, интегрируемость, нелинейное дифференциальное уравнение.

1. ВВЕДЕНИЕ

Для интегрируемых уравнений в частных производных, таких как уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ) [1] и Буссинеска [2] (которые были изначально получены для описания волн на поверхности воды, но потом нашли гораздо более широкое физическое применение [3]), характерно наличие бесконечного числа симметрий и законов сохранения. Эти симметрии старших порядков (связанные с дополнительными переменными времени) могут интерпретироваться как потоки совместных нелинейных уравнений в частных производных (НУрЧП) старших порядков. Интегрируемые НУрЧП образуют так называемые иерархии [4]. Оператор рекурсии (для некоторого уравнения) отображает симметрии в симметрии; его (формально) сопряженный оператор можно использовать для того, чтобы породить бесконечный набор законов сохранения. В данной работе будет описан метод, позволяющий получать такие операторы рекурсии.

Метод Хироты [5] представляет собой мощный метод исследования солитонных уравнений. Он основывается на билинейных представлениях и использовании фундаментальных полевых переменных, представляющих собой не что иное, как тау-функции, и дифференциальных операторов Хироты D_x :

$$D_x f \cdot g = f_x g - f g_x, \quad D_x^2 f \cdot g = f_{2x} g - 2f_x g_x + f g_{2x} \quad (1)$$

и т. д. (нижние индексы обозначают производные, $f_{nx} := \partial_x^n f$). Техника Хироты сводится к использованию так называемых билинейных тождеств (см. раздел 2) для иерархии Кадомцева–Петвиашвили (КП). Собственно уравнение КП имеет вид [6]

$$4u_{x,t_3} - 3u_{2t_2} - u_{4x} - 6(uu_x)_x = 0. \quad (2)$$

*Dienst Theoretische Natuurkunde Vrije Universiteit Brussel, Brussel, Belgium

Связь между формализмом Хироты и операторами рекурсии была детально изучена в работе [7]. В данной работе будет показано, как установить такую связь в случае билинейных тождеств для иерархий уравнения КП и модифицированного уравнения КП.

2. БИЛИНЕЙНЫЕ ТОЖДЕСТВА

Иерархия КП интегрируемых $(2 + 1)$ -мерных НУрЧП задается условиями совместности [8]

$$\frac{\partial B_m}{\partial t_n} - \frac{\partial B_n}{\partial t_m} = [B_n, B_m] \quad (3)$$

(для любых n, m) системы линейных уравнений

$$\Phi_{t_n} = B_n \Phi, \quad n = 2, 3, \dots, \quad (4)$$

т. е.

$$\Phi_{t_2} = \Phi_{2x} + u\Phi, \quad \Phi_{t_3} = \Phi_{3x} + \frac{3}{2}u\Phi_x + 3\left(\frac{1}{2}u_x + u_3\right)\Phi \quad (5)$$

и т. д. Эти НУрЧП для полей $u(\underline{t}), u_3(\underline{t}), \dots$, где $\underline{t} = (t_1 = x, t_2, t_3, \dots)$, можно записать в компактном виде после преобразования переменных следующего вида (билинеаризующего преобразования):

$$u = 2\partial_x^2 \ln \tau, \quad u_3 = \frac{1}{2}(\partial_{t_2} - \partial_x^2)\partial_x \ln \tau, \quad \dots \quad (6)$$

Тау-функция τ удовлетворяет следующему соотношению (билинейному тождеству КП) [8]:

$$\text{Res}_\lambda [\tau(\underline{t} - \underline{\epsilon}(\lambda))\tau(\underline{t}' + \underline{\epsilon}(\lambda))e^{\xi(\underline{t} - \underline{t}', \lambda)}] = 0 \quad (7)$$

для любых $\underline{t}, \underline{t}'$. Здесь Res_λ есть коэффициент при λ^{-1} , $\underline{\epsilon}(\lambda) = (\lambda^{-1}, \lambda^{-2}/2, \lambda^{-3}/3, \dots)$, а $\xi(\underline{t}, \lambda) = \lambda t_1 + \lambda^2 t_2 + \lambda^3 t_3 + \dots$. Это тождество порождает бесконечный набор уравнений в частных производных на поле τ . Прямо вычисляя коэффициент при λ^{-1} в формуле (7), получим уравнение КП в билинейной форме Хироты. Следуя работе [8], найдем (после замены переменных $\underline{t} = \underline{x} - \underline{y}$, $\underline{t}' = \underline{x} + \underline{y}$)

$$\text{Res}_\lambda [\tau(\underline{x} - \underline{y} - \underline{\epsilon}(\lambda))\tau(\underline{x} + \underline{y} + \underline{\epsilon}(\lambda))e^{-2\xi(\underline{y}, \lambda)}] = 0, \quad (8)$$

или

$$\text{Res}_\lambda [e^{\xi(\tilde{\partial}_y, \lambda^{-1})}(\tau(\underline{x} - \underline{y})\tau(\underline{x} + \underline{y}))e^{-2\xi(\underline{y}, \lambda)}] = 0. \quad (9)$$

Используя определение

$$e^{\xi(\underline{t}, \lambda)} = \sum_{n \geq 0} \lambda^n p_n(\underline{t})$$

многочленов Шура $p_n(\underline{t})$, можно привести (9) к виду

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_j(-2\underline{y})p_{j+1}(\tilde{\partial}_y)\tau(\underline{x} - \underline{y})\tau(\underline{x} + \underline{y}) = 0 \quad (10)$$

для любого $\underline{y}$, или же с использованием оператора Хироты $\tilde{D} \equiv (D_1, D_2/2, D_3/3, \dots)$, где D_n – D -оператор Хироты по отношению к времени t_n (см. определение (1)), получим

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_j(-2\underline{y})p_{j+1}(\tilde{D}) \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} y_i D_i\right) \tau \cdot \tau = 0 \quad (11)$$

для любого $\underline{y}$. Низшие нетривиальные уравнения из набора (11) имеют вид:

$$\begin{aligned} (4D_1D_3 - 3D_2^2 - D_1^4)\tau \cdot \tau &= 0, \\ (3D_1D_4 - D_2D_1^3 - 2D_2D_3)\tau \cdot \tau &= 0, \\ (144D_1D_5 - 45D_1^2D_2^2 - 20D_1^3D_3 - 80D_3^2 + D_1^6)\tau \cdot \tau &= 0, \\ (36D_2D_4 + 4D_1^3D_3 - 32D_3^2 - 9D_1^2D_2^2 + D_1^6)\tau \cdot \tau &= 0, \quad \dots \end{aligned} \quad (12)$$

Первое уравнение из этого списка представляет собой уравнение КП в билинейной форме (2), в которой $u = 2\partial_x^2 \ln \tau$.

Линейная задача КП (4) также может быть записана в билинейном виде ($\Phi = \rho/\sigma$)

$$\text{Res}_\lambda [\tau(\underline{t} - \underline{\epsilon}(\lambda))\rho(\underline{t}' + \underline{\epsilon}(\lambda))e^{\xi(\underline{t} - \underline{t}', \lambda)}] = \rho(\underline{t})\tau(\underline{t}') \quad (13)$$

для любых $\underline{t}, \underline{t}'$, или же с использованием оператора Хироты можно записать

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_j(-2\underline{y})p_j(\tilde{D}) \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} y_i D_i\right) \rho \cdot \tau = \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} y_i D_i\right) \tau \cdot \rho \quad (14)$$

для любого $\underline{y}$. Фундаментальное билинейное уравнение, содержащееся в этом бесконечном наборе, имеет вид

$$(D_2 - D_1^2)\rho \cdot \tau = 0, \quad (15)$$

отвечающий линейному уравнению (5) при $\Phi = \rho/\sigma$ и $u = 2\partial_x^2 \ln \tau$.

3. ОПЕРАТОРЫ РЕКУРСИИ ДЛЯ РЕДУЦИРОВАННЫХ СИСТЕМ

В этом разделе показывается, как можно вывести операторы рекурсии для размерно редуцированной иерархии КП непосредственно из билинейного тождества КП (7). Отметим сначала, что оператор рекурсии, вообще говоря, не существует для собственно $(2+1)$ -мерного уравнения КП [9].

k -Редуцированная ($k = 2, 3, \dots$) иерархия задается условием симметричной редукции $\tau_{t_k} = \lambda\tau$, где λ – константа. Это условие подразумевает, что поля КП $u_2, u_3, \dots$ не зависят от переменной t_k (равно как и от переменных t_{2k}, t_{3k} и т.д.). Условие редукции также можно выразить в терминах оператора Лакса иерархии КП: $L^k = B_k$. При $k = 2$ получается иерархия КдФ, а при $k = 3$ – иерархия уравнения Буссинеска.

Вычисляя коэффициенты при членах y_m в билинейных уравнениях КП (11), получим, что

$$D_1 D_m \tau \cdot \tau = 2p_{m+1}(\tilde{D}) \tau \cdot \tau \quad (16)$$

для любого m . Вычисляя коэффициент при $y_m y_k$ (при $k \neq m$) в соотношении (11), получим уравнение

$$(2p_{m+k+1}(\tilde{D}) - p_{m+1}(\tilde{D})D_k - p_{k+1}(\tilde{D})D_m)\tau \cdot \tau = 0. \quad (17)$$

Выразив первое слагаемое в этой формуле с помощью уравнения (16), получим

$$(D_1 D_{m+k} - p_{m+1}(\tilde{D})D_k - p_{k+1}(\tilde{D})D_m)\tau \cdot \tau = 0. \quad (18)$$

В случае k -редуцированной иерархии КП, когда

$$\tau_{t_k} = \lambda \tau, \quad (19)$$

это соотношение принимает вид

$$(D_1 D_{m+k} - p_{k+1}(\tilde{D})D_m)\tau \cdot \tau = 0. \quad (20)$$

Соотношение (20) задает каноническую билинейную форму k -редуцированной иерархии КП. Оно связывает поток τ_{t_m} с потоком $\tau_{t_{m+k}}$ и (будучи записанным как многочлен по производным $D_1, D_2, \dots$) имеет фиксированную степень $k+2$, если k четно, и $k+1$ при нечетных k независимо от m .

Рассмотрим теперь случай $k=2$ (иерархия КдФ). В этом случае соотношение (20) имеет вид

$$\left(D_1 D_{m+2} - \left(\frac{D_3}{3} + \frac{D_1 D_2}{2} + \frac{D_1^3}{6} \right) D_m \right) \tau \cdot \tau = 0, \quad (21)$$

или

$$\left(D_1 D_{m+2} - \frac{1}{3} D_3 D_m - \frac{1}{6} D_1^3 D_m \right) \tau \cdot \tau = 0. \quad (22)$$

При $m=1$ это соотношение переходит в билинейное уравнение КдФ

$$(4D_1 D_3 - D_1^4)\tau \cdot \tau = 0, \quad (23)$$

которое, в свою очередь, будучи записанным через поле $q = 2 \ln \tau$, принимает вид

$$4q_{x,t_3} = q_{4x} + 3q_{2x}^2. \quad (24)$$

Для $u = q_{2x}$ получаем

$$4u_{t_3} = u_{3x} + 6uu_x. \quad (25)$$

При произвольном m соотношение (22) представляет собой рекурсионное соотношение для иерархии КдФ:

$$q_{x,t_{m+2}} - \frac{1}{3} q_{t_3,t_m} - \frac{1}{6} q_{3x,t_m} - \frac{1}{2} q_{2x} q_{x,t_m} = 0. \quad (26)$$

Вычисляя x -производную этого соотношения и применяя уравнение КдФ (24), получим соотношение

$$u_{t_{m+2}} = \left(\frac{1}{4} \partial_x^2 + u + \frac{1}{2} u_x \partial_x^{-1} \right) u_{t_m} \quad (27)$$

для поля КдФ $u = q_{2x} = 2\partial_x^2 \ln \tau$. Здесь используются обозначения $\partial_x^{-1} \equiv \int_{-\infty}^x$ и предполагается, что поле u (и его производные) убывают на бесконечности достаточно быстро, чтобы обеспечить, например, $\partial_x^{-1} u_x = u$. Оператор $\partial_x^2/4 + 3u/4 - u_x \partial_x^{-1}/2$ представляет собой хорошо известный оператор рекурсии Ленара для иерархии КдФ [10], который может быть использован для порождения всех потоков старших порядков (симметрий) иерархии КдФ, начиная с потока $u_{t_1} = u_x$. Если применить этот оператор к u_{t_3} -потoku, $u_{3x}/4 + 3uu_x/2$ (см. уравнение (25)), то получается член пятого порядка иерархии КдФ:

$$u_{t_5} = \frac{1}{16}u_{5x} + \frac{5}{8}uu_{3x} + \frac{5}{4}u_x u_{2x} + \frac{15}{8}u^2 u_x, \quad (28)$$

где должны выполняться условия $(u_{t_3})_{t_5} = (u_{t_5})_{t_3}$ и т.д. Далее, оператор рекурсии задает сохраняющиеся плотности уравнения КдФ: оператор $\partial_x^2/4 + u - \partial_x^{-1} u_x/2$, сопряженный оператору рекурсии, отображает сохраняющиеся коварианты в сохраняющиеся коварианты [4]. Например, сохраняющаяся плотность u отвечает сохраняющемуся коварианту 1, который отображается на u сопряженным оператором рекурсии КдФ. Этот сохраняющийся ковариант отвечает сохраняющейся плотности u^2 и закону сохранения

$$(u^2)_{t_3} = \frac{1}{2}u(u_{3x} + 6uu_x) = \frac{1}{2} \left(uu_{2x} - \frac{1}{2}u_x^2 + 2u^3 \right)_x.$$

Второй пример – это 3-редуцированная иерархия КП (иерархия уравнения Буссинеска). Основное уравнение этой иерархии получается из уравнения КП (12), если положить $\tau_{t_3} = \lambda\tau$:

$$(3D_2^2 + D_1^4)\tau \cdot \tau = 0, \quad (29)$$

или же, в терминах полей $u = q_{2x} = 2\partial_x^2 \ln \tau$ и $v = q_{x,t_2} = 2\partial_x \partial_{t_2} \ln \tau$, получим

$$\begin{aligned} u_{t_2} &= v_x, \\ v_{t_2} &= -\frac{1}{3}u_{3x} - 2uu_x. \end{aligned} \quad (30)$$

Записанная в таком виде система иногда называется двухкомпонентным уравнением Буссинеска. Билинейная форма (20) при $k = 3$ принимает вид

$$(D_1 D_{m+3} - p_4(\tilde{D})D_m)\tau \cdot \tau = 0, \quad (31)$$

или

$$\left(D_1 D_{m+3} - \frac{1}{4}D_1^2 D_2 D_m - \frac{1}{4}D_4 D_m \right) \tau \cdot \tau = 0. \quad (32)$$

Это каноническая билинейная форма иерархии Буссинеска. Второй член в иерархии Буссинеска НУрЧП получается, если в этом выражении положить $m = 1$:

$$q_{x,t_4} = \frac{1}{3}q_{3x,t_2} + q_{2x}q_{x,t_2}, \quad (33)$$

или же, в терминах полей u и v ,

$$\begin{aligned} u_{t_4} &= \frac{1}{3}v_{3x} + (uv)_x, \\ v_{t_4} &= -\frac{1}{9}u_{5x} - 2u_x u_{2x} - uu_{3x} + vv_x - 2u^2 u_x. \end{aligned} \quad (34)$$

При произвольном значении m каноническая билинейная форма уравнения Буссинеска имеет вид

$$q_{x,t_{m+3}} - \frac{1}{4}(q_{2x,t_2,t_m} + q_{2x}q - t_2, t_m + 2q_{x,t_2}q_{x,t_m}) - \frac{1}{4}q_{t_4,t_m} = 0. \quad (35)$$

Производная по x от этого соотношения дает формулу

$$u_{t_{m+3}} - \frac{1}{3}v_{2x,t_m} - \frac{1}{4}u_x \partial_x^{-1} v_{t_m} - \frac{1}{2}uv_{t_m} - \frac{3}{4}vu_{t_m} - \frac{1}{2}v_x \partial_x^{-1} u_{t_m} = 0, \quad (36)$$

где также надо использовать первое уравнение системы (33). Производная соотношения (35) по t_2 дает

$$\begin{aligned} v_{t_{m+3}} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}u_{2x} - u^2 \right)_{2x,t_m} - \frac{1}{4}v_x \partial_x^{-1} v_{t_m} - \frac{1}{4}u \left(-\frac{1}{3}u_{2x} - u^2 \right)_{t_m} - \\ - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3}u_{2x} - u^2 \right)_x \partial_x^{-1} u_{t_m} - \frac{1}{2}vv_{t_m} - \frac{1}{4}\partial_x^{-1}(v_{t_4})_{t_m} = 0, \end{aligned} \quad (37)$$

где надо использовать основное уравнение Буссинеска (29) для того, чтобы убрать член q_{2t_2} , и второе уравнение системы (34) для того, чтобы убрать член v_{t_4} . Уравнения (36) и (37) могут быть представлены в виде

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_{t_{m+3}} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_{t_m}, \quad (38)$$

где

$$\begin{aligned} R_{11} &= \frac{3}{4}v + \frac{1}{2}v_x \partial_x^{-1}, \\ R_{12} &= \frac{1}{2}\partial_x^2 + \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}u_x \partial_x^{-1}, \\ R_{21} &= -\frac{1}{9}\partial_x^4 - \frac{5}{4}u_x \partial_x - \frac{3}{4}u_{2x} - \frac{5}{6}u \partial_x^2 - u^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}u_{3x} + 2uu_x \right) \partial_x^{-1}, \\ R_{22} &= \frac{1}{4}v_x \partial_x^{-1} + \frac{3}{4}v. \end{aligned} \quad (39)$$

Эта форма записи представляет собой (матричный) оператор рекурсии для уравнения Буссинеска (см. [4], с. 323). Его формально сопряженный оператор опять может быть использован для построения любого числа законов сохранения в этой иерархии.

В качестве третьего примера рассмотрим 1-ограниченную иерархию КП. Легко показать, что $(\Phi\Phi^*)_x$ является симметрией уравнения КП (2), если Φ и Φ^* суть собственные функции линейных уравнений КП (5) и их сопряженных. При этом можно наложить условие симметричной редукции $u_x = (\Phi\Phi^*)_x$, чтобы привести иерархию КП к

(1 + 1)-мерной иерархии. Основное свойство этой редукции состоит в том, что производная тау-функции КП по x опять оказывается тау-функцией КП [11], [12]. Следовательно, если иерархия КП содержит билинейное уравнение $B\tau \cdot \tau = 0$, то 1-ограниченная иерархия КП содержит дополнительно уравнение $B\tau_x \cdot \tau_x = 0$, или, эквивалентно, $D_x^2 B\tau \cdot \tau = 0$ (так как $\partial_x^2(B\tau \cdot \tau) - 4B\tau_x \cdot \tau_x = D_x^2 B\tau \cdot \tau$). Поэтому некоторые из билинейных уравнений этой иерархии имеют вид

$$(4D_x D_{t_3} - 3D_{t_2}^2 - D_x^4)\tau \cdot \tau = 0, \quad (4D_x^3 D_{t_3} - 3D_x^2 D_{t_2}^2 - D_x^6)\tau \cdot \tau = 0 \quad (40)$$

и т.д. 1-ограниченная иерархия КП также известна под именем нелокальной иерархии Буссинеска и оказывается тесно связанной с нелинейным уравнением Шредингера. Уравнение низшего порядка в этой иерархии имеет вид

$$\begin{aligned} u_{t_2} &= v_x, \\ v_{t_2} &= u_{3x} + (u^2)_x + \left[\frac{v^2 - u_x^2}{u} \right]_x, \end{aligned} \quad (41)$$

где опять $u = q_{2x}$ и $v = q_{x,t_2}$. Это уравнение имеет те же члены линейной дисперсии, что и уравнение Буссинеска (30), но нелинейности этих уравнений отличаются. 1-ограниченная иерархия КП содержит билинейные соотношения

$$D_1^3 D_m \tau \cdot \tau = 2p_{m+1}(\tilde{D})D_1^2 \tau \cdot \tau \quad (42)$$

для любого m . Коэффициент при члене $y_m y_1^2$ в билинейном тождестве КП (11) имеет вид

$$\begin{aligned} &(-4p_{m+3}(\tilde{D}) + 4p_{m+2}(\tilde{D})D_1 - p_{m+1}(\tilde{D})D_1^2 + 2p_3(\tilde{D})D_m - \\ &- 2p_2(\tilde{D})D_1 D_m + \frac{1}{2}D_1^3 D_m)\tau \cdot \tau = 0. \end{aligned} \quad (43)$$

Если выразить член $p_{m+2}(\tilde{D})D_1 \tau \cdot \tau$ из соотношения (18) (при $k = 1$), а член $p_{m+1}(\tilde{D})D_1^2 \tau \cdot \tau$ из соотношения (42), то в результате получим

$$(3D_1 D_{m+2} - 3D_2 D_{m+1} - D_1^3 D_m + D_3 D_m)\tau \cdot \tau = 0. \quad (44)$$

Эта формула содержит потоки t_m, t_{m+1} и t_{m+2} ; с ее помощью можно породить все уравнения этой иерархии, начиная с потока $t_1 = x$ и основного уравнения (41). Заметим, что случаи $m = 1$ и $m = 2$ задают билинейные уравнения, содержащиеся в нередуцированной иерархии КП (см. (12)), но уже билинейное уравнение при $m = 3$ в ней не содержится: никаких канонических билинейных форм для иерархии КП не существует. Оператор рекурсии для этой иерархии имеет вид [12]

$$\mathcal{R}(u, v) = \begin{pmatrix} -\frac{v}{2u} - \frac{u_x}{2} \partial_x^{-1} \frac{v}{u^2} & 1 + \frac{u_x}{2} \partial_x^{-1} \frac{1}{u} \\ \partial_x^2 + 2u - \frac{3u_x}{2u} \partial_x - \frac{u_{2x}}{2u} - \frac{v^2 - u_x^2}{u^2} - \frac{v_x}{2} \partial_x^{-1} \frac{v}{u^2} & \frac{3v}{2u} + \frac{v_x}{2} \partial_x^{-1} \frac{1}{u} \end{pmatrix}. \quad (45)$$

Как предполагалось выше, с каждым потоком, порожденным R , можно ассоциировать эволюционирующую систему

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_{t_{m+1}} = \mathcal{R}(u, v) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_{t_m}$$

по переменным $t_1 = x, t_2 = t, t_3, \dots$. Применяя оператор (45) к тривиальной симметрии (u_x, v_x) , получим нелинейный поток Буссинеска (41). Первый поток старшего порядка имеет вид

$$\begin{aligned} u_{t_3} &= u_{3x} + \frac{3}{2}(u^2)_x + \frac{3}{4} \left[\frac{-v^2 + u_x^2}{u} \right]_x, \\ v_{t_3} &= -v_{3x} - 3(uv)_x + \frac{3}{2} \left[\frac{v_x u_x - v u_{2x}}{u} \right]_x + \frac{3}{4} \left[\frac{-v^3 + u_x^2 v}{u^2} \right]_x. \end{aligned}$$

Можно показать, что оператор рекурсии (45) “наследуется”, а потому существует бесконечная последовательность согласованных уравнений. Из этого рекурсионного соотношения следуют канонические билинейные соотношения (44). Некоторые из сохраняющихся плотностей этого уравнения имеют вид

$$u, \quad v, \quad \frac{u^2}{2} + \frac{1}{4} \frac{v^2 - u_x^2}{u}, \quad \dots \quad (46)$$

4. ПАРЫ ЛАКСА ДЛЯ РЕДУЦИРОВАННЫХ ИЕРАРХИЙ

В этом разделе будет показано, как выводить (аналогично разделу 3) канонические пары Лакса для редуцированных уравнений КП. Начнем с модифицированного билинейного тождества КП (14), в котором коэффициент при y_m имеет вид

$$(p_m(\tilde{D}) - D_m) \rho \cdot \tau = 0 \quad (47)$$

для любого m , в то время как коэффициент при $y_m y_k$ дает

$$(-2p_{m+k}(\tilde{D}) + p_m(\tilde{D})D_k + p_k(\tilde{D})D_m - D_m D_k) \rho \cdot \tau = 0. \quad (48)$$

Используем сначала соотношение (47) для того, чтобы убрать первый член в выражении (48). В случае k -редуцированной иерархии ($\tau_{t_k} = \lambda_1 \tau$ и $\rho_{t_k} = \lambda_2 \rho$) можно просто положить $D_k \rightarrow \lambda$, а потом заменить $\lambda p_m(\tilde{D})$ с помощью формулы (47):

$$(-2D_{m+k} + p_k(\tilde{D})D_m) \rho \cdot \tau = 0. \quad (49)$$

Степень этой формы Хироты равна $k + 1$ независимо от m . Она представляет собой каноническую билинейную форму модифицированной k -редуцированной иерархии КП.

Например, при $k = 2$ (случай иерархии КдФ) найдем, что

$$\left(-2D_{m+2} - \frac{\lambda}{4} D_m - \frac{1}{4} D_1^2 D_m \right) \rho \cdot \tau = 0. \quad (50)$$

В случае $m = 1$ это соотношение приводит к формуле

$$\left(D_{t_3} - \frac{\lambda}{4}D_x - \frac{1}{4}D_x^3\right)\rho \cdot \tau = 0. \quad (51)$$

Делая замену переменных $\psi = \rho/\tau$ и $u = 2\partial_x^2 \ln \tau$, получим

$$\psi_{t_3} - \frac{\lambda}{4}\psi_x - \frac{1}{4}(\psi_{3x} + 3u\psi_x) = 0. \quad (52)$$

Условие совместности этого линейного уравнения (уравнения Лакса) с задачей на собственные значения, получающейся из условий (5) и линейной задачи $\psi_{t_2} = \lambda\psi$,

$$\psi_{2x} + u\psi = \lambda\psi, \quad (53)$$

порождает уравнение КдФ $4u_{t_3} - u_{3x} - 6uu_x = 0$, если только $\lambda_{t_3} = 0$.

Благодарности. Работа получила финансовую поддержку от Федерального министерства науки, техники и культуры при Администрации премьер-министра Бельгии (контракт № P4/08 “Interuniversity poles of attraction programme”). Автор является post-doctoral fellow at the Fwo-Vlaanderen (Belgium).

Список литературы

- [1] *D. J. Korteweg, G. de Vries.* Philos. Mag. Ser. 5. 1895. V. 39. P. 422–443.
- [2] *J. Boussinesq.* C. R. Acad. Sci. Paris. 1871. V. 72. P. 755–759.
- [3] *M. Remoissenet.* Waves Called Solitons: Concepts and Experiments. Berlin: Springer, 1994.
- [4] *П. Олвер.* Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.
- [5] *Р. Хирота.* Прямые методы в теории солитонов. В сб.: Солитоны. Ред. Р. Буллаф, Ф. Кодри. М.: Мир, 1983. С. 175–192.
- [6] *Б. Б. Кадомцев, В. И. Петвиашвили.* ДАН СССР. 1970. Т. 192. С. 753–756.
- [7] *R. Willox.* On a direct bilinear operator method in soliton theory Ph.D. thesis Vrije Universiteit Brussel Brussels. Belgium, 1993.
- [8] *E. Date, M. Kashiwara, M. Jimbo, T. Miwa.* Transformation groups for soliton equations. In: Proceedings of RIMS symposium on non-linear integrable systems-Classical theory and quantum theory. Eds. M. Jimbo, T. Miwa. Singapore: World Scientific, 1983. P. 39–119.
- [9] *A. S. Fokas, P. M. Santini.* Commun. Math. Phys. 1988. V. 116. P. 449–474.
- [10] *B. Fuchssteiner.* Nonlinear Anal. Theor. Meth. Appl. 1979. V. 6. P. 849–862.
- [11] *F. Lambert, I. Loris, J. Springael, R. Willox.* J. Phys. A. 1994. V. 27. P. 5325–5334; *I. Loris, R. Willox.* Inverse Problems. 1997. V. 13. P. 411–420; *I. Loris, R. Willox.* J. Phys. A. 1997. V. 30. P. 6925–6938.
- [12] *I. Loris.* Symmetry reductions in the tau-function approach to integrability Ph.D. thesis Vrije Universiteit Brussel Brussels. Belgium, 1998.