Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. И. Мохов, Согласованные гамильтоновы операторы Дубровина–Новикова, производная Ли и интегрируемые системы гидродинамического типа, *ТМФ*, 2002, том 133, номер 2, 279–288

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf397>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 16:59:05

© 2002 г.

О. И. Мохов*

СОГЛАСОВАННЫЕ ГАМИЛЬТОНОВЫ ОПЕРАТОРЫ ДУБРОВИНА–НОВИКОВА, ПРОИЗВОДНАЯ ЛИ И ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА

Доказано, что два гамильтоновых оператора Дубровина–Новикова согласованы тогда и только тогда, когда один из этих операторов является производной Ли другого оператора вдоль некоторого векторного поля. Рассмотрен класс плоских многообразий, отвечающих произвольным парам согласованных гамильтоновых операторов Дубровина–Новикова. Локально эти многообразия задаются решениями системы нелинейных уравнений, интегрируемой методом обратной задачи рассеяния. Построены интегрируемые иерархии, задаваемые произвольными парами согласованных гамильтоновых операторов Дубровина–Новикова.

Ключевые слова: согласованные гамильтоновы операторы, системы гидродинамического типа, производная Ли, интегрируемые иерархии, локальные скобки Пуассона гидродинамического типа, плоские пучки метрик.

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной статье мы доказываем, что локальный гамильтонов оператор гидродинамического типа K_1^{ij} (гамильтонов оператор Дубровина–Новикова [1]) согласован с невырожденным локальным гамильтоновым оператором гидродинамического типа K_2^{ij} тогда и только тогда, когда локально оператор K_1^{ij} является производной Ли оператора K_2^{ij} вдоль векторного поля в соответствующей области локальных координат. Это дает удобный общий инвариантный критерий согласованности гамильтоновых операторов Дубровина–Новикова и, кроме того, позволяет дать естественное инвариантное определение класса специальных плоских многообразий, отвечающих всему классу согласованных гамильтоновых операторов Дубровина–Новикова (фробениусовы многообразия Дубровина, конечно, входят в этот класс плоских многообразий). Каждому такому плоскому многообразию отвечает интегрируемая бигамильтонова иерархия, и соответствующие интегрируемые системы также изучаются в данной статье. Этот класс интегрируемых систем задается явно решениями нелинейной системы уравнений, которая ин-

* Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Москва, Россия.
E-mail: mokhov@landau.ac.ru, mokhov@mi.ras.ru

тегрируется методом обратной задачи рассеяния. Соответствующие результаты о согласованных нелокальных гамильтоновых операторах гидродинамического типа и других гамильтоновых и симплектических операторах дифференциально-геометрического типа, связанных производной Ли, а также результаты о порождаемых ими интегрируемых бигамильтоновых системах будут опубликованы в других наших работах.

Напомним, что оператор $K^{ij}[u(x)]$ называется *гамильтоновым*, если он определяет скобку Пуассона (кососимметричную и удовлетворяющую тождеству Якоби)

$$\{I, J\} = \int \frac{\delta I}{\delta u^i(x)} K^{ij}[u(x)] \frac{\delta J}{\delta u^j(x)} dx \quad (1.1)$$

для произвольных функционалов $I[u(x)]$ и $J[u(x)]$ на пространстве функций (полей) $u(x) = \{u^i(x), 1 \leq i \leq N\}$, где $u^1, \dots, u^N$ – локальные координаты на некотором заданном гладком N -мерном многообразии M . Очевидно, что любой гамильтонов оператор всегда ведет себя как контравариантное двухвалентное операторное тензорное поле относительно произвольных локальных замен координат $u^i = u^i(v^1, \dots, v^N)$, $1 \leq i \leq N$, на многообразии M :

$$\tilde{K}^{sr}[v(x)] = \frac{\partial v^s}{\partial u^i} K^{ij}[u(v(x))] \circ \frac{\partial v^r}{\partial u^j}, \quad (1.2)$$

где символ $\circ$ обозначает произведение операторов (важно отметить, что, в отличие от обычных тензорных полей, компоненты операторов в (1.2) перемножаются только в указанном порядке). Соответственно к гамильтоновым операторам применимы классические тензорные конструкции, в частности производная Ли вдоль векторного поля (см., например, монографию [2], а также раздел 3).

Гамильтоновы операторы называются *согласованными*, если любая их линейная комбинация является гамильтоновым оператором ([3], см. также [2]). В теории гамильтоновых операторов имеет место следующий общий факт (см., например, [2]), важный для приложений: если вторая группа когомологий соответствующего комплекса формального вариационного исчисления равна нулю, то из согласованности двух гамильтоновых операторов K_1^{ij} и K_2^{ij} , где K_2^{ij} – обратимый оператор, следует, что существует формальное векторное поле $X[u(x)]$, зависящее, вообще говоря, произвольным и нелокальным образом от полей $u(x)$ и их производных, такое, что $K_1 = L_X K_2$, где $L_X K$ – производная Ли гамильтонова оператора K вдоль формального векторного поля X . Более того, если оператор K гамильтонов и, кроме того, оператор $L_X K$, где X – некоторое произвольное формальное векторное поле, тоже гамильтонов, то гамильтоновы операторы K и $L_X K$ всегда согласованы. Если оператор K гамильтонов и, кроме того, $L_X^2 K = 0$, то оператор $L_X K$ всегда гамильтонов, и, следовательно, гамильтоновы операторы K и $L_X K$ согласованы в этом случае. Эта красивая конструкция играет очень важную роль в приложениях, и соответствующий класс согласованных гамильтоновых операторов (пары операторов вида K^{ij} , $(L_X K)^{ij}$ такие, что $(L_X^2 K)^{ij} = 0$) заслуживает отдельного изучения.

Важный специальный частный случай этой конструкции возник впоследствии в теории фробениусовых многообразий Дубровина (квазиоднородные согласованные невырожденные гамильтоновы операторы Дубровина–Новикова) [4]–[6]. Исследование общих согласованных гамильтоновых операторов Дубровина–Новикова этого класса, т.е.

вида B^{ij} и $(L_X B)^{ij}$, таких, что $L_X^2 B = 0$, начато автором и Форди в [7], где получены первые классификационные результаты.

2. СОГЛАСОВАННЫЕ ГАМИЛЬТОНОВЫ Операторы ДУБРОВИНА–НОВИКОВА

Напомним, что гамильтонов оператор, задаваемый произвольным матричным однородным обыкновенным дифференциальным оператором первого порядка, т.е. гамильтонов оператор вида

$$P^{ij}[u(x)] = g^{ij}(u(x)) \frac{d}{dx} + b_k^{ij}(u(x)) u_x^k, \quad (2.1)$$

называется *локальным гамильтоновым оператором гидродинамического типа* или *гамильтоновым оператором Дубровина–Новикова* [1]. Это определение не зависит от выбора локальных координат $u^1, \dots, u^N$ на многообразии M , так как из (1.2) следует, что вид оператора (2.1) инвариантен относительно локальных замен координат на M . Оператор (2.1) называется *невыврожденным*, если $\det g^{ij}(u) \neq 0$. Если $\det g^{ij}(u) \neq 0$, то оператор (2.1) является гамильтоновым тогда и только тогда, когда: 1) $g^{ij}(u)$ – произвольная контравариантная плоская псевдориманова метрика (метрика нулевой римановой кривизны); 2) $b_k^{ij}(u) = -g^{is}(u) \Gamma_{sk}^j(u)$, где $\Gamma_{sk}^j(u)$ – связность Леви-Чивита, порождаемая метрикой $g^{ij}(u)$ (теорема Дубровина–Новикова [1]). В частности, из теоремы Дубровина–Новикова следует, что для любого невырожденного локального гамильтонова оператора гидродинамического типа всегда существуют локальные координаты $v^1, \dots, v^N$ (плоские координаты метрики $g^{ij}(u)$), в которых все коэффициенты оператора постоянны:

$$\tilde{g}^{ij}(v) = \eta^{ij} = \text{const}, \quad \tilde{\Gamma}_{jk}^i(v) = 0, \quad \tilde{b}_k^{ij}(v) = 0, \quad (2.2)$$

т.е. соответствующая скобка Пуассона имеет вид

$$\{I, J\} = \int \frac{\delta I}{\delta v^i(x)} \eta^{ij} \frac{d}{dx} \frac{\delta J}{\delta v^j(x)} dx, \quad (2.3)$$

где η^{ij} – невырожденная симметричная постоянная матрица:

$$\eta^{ij} = \eta^{ji}, \quad \eta^{ij} = \text{const}, \quad \det \eta^{ij} \neq 0. \quad (2.4)$$

Кроме того, из теоремы Дубровина–Новикова немедленно следует, что два невырожденных гамильтоновых оператора Дубровина–Новикова $P_1^{ij}[u(x)]$ и $P_2^{ij}[u(x)]$, задаваемых плоскими контравариантными метриками $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$, соответственно, согласованы тогда и только тогда, когда: 1) любая линейная комбинация этих плоских метрик

$$g^{ij}(u) = \lambda_1 g_1^{ij}(u) + \lambda_2 g_2^{ij}(u), \quad (2.5)$$

где λ_1 и λ_2 – произвольные константы, для которых $\det g^{ij}(u) \neq 0$, также является плоской метрикой; 2) коэффициенты соответствующих связностей Леви-Чивита связаны тем же самым линейным соотношением:

$$\Gamma_k^{ij}(u) = \lambda_1 \Gamma_{1,k}^{ij}(u) + \lambda_2 \Gamma_{2,k}^{ij}(u). \quad (2.6)$$

Получаемые при этом чисто дифференциально-геометрические условия (2.5) и (2.6) на плоские метрики $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ определяют *плоский пучок метрик* [4]. Мы также будем говорить в этом случае, что плоские метрики $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ *согласованы* (см. [8]).

Таким образом, задача описания согласованных невырожденных локальных гамильтоновых операторов гидродинамического типа является чисто дифференциально-геометрической задачей описания общих плоских пучков метрик (см. [4]). В работах [4], [5] выписаны все тензорные соотношения для общих плоских пучков метрик.

Введем необходимые обозначения. Пусть ∇_1 и ∇_2 – операторы ковариантного дифференцирования, задаваемые связностями Леви-Чивита $\Gamma_{1,k}^{ij}(u)$ и $\Gamma_{2,k}^{ij}(u)$, порождаемыми метриками $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$, соответственно. Индексы у ковариантных производных поднимаются и опускаются с помощью соответствующих метрик: $\nabla_1^i = g_1^{is}(u)\nabla_{1,s}$, $\nabla_2^i = g_2^{is}(u)\nabla_{2,s}$. Рассмотрим тензор

$$\Delta^{ijk}(u) = g_1^{is}(u)g_2^{jp}(u)(\Gamma_{2,ps}^k(u) - \Gamma_{1,ps}^k(u)), \quad (2.7)$$

введенный Дубровиным в [4], [5].

ТЕОРЕМА 1 [4], [5]. *Если метрики $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ образуют плоский пучок, то существует векторное поле $f^i(u)$ такое, что тензор $\Delta^{ijk}(u)$ и метрика $g_1^{ij}(u)$ имеют вид*

$$\Delta^{ijk}(u) = \nabla_2^i \nabla_2^j f^k(u), \quad (2.8)$$

$$g_1^{ij}(u) = \nabla_2^i f^j(u) + \nabla_2^j f^i(u) + c g_2^{ij}(u), \quad (2.9)$$

где c – некоторая константа, а векторное поле $f^i(u)$ удовлетворяет уравнениям

$$\Delta_s^{ij}(u)\Delta_t^{sk}(u) = \Delta_s^{ik}(u)\Delta_t^{sj}(u), \quad (2.10)$$

где

$$\Delta_k^{ij}(u) = g_{2,ks}(u)\Delta^{sij}(u) = \nabla_{2,k}\nabla_2^i f^j(u), \quad (2.11)$$

$$(g_1^{is}(u)g_2^{jp}(u) - g_2^{is}(u)g_1^{jp}(u))\nabla_{2,s}\nabla_{2,p}f^k(u) = 0. \quad (2.12)$$

Обратно: для плоской метрики $g_2^{ij}(u)$ и для векторного поля $f^i(u)$, являющегося решением системы уравнений (2.10) и (2.12), метрики $g_2^{ij}(u)$ и (2.9) образуют плоский пучок.

В работе [6] Дубровин доказал, что теория фробениусовых многообразий, построенная им в [4] (фробениусовы многообразия отвечают двумерным топологическим теориям поля), эквивалентна теории квазиоднородных согласованных невырожденных гамильтоновых операторов Дубровина–Новикова, или, другими словами, квазиоднородных плоских пучков метрик.

Плоский пучок метрик, образованный плоскими метриками $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$, называется *квазиоднородным степени d* , если существует функция $\tau(u)$ такая, что для векторных полей

$$E = \nabla_1 \tau, \quad E^i = g_1^{is}(u) \frac{\partial \tau}{\partial u^s}, \quad e = \nabla_2 \tau, \quad e^i = g_2^{is}(u) \frac{\partial \tau}{\partial u^s}, \quad (2.13)$$

выполнены следующие условия:

- 1) $[e, E] = e$,
- 2) $L_E g_1 = (d - 1)g_1$,
- 3) $L_e g_1 = g_2$,
- 4) $L_e g_2 = 0$,

где $L_X g$ – производная Ли метрики g вдоль векторного поля X [6].

Отметим, что в квазиоднородном случае всегда $L_e Q_1 = Q_2$, $L_e Q_2 = 0$, $L_e^2 Q_1 = 0$ для соответствующих квазиоднородных согласованных невырожденных гамильтоновых операторов Дубровина–Новикова $Q_1^{ij}[u(x)]$ и $Q_2^{ij}[u(x)]$ (подробнее об этом важном классе согласованных невырожденных гамильтоновых операторов Дубровина–Новикова см. [7]).

В работе автора [9] сформулирован в нужном виде необходимый нам для дальнейшего явный и простой критерий согласованности двух локальных скобок Пуассона гидродинамического типа, т.е. указано, какой явный вид необходимо и достаточно иметь локальным гамильтоновым операторам гидродинамического типа для того, чтобы быть согласованными (см. также теорему 1).

ЛЕММА (явный критерий согласованности локальных скобок Пуассона гидродинамического типа) [9]. *Произвольная локальная скобка Пуассона гидродинамического типа $\{I, J\}_2$ является согласованной с постоянной невырожденной скобкой Пуассона (2.3) тогда и только тогда, когда она имеет вид*

$$\{I, J\}_2 = \int \frac{\delta I}{\delta v^i(x)} \left(\left(\eta^{is} \frac{\partial h^j}{\partial v^s} + \eta^{js} \frac{\partial h^i}{\partial v^s} \right) \frac{d}{dx} + \eta^{is} \frac{\partial^2 h^j}{\partial v^s \partial v^k} v_x^k \right) \frac{\delta J}{\delta v^j(x)} dx, \quad (2.14)$$

где $h^i(v)$, $1 \leq i \leq N$, – гладкие функции, определенные в некоторой области локальных координат.

Невырожденность скобки Пуассона гидродинамического типа $\{I, J\}_2$ в лемме не требуется. Кроме того, важно отметить, что это локальное утверждение.

3. ПРОИЗВОДНАЯ ЛИ И ГАМИЛЬТОНОВЫ ОПЕРАТОРЫ ДУБРОВИНА–НОВИКОВА

Пусть $K^{ij}[u(x)]$ – произвольный гамильтонов оператор, $\xi(u) = \{\xi^i(u), 1 \leq i \leq N\}$ – произвольное гладкое векторное поле на многообразии M . *Производной Ли гамильтонова оператора $K^{ij}[u(x)]$* (как и любого контравариантного двухвалентного операторного тензорного поля типа (1.2)) *вдоль векторного поля $\xi(u)$* называется оператор

$$(\mathcal{L}_\xi K)^{ij}[u(x)] = \left(\frac{d}{dt} \left[\left(\delta_s^i - t \frac{\partial \xi^i}{\partial u^s} \right) K^{sr}[u(x) + t\xi(u(x))] \circ \left(\delta_r^j - t \frac{\partial \xi^j}{\partial u^r} \right) \right] \right) \Big|_{t=0}, \quad (3.1)$$

который также всегда ведет себя как контравариантное двухвалентное операторное тензорное поле типа (1.2) относительно произвольных локальных замен координат на многообразии M .

Для производной Ли локального гамильтонова оператора гидродинамического типа $P^{ij}[u(x)]$ вдоль векторного поля $\xi(u)$ получаем

$$(\mathcal{L}_\xi P)^{ij}[u(x)] = \left(\xi^s \frac{\partial g^{ij}}{\partial u^s} - g^{sj} \frac{\partial \xi^i}{\partial u^s} - g^{is} \frac{\partial \xi^j}{\partial u^s} \right) \frac{d}{dx} + \\ + \left(\xi^s \frac{\partial b_k^{ij}}{\partial u^s} - b_k^{sj} \frac{\partial \xi^i}{\partial u^s} - b_k^{is} \frac{\partial \xi^j}{\partial u^s} + b_s^{ij} \frac{\partial \xi^s}{\partial u^k} - g^{is} \frac{\partial^2 \xi^j}{\partial u^s \partial u^k} \right) u_x^k. \quad (3.2)$$

ТЕОРЕМА 2. *Гамильтонов оператор Дубровина–Новикова P_1^{ij} согласован с невырожденным гамильтоновым оператором Дубровина–Новикова P_2^{ij} тогда и только тогда, когда локально существует векторное поле $\xi(u)$ такое, что*

$$P_1^{ij} = (\mathcal{L}_\xi P_2)^{ij}. \quad (3.3)$$

В другом виде, не связанном с производной Ли, общие условия согласованности гамильтоновых операторов Дубровина–Новикова указаны в работах [4], [8]–[13] (см. также раздел 2).

Всегда ли такое гладкое векторное поле существует глобально на плоском многообразии M , на пространстве петель которого глобально определены согласованные гамильтоновы операторы Дубровина–Новикова P_1^{ij} и P_2^{ij} ? Если не всегда, то необходимо исследовать соответствующие дифференциально-геометрические и топологические препятствия, а также выделить и изучить все такие плоские многообразия, на которых существует глобально векторное поле такое, что производная Ли гамильтонова оператора Дубровина–Новикова, порождаемого плоской метрикой многообразия, вдоль этого векторного поля также является гамильтоновым оператором. В частности, интересно изучить все такие векторные поля в $\mathbb{R}^N$ или $\mathbb{R}_{k, N-k}^N$, а также в областях этих пространств, поскольку локально любое такое векторное поле является решением системы нелинейных уравнений, интегрируемой методом обратной задачи рассеяния (см. [10], [11]), и порождает интегрируемые бигамильтоновы системы гидродинамического типа (мы рассмотрим их в следующем разделе).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть гамильтоновы операторы Дубровина–Новикова $P_1^{ij}[u(x)]$ и $P_2^{ij}[u(x)]$ согласованы и оператор $P_2^{ij}[u(x)]$ невырожденный. Рассмотрим локальные координаты $v = (v^1, \dots, v^N)$, в которых невырожденный гамильтонов оператор Дубровина–Новикова $P_2^{ij}[u(x)]$ приводится к постоянному виду (см. (2.3)):

$$P_2^{ij}[v(x)] = \eta^{ij} \frac{d}{dx}, \quad (3.4)$$

где η^{ij} – произвольная невырожденная постоянная симметричная матрица: $\det \eta^{ij} \neq 0$, $\eta^{ij} = \text{const}$, $\eta^{ij} = \eta^{ji}$ (такие локальные координаты всегда существуют по теореме

Дубровина–Новикова). В этих координатах в соответствии с формулой (3.2) для производной Ли оператора $P_2^{ij}[v(x)]$ вдоль произвольного векторного поля $\xi(v) = (\xi^1(v), \dots, \xi^N(v))$ получаем

$$(\mathcal{L}_\xi P_2)^{ij}[v(x)] = \left(-\eta^{sj} \frac{\partial \xi^i}{\partial v^s} - \eta^{is} \frac{\partial \xi^j}{\partial v^s} \right) \frac{d}{dx} - \eta^{is} \frac{\partial^2 \xi^j}{\partial v^s \partial v^k} v_x^k. \quad (3.5)$$

В соответствии с леммой любой гамильтонов оператор Дубровина–Новикова $P_1^{ij}[v(x)]$, согласованный с гамильтоновым оператором (3.4), обязан иметь в локальных координатах $v = (v^1, \dots, v^N)$ именно такой вид (3.5) (в формуле (2.14) $h^i(v) = -\xi^i(v)$, $1 \leq i \leq N$). Таким образом, существует векторное поле $\xi^i(v)$, $1 \leq i \leq N$, такое, что

$$P_1^{ij}[v(x)] = (\mathcal{L}_\xi P_2)^{ij}[v(x)]. \quad (3.6)$$

Тогда в силу тензорной инвариантности производной Ли формула (3.3) будет выполнена и в произвольных локальных координатах.

Обратно: пусть два гамильтоновых оператора Дубровина–Новикова $P_1^{ij}[u(x)]$ и $P_2^{ij}[u(x)]$ связаны соотношением (3.3) и оператор $P_2^{ij}[u(x)]$ невырожденный. Тогда в локальных координатах $v = (v^1, \dots, v^N)$, в которых невырожденный гамильтонов оператор Дубровина–Новикова $P_2^{ij}[u(x)]$ приводится к постоянному виду (3.4), гамильтонов оператор $P_1^{ij}[v(x)]$ имеет вид (3.5). В соответствии с леммой любые два гамильтонова оператора $P_1^{ij}[v(x)]$ и $P_2^{ij}[v(x)]$ такого вида обязательно согласованы. Теорема доказана.

Теперь естественно выделяется специальный класс плоских многообразий, отвечающий классу всех согласованных гамильтоновых операторов Дубровина–Новикова и обобщающий класс фробениусовых многообразий Дубровина. Теорема 2 позволяет сформулировать следующее инвариантное определение этих многообразий. Рассмотрим многообразия (M, g, ξ) , где M – плоское многообразие с плоской метрикой g , оснащенное также векторным полем ξ со следующим свойством: для невырожденного гамильтонова оператора Дубровина–Новикова $P^{ij}[u(x)]$, порожденного плоской метрикой g , оператор $(\mathcal{L}_\xi P)^{ij}[u(x)]$ тоже гамильтонов (т.е. задает скобку Пуассона на соответствующем пространстве петель многообразия M). Вообще говоря, для описания всех согласованных гамильтоновых операторов Дубровина–Новикова нужно рассматривать следующее более слабое условие: существование такого векторного поля локально, в окрестности каждой точки многообразия. Локально такие векторные поля описываются нелинейной системой, интегрируемой методом обратной задачи рассеяния (см. [10], [11]).

4. КЛАСС ИНТЕГРИРУЕМЫХ БИГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА

Локальной заменой координат произвольная пара согласованных гамильтоновых операторов Дубровина–Новикова P_1^{ij} и P_2^{ij} , один из которых (допустим, P_2^{ij}) невырожден-

ный, приводится к следующему специальному виду:

$$P_2^{ij}[v(x)] = \eta^{ij} \frac{d}{dx}, \quad (4.1)$$

$$P_1^{ij}[v(x)] = \left(\eta^{is} \frac{\partial h^j}{\partial v^s} + \eta^{js} \frac{\partial h^i}{\partial v^s} \right) \frac{d}{dx} + \eta^{is} \frac{\partial^2 h^j}{\partial v^s \partial v^k} v_x^k, \quad (4.2)$$

где η^{ij} – произвольная невырожденная постоянная симметричная матрица: $\det \eta^{ij} \neq 0$, $\eta^{ij} = \text{const}$, $\eta^{ij} = \eta^{ji}$; $h^i(v)$, $1 \leq i \leq N$, – гладкие функции, заданные в некоторой области локальных координат, такие, что оператор (4.2) является гамильтоновым (см. лемму и теорему 1). При этом оператор вида (4.2) является гамильтоновым тогда и только тогда, когда

$$\eta^{sr} \frac{\partial^2 h^j}{\partial v^s \partial v^i} \frac{\partial^2 h^k}{\partial v^l \partial v^r} = \eta^{sr} \frac{\partial^2 h^k}{\partial v^s \partial v^i} \frac{\partial^2 h^j}{\partial v^l \partial v^r}, \quad (4.3)$$

$$\left(\eta^{ip} \frac{\partial h^s}{\partial v^p} + \eta^{sp} \frac{\partial h^i}{\partial v^p} \right) \eta^{jl} \frac{\partial^2 h^r}{\partial v^l \partial v^s} = \left(\eta^{jp} \frac{\partial h^s}{\partial v^p} + \eta^{sp} \frac{\partial h^j}{\partial v^p} \right) \eta^{il} \frac{\partial^2 h^r}{\partial v^l \partial v^s} \quad (4.4)$$

([12], см. также [9] и теорему 1).

Система нелинейных уравнений (4.3), (4.4), как и предполагалось в работе автора [12], где была сформулирована соответствующая гипотеза, является интегрируемой методом обратной задачи рассеяния. Процедура интегрирования этой системы была предложена в работах автора [10], а в работе [11] для нее была указана пара Лакса. Отметим, что уравнения ассоциативности двумерной топологической теории поля (см. [4]) являются естественной редукцией уравнений (4.3) для “потенциальных” векторных полей $h^i(v)$, $1 \leq i \leq N$, специального вида

$$h^i(v) = \eta^{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial v^j}, \quad (4.5)$$

где $\Phi(v)$ – некоторая гладкая функция (“потенциал”) (см. также [9], [12]–[14]).

Рассмотрим оператор рекурсии, порождаемый “каноническими” согласованными гамильтоновыми операторами Дубровина–Новикова (4.1), (4.2):

$$\begin{aligned} R_l^i &= [P_1[v(x)] (P_2[v(x)])^{-1}]_l^i = \\ &= \left(\left(\eta^{is} \frac{\partial h^j}{\partial v^s} + \eta^{js} \frac{\partial h^i}{\partial v^s} \right) \frac{d}{dx} + \eta^{is} \frac{\partial^2 h^j}{\partial v^s \partial v^k} v_x^k \right) \eta_{jl} \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

где η_{ij} – матрица, обратная по отношению к матрице η^{ij} : $\eta^{is} \eta_{sj} = \delta_j^i$ (об операторах рекурсии, задаваемых парой согласованных гамильтоновых операторов, см. [2], [15]).

Применим полученный нами оператор рекурсии (4.6) к системе трансляций по x , т.е. к системе гидродинамического типа

$$v_t^i = v_x^i, \quad (4.7)$$

которая, очевидно, является гамильтоновой с гамильтоновым оператором (4.1):

$$v_t^i = v_x^i \equiv P_2^{ij} \frac{\delta H}{\delta v^j(x)}, \quad H = \frac{1}{2} \int \eta_{jl} v^j(x) v^l(x) dx. \quad (4.8)$$

Любая система из иерархии

$$v_{t_n}^i = (R^n)_j^i v_x^j, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (4.9)$$

является мультигамильтоновой интегрируемой системой. В частности, интегрируемой является любая система вида

$$v_{t_1}^i = R_j^i v_x^j, \quad (4.10)$$

т.е. система гидродинамического типа

$$\begin{aligned} v_{t_1}^i &= \left(\left(\eta^{is} \frac{\partial h^j}{\partial v^s} + \eta^{js} \frac{\partial h^i}{\partial v^s} \right) \frac{d}{dx} + \eta^{is} \frac{\partial^2 h^j}{\partial v^s \partial v^k} v_x^k \right) \eta_{jl} v^l \equiv \\ &\equiv \left(\eta^{is} \frac{\partial h^j}{\partial v^s} \eta_{jk} + \frac{\partial h^i}{\partial v^k} + \eta^{is} \eta_{jl} \frac{\partial^2 h^j}{\partial v^s \partial v^k} v^l \right) v_x^k \equiv \left(h^i(v) + \eta^{is} \frac{\partial h^j}{\partial v^s} \eta_{jl} v^l \right)_x, \end{aligned} \quad (4.11)$$

где $h^i(v)$, $1 \leq i \leq N$, – произвольное решение интегрируемой системы (4.3), (4.4). Эта система гидродинамического типа бигамильтонова с парой “канонических” гамильтоновых операторов Дубровина–Новикова (4.1), (4.2):

$$\begin{aligned} v_{t_1}^i &= \left(\left(\eta^{is} \frac{\partial h^j}{\partial v^s} + \eta^{js} \frac{\partial h^i}{\partial v^s} \right) \frac{d}{dx} + \eta^{is} \frac{\partial^2 h^j}{\partial v^s \partial v^k} v_x^k \right) \frac{\delta H_1}{\delta v^j(x)}, \quad H_1 = \frac{1}{2} \int \eta_{jl} v^j(x) v^l(x) dx, \\ v_{t_1}^i &= \eta^{ij} \frac{d}{dx} \frac{\delta H_2}{\delta v^j(x)}, \quad H_2 = \int \eta_{jk} h^k(v(x)) v^j(x) dx. \end{aligned}$$

Следующей системой в иерархии (4.9) является интегрируемая система гидродинамического типа

$$\begin{aligned} v_{t_2}^i &= \left(\left(\eta^{is} \frac{\partial h^j}{\partial v^s} + \eta^{js} \frac{\partial h^i}{\partial v^s} \right) \frac{d}{dx} + \eta^{is} \frac{\partial^2 h^j}{\partial v^s \partial v^k} v_x^k \right) \eta_{jl} \left(h^l(v) + \eta^{lp} \frac{\partial h^r}{\partial v^p} \eta_{rq} v^q \right) \equiv \\ &\equiv \left(\left(\eta^{is} \frac{\partial h^j}{\partial v^s} + \eta^{js} \frac{\partial h^i}{\partial v^s} \right) \left(\eta_{jl} \frac{\partial h^l}{\partial v^k} + \eta_{rk} \frac{\partial h^r}{\partial v^j} + \eta_{rq} v^q \frac{\partial^2 h^r}{\partial v^j \partial v^k} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \eta^{is} \frac{\partial^2 h^j}{\partial v^s \partial v^k} \left(\eta_{jl} h^l(v) + \eta_{rq} v^q \frac{\partial h^r}{\partial v^j} \right) \right) v_x^k. \end{aligned}$$

Иерархия интегрируемых систем (4.9) является “канонической” для всех бигамильтоновых систем гидродинамического типа, обладающих парой согласованных локальных гамильтоновых операторов гидродинамического типа.

Полностью аналогичная явная конструкция соответствующего класса интегрируемых бигамильтоновых систем гидродинамического типа построена нами и в случае согласованных нелокальных гамильтоновых операторов гидродинамического типа (о нелокальных гамильтоновых операторах гидродинамического типа см. [16]). Эти результаты будут опубликованы в других наших работах.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда Александра фон Гумбольдта (Германия), а также Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00803) и фонда INTAS (грант № 99-1782).

Список литературы

- [1] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков. ДАН СССР. 1983. Т. 270. № 4. С. 781–785.
- [2] I. Dorfman. Dirac Structures and Integrability of Nonlinear Evolution Equations. Chichester: Wiley, 1993.
- [3] F. Magri. J. Math. Phys. 1978. V. 19. № 5. P. 1156–1162.
- [4] B. Dubrovin. Geometry of 2D topological field theories. In: Integrable Systems and Quantum Groups. Lect. Notes Math. V. 1620. Eds. M. Francaviglia et al. Berlin: Springer, 1996. P. 120–348; hep-th/9407018.
- [5] B. Dubrovin. Differential geometry of the space of orbits of a Coxeter group. Preprint SISSA-29/93/FM. Trieste: SISSA, 1993; hep-th/9303152.
- [6] B. Dubrovin. Flat pencils of metrics and Frobenius manifolds. Preprint SISSA 25/98/FM. Trieste: SISSA, 1998; math.DG/9803106.
- [7] A. P. Fordy, O. I. Mokhov. Physica D. 2001. V. 152–153. № 1–4. P. 475–490.
- [8] О. И. Мохов. Функц. анализ и его прилож. 2001. Т. 35. № 2. С. 24–36; math.DG/0005051.
- [9] О. И. Мохов. УМН. 1997. Т. 52. № 6. С. 171–172.
- [10] О. И. Мохов. ТМФ. 2002. Т. 130. № 2. С. 233–250; math.DG/0005081; УМН. 2001. Т. 56. № 2. С. 221–222.
- [11] E. V. Ferapontov. Compatible Poisson brackets of hydrodynamic type. math.DG/0005221.
- [12] О. И. Мохов. Тр. МИ РАН. 1999. Т. 225. С. 284–300.
- [13] О. И. Мохов. Rep. Math. Phys. 1999. V. 43. № 1/2. P. 247–256.
- [14] О. И. Мохов. УМН. 1998. Т. 53. № 2. С. 153–154.
- [15] И. М. Гельфанд, И. Я. Дорфман. Функц. анализ и его прилож. 1979. Т. 13. № 4. С. 13–30; B. Fuchssteiner. Application of hereditary symmetries to nonlinear evolution equations. Nonlinear Anal. 1979. V. 3. P. 849–862; A. S. Fokas, B. Fuchssteiner. Lett. Nuovo Cimento. 1980. V. 28. № 8. P. 299–303; П. Олвер. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989; О. И. Мохов. УМН. 1998. Т. 53. № 3. С. 85–192.
- [16] О. И. Мохов, Е. В. Ферапонтов. УМН. 1990. Т. 45. № 3. С. 191–192; Е. В. Ферапонтов. Функц. анализ и его прилож. 1991. Т. 25. № 3. С. 37–49; Гамильтоновы системы гидродинамического типа и их реализация на гиперповерхностях псевдоевклидова пространства. В сб.: Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. Т. 22. Ред. Н. М. Остиану. М.: ВИНТИ, 1990. С. 59–96; О. И. Мохов, Е. В. Ферапонтов. Функц. анализ и его прилож. 1994. Т. 28. № 2. С. 60–63; О. И. Мохов. Phys. Lett. A. 1992. V. 166. № 3, 4. P. 215–216; E. V. Ferapontov. Nonlocal Hamiltonian operators of hydrodynamic type: differential geometry and applications. In: Topics in Topology and Mathematical Physics. Ed. S. P. Novikov. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1995. P. 33–58.