Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

G. V. Efimov, Essentially nonlinear interaction
Lagrangians and nonlocalized quantum field theory, *TMF*,
1970, Volume 2, Number 1, 36–54

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have
read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.205.225.156

April 26, 2023, 02:38:18

СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫЕ ЛАГРАНЖИАНЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И НЕЛОКАЛЬНАЯ КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Г. В. Ефимов

Предложена формальная схема рассмотрения квантовой теории однокомпонентного скалярного поля $\varphi(x)$ с существенно нелинейным лагранжианом взаимодействия вида

$$L_I(x) = g \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n!} : \varphi^n(x) :,$$

где u_n — последовательность чисел, удовлетворяющая некоторым общим условиям. Приведены соображения в пользу того, что в рамках предложенной схемы можно подобрать нелокальный формфактор так, чтобы S -матрица, построенная по лагранжиану взаимодействия $L_I(x)$, стала конечной и унитарной в каждом порядке теории возмущения.

1. ВВЕДЕНИЕ

В теории возмущений современной квантовой теории поля S -матрица строится в виде функционального разложения по степеням константы связи

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g^n}{n!} \int d^4x_1 \dots \int d^4x_n S_n(x_1, \dots, x_n), \quad (1.1)$$

где $S_n(x_1, \dots, x_n)$ являются операторными выражениями, зависящими от функций поля. При определении конкретного вида функций $S_n(x_1, \dots, x_n)$, кроме общих требований релятивистской инвариантности, унитарности, причинности и др. (см., например, [1]), используются следующие два принципа, на которых нам хотелось бы более подробно остановиться.

I. Принцип соответствия: при бесконечно малых константах взаимодействия S -матрица должна иметь вид

$$S(g) = 1 + ig \int d^4x L_I(x), \quad (1.2)$$

где $L_I(x)$ — лагранжиан взаимодействия квантованных полей. Этот принцип определяет $L_I(x)$.

II. Принцип доопределения T -произведения, согласно которому придается математический смысл хронологическому упорядочиванию в произведении

$$T(L_I(x_1)L_I(x_2)) \quad (1.3)$$

или

$$T(L_I(x_1) \dots L_I(x_2)) \quad (1.3a)$$

при совпадающих аргументах $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Знание одного только лагранжиана взаимодействия еще не позволяет найти S -матрицу теории. Более того, по одному лагранжиану взаимодействия можно построить несколько различных S -матриц. Необходимо привлекать дополнительные принципы, чтобы обеспечить единственность построения S -матрицы по заданному $L_I(x)$. В случае обычных так называемых перенормируемых взаимодействий таким принципом является требование перенормируемости. В случае неперенормируемых взаимодействий такого принципа уже нет, и поэтому совсем не ясно, как строить теорию возмущений от порядка к порядку по константе связи — возникает фактически функциональный произвол при построении конечной S -матрицы теории.

Следует заметить, что при переходе к классическому пределу в S -матрице квантованных полей при $\hbar \rightarrow 0$ (где $\hbar$ — постоянная Планка) исчезают все вклады от так называемых замкнутых петель, т. е. от тех частей S -матрицы, для которых наиболее существенно определение T -произведения при совпадающих аргументах [2, 3]. Это означает, что T -произведение является чисто квантовой операцией. Поэтому проблема определения T -произведения может быть решена только в рамках квантовой теории поля.

К сожалению, пока, кроме принципа перенормируемости, пригодного лишь для весьма узкого класса взаимодействий, никаких других физических или достаточно убедительных математических принципов не существует. Сейчас начинают появляться работы, где эту проблему пытаются решить для специально выбранных неперенормируемых лагранжианов взаимодействия (см., например, [4, 5]), однако эта проблема даже для этих частных лагранжианов не решена полностью.

В настоящей работе мы покажем на примере однокомпонентного скалярного поля, как в рамках нелокальной теории для любого лагранжиана взаимодействия вида

$$L_I(x) = g \sum_{n=3}^{\infty} \frac{u_n}{n!} : \varphi^n(x) :, \quad (1.4)$$

где $u_3, u_4, \dots$ — произвольная последовательность вещественных чисел, можно строить нелокальную S -матрицу, конечную и унитарную в каждом порядке теории возмущений.

Основной постулат будет состоять в определении «хронологического» оператора T только для произведения двух лагранжианов

$$T(L_I(x)L_I(y)). \quad (1.5)$$

В согласии с физической гипотезой о том, что принципиально нельзя ничего сказать о поведении частиц на достаточно малых пространственно-временных расстояниях, определение выражения (1.5) крайне неоднозначно: к нему всегда можно добавить операторнозначную обобщенную функ-

цию из некоторого пространства нелокальных обобщенных функций [6, 7]. Ниже будет введен «принцип минимальной области роста», в рамках которого будет существенно ограничен произвол в выборе вводимой регуляризации.

Нам кажется, что предлагаемый нами единый метод рассмотрения практически любых лагранжианов взаимодействия окажется полезным для дальнейшего изучения структуры квантовой теории поля.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В теории квантованного скалярного поля нами будет предложен метод построения конечной S -матрицы по теории возмущений для лагранжианов взаимодействия, которые зависят от скалярного поля $\varphi(x)$ существенно нелинейным образом. При этом лагранжиан свободного поля остается обычным, так что никаких трудностей с квантованием теории не возникает. Плотность лагранжиана записывается в виде

$$L(x) = L_0(x) + L_I(x), \quad (2.1)$$

$$L_0(x) = -\frac{1}{2} \left(m^2 \varphi^2(x) - \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_\nu} \cdot \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_\nu} \right), \quad (2.2)$$

$$L_I(x) = -gU(\varphi(x)), \quad (2.3)$$

где $U(\varphi)$ представима в виде ряда

$$U(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n!} : \varphi^n(x) :, \quad (2.4)$$

здесь $\{u_0, u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots\}$ — некоторая последовательность вещественных чисел. Мы будем рассматривать такие последовательности коэффициентов $\{u_n\}$, для которых можно ввести понятие порядка роста. Будем говорить, что дифференцируемая монотонная функция $g(x)$ является порядком роста последовательности $\{u_n\}$, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |u_n|}{g(n)} = 1. \quad (2.5)$$

Функция $g(x)$ может расти при $x \rightarrow \infty$ сколь угодно быстро. Будем считать, что для рассматриваемой последовательности чисел $\{u_n\}$ существует комплексная вполне аддитивная мера $\sigma(\xi)$ в плоскости комплексного переменного ξ такая, что

$$u_n = \int \xi^n d\sigma(\xi). \quad (2.6)$$

Из условия (2.5) легко получить, что

$$\int e^{G(|\xi|)} |d\sigma(\xi)| < \infty, \quad (2.7)$$

где

$$G(|\xi|) = \max_{n > 0} (n \ln |\xi| - g(n)). \quad (2.8)$$

Тогда, учитывая (2.6), лагранжиан взаимодействия $L_I(x)$ можно представить в виде ¹⁾

$$L_I(x) = -g \int : e^{\xi \varphi(x)} : d\sigma(\xi). \quad (2.9)$$

Задача построения по заданному лагранжиану взаимодействия конечной S -матрицы формулируется следующим образом [10]: **поставить в соответствие** нелинейному лагранжиану взаимодействия типа (2.4) унитарную S -матрицу, свободную от ультрафиолетовых расходимостей в каждом порядке теории возмущений.

Еще раз подчеркнем, что слова «поставить в соответствие» связаны с определением T -произведения при совпадающих аргументах, о чем говорилось во введении. Следует заметить, что в случае нелокальных теорий операцию T нельзя рассматривать как процедуру строгого упорядочивания операторов поля по времени. Мы сохраним символ T , но под ним будем понимать некоторую операцию, согласно которой будем строить $S_n(x_1, \dots, x_n)$ по заданному лагранжиану $L_I(x)$. Вид этой операции является как раз тем дополнительным **постулатом** теории, который гарантирует единственность построения S -матрицы по заданному лагранжиану взаимодействия.

3. ВВЕДЕНИЕ ФОРМФАКТОРА В ТЕОРИЮ

Прежде всего нам хотелось бы привести ряд общих соображений, которые бы прояснили, что мы можем ожидать в случае успешного построения конечной унитарной S -матрицы по нелинейному лагранжиану взаимодействия.

Рассмотрим S -матрицу в первом порядке по константе связи g . Имеем

$$gS_1 = i \int d^4x L_I(x) = ig \int d^4x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n!} : \varphi^n(x) :, \quad (3.1)$$

S_1 описывает любые упругие и неупругие процессы с любым числом входящих и выходящих частиц, причем амплитуды всех этих процессов являются константами. Во втором порядке теории возмущений, действуя формально, легко получить

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{i^2}{2} \iint dx_1 dx_2 T(L_I(x_1) L_I(x_2)) = \\ &= \frac{i^2}{2} \iint dx_1 dx_2 \sum_{m_1 m_2=0} F_{m_1 m_2}^{(2)}(x_1 - x_2) : \frac{\varphi^{m_1}(x_1)}{m_1!} \frac{\varphi^{m_2}(x_2)}{m_2!} :. \end{aligned} \quad (3.2)$$

¹⁾ Заметим, что полученное представление формально, поскольку интеграл

$$\int e^{\xi \varphi} d\sigma(\xi),$$

где φ — просто число, может расходиться. Поэтому формула (2.9) должна рассматриваться лишь как иная запись формального степенного ряда (2.4).

Зная представление (2.4), легко можно получить для $F_{m_1 m_2}^{(2)}$ выражение

$$F_{m_1 m_2}^{(2)}(x_1 - x_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_{m_1+n} u_{m_2+n}}{n!} [\Delta_m^c(x_1 - x_2)]^n, \quad (3.3)$$

где $\Delta_m^c(x_1 - x_2)$ — причинная функция скалярного поля, которую будем рассматривать как краевое значение аналитической функции

$$\Delta_m^c(x_1 - x_2) = \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int \frac{d^4 p e^{i p (x_1 - x_2)}}{m^2 - p^2 - i\epsilon} = \frac{m}{4\pi^2} \frac{K_1(m \sqrt{-(x_1 - x_2)^2})}{\sqrt{-(x_1 - x_2)^2}}, \quad (3.4)$$

где $K_1(u)$ — функция Макдональда, масса m имеет отрицательную мнимую добавку, $x^2 = x_0^2 - \mathbf{x}^2$. Полученный ряд обладает особенностями двух сортов. Во-первых, существуют такие последовательности коэффициентов $\{u_n\}$, для которых ряд расходится при любых значениях комплексного переменного Δ^c , во-вторых, даже в случае сходимости ряда функция, которую этот ряд представляет, имеет существенную особенность при $x_1 = x_2$. Поэтому вычисление фурье-образа представляет собой непростую задачу.

Рис. 1

Собственно, это и составляет главную трудность при изучении неперенормируемых теорий.

Предположим, что мы как-то умеем вычислять интегралы

$$\tilde{F}_{m_1 m_2}^{(2)}(p^2) = i \int d^4 x e^{i p x} F_{m_1 m_2}^{(2)}(x) \quad (3.5)$$

и что они конечны. Какими свойствами должны обладать функции $\tilde{F}_{m_1 m_2}^{(2)}(p^2)$, если унитарность и причинность выполнены?

Для простоты рассмотрим амплитуду упругого рассеяния $\tilde{F}_{22}^{(2)}(p^2)$. Согласно (3.3) она может быть представлена в некотором смысле как бесконечная сумма диаграмм Фейнмана (см. рис. 1).

Если S -матрица унитарна в каждом порядке теории возмущений, тогда мнимая часть $\tilde{F}_{22}^{(2)}(p^2)$ при $p^2 > 4m^2$ должна быть равна

$$\text{Im } \tilde{F}_{22}^{(2)}(p^2) = \rho_{22}(p^2) = \sum_{n=2}^{\left[\frac{\sqrt{p^2}}{m}\right]} \frac{u_{n+2}^2}{n!} \Omega_n(p^2), \quad (3.6)$$

где $\Omega_n(p^2)$ — фазовый объем n скалярных частиц с массой m :

$$\Omega_n(p^2) = \frac{1}{(2\pi)^{3(n-1)}} \int \frac{d^3 \mathbf{k}_1}{2\omega_1} \dots \int \frac{d^3 \mathbf{k}_n}{2\omega_n} \delta^{(n)}(p - k_1 - \dots - k_n). \quad (3.7)$$

Поскольку коэффициенты u_{n+2}^2 положительны, мнимая часть (3.6) растет с ростом p^2 быстрее, чем любая конечная степень p^2 , если все $u_n \neq 0$. В таблице приведены примеры зависимости роста функции $\rho_{22}(p^2)$ от вида коэффициентов u_n .

Вообще, в теории с существенно нелинейным лагранжианом взаимодействия единственными математически хорошо определенными величинами следует считать функции

$$\rho_{m_1 m_2}(p^2) = \sum_{n=2}^{\left[\frac{\sqrt{p^2}}{m} \right]} \frac{u_{n+m_1} u_{n+m_2}}{n!} \Omega_n(p^2), \quad (3.8)$$

так как они определяются конечными суммами и имеют смысл для любых последовательностей коэффициентов $\{u_n\}$. По существу, наша задача со-

$U(\varphi)$	u_n	$G(\xi)$	$\ln \rho_{22}(\kappa^2)$ $\kappa \rightarrow \infty$
$\sin \varphi$	$\sim a^n$	$G(\xi) = \infty$	$\text{const } \kappa^{2/3}$
$e^{-\varphi^2}$	$\sim \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$	$ \xi ^2$	$\text{const } \kappa$
$e^{-\varphi^4}$	$\sim \Gamma\left(\frac{3}{4}n\right)$	$ \xi ^{3/4}$	$\frac{5}{3} \kappa \ln \kappa$
$\frac{\varphi}{\sqrt{1 + i\varphi^2}}$	$\sim \Gamma(n)$	$ \xi $	$\kappa \ln \kappa$
$\sum_n n! \varphi^n$	$\sim \Gamma(2n)$	$ \xi ^{1/2}$	$4\kappa \ln \kappa$
$\sum_n e^{n^2} \varphi^n$	$\sim e^{n^2}$	$(\ln \xi)^2$	$2\kappa^2$
φ^N	$u_n = 0; n > N$	$G(\xi) = \infty$ при $ \xi > \varepsilon$	$2N \ln \kappa$

стоит в том, чтобы восстановить теорию по этим спектральным функциям, пользуясь общими принципами квантовой теории поля.

Что теперь можно сказать о поведении всей амплитуды $\tilde{F}_{m_1 m_2}^{(2)}(p^2)$? Ее реальная часть может быть найдена лишь только после определения интеграла (3.5). Однако из общих соображений следует предполагать, что $\tilde{F}_{m_1 m_2}^{(2)}(p^2)$, являясь амплитудой второго порядка теории возмущений, должна иметь простой полюс в точке $p^2 = m^2$ с вычетом $u_{1+m_1} u_{1+m_2}$ и точку ветвления при $p^2 = 4m^2$. Скачок на этом разрезе равен $2i\rho_{m_1 m_2}(p^2)$. Других особенностей в конечной плоскости p^2 эта амплитуда не должна иметь. Таким образом, можно надеяться, что функция $\tilde{F}_{m_1 m_2}^{(2)}(p^2)$, если она существует, представляется в виде

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{m_1 m_2}^{(2)}(p^2) &= \frac{u_{1+m_1} u_{1+m_2}}{m^2 - p^2 - i\varepsilon} + \tilde{W}(p^2) + \\ &+ \frac{\tilde{V}(p^2)}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{d\kappa^2 \rho_{m_1 m_2}(\kappa^2)}{(\kappa^2 - p^2 - i\varepsilon) \tilde{V}(\kappa^2)}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где $\tilde{V}(p^2)$ и $\tilde{W}(p^2)$ — целые функции в плоскости комплексного p^2 , вещественные при вещественных p^2 и такие, что интеграл в (3.9) сходится. Если $\tilde{W}(p^2)$ и $\tilde{V}(p^2)$ являются целыми функциями порядка роста меньше $1/2$,

тогда амплитуда $\tilde{F}_{m_1 m_2}^{(2)}(p^2)$ соответствует локальной теории. Если же $\tilde{V}(p^2)$ и $\tilde{W}(p^2)$ — целые функции порядка роста $1/2$ или выше, то $\tilde{F}_{m_1 m_2}^{(2)}(p^2)$ соответствует нелокальной теории (см. [6, 7]).

В дальнейшем будем предполагать, что причинная амплитуда $\tilde{F}_{m_1 m_2}^{(2)}(p^2)$ представляется в виде

$$\tilde{F}_{m_1 m_2}^{(2)}(p^2) = \tilde{V}(p^2) \left\{ \frac{u_{1+m_1} u_{1+m_2}}{\tilde{V}(m^2)(m^2 - p^2 - i\varepsilon)} + \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{d\kappa^2 \rho_{m_1 m_2}(\kappa^2)}{\tilde{V}(\kappa^2)(\kappa^2 - p^2 - i\varepsilon)} \right\}. \quad (3.10)$$

Проблемой, как выбрать формфактор $\tilde{V}(p^2)$, мы займемся ниже.

Посмотрим теперь, к каким изменениям в конфигурационном пространстве приводит определение амплитуды $\tilde{F}_{m_1 m_2}^{(2)}(p^2)$ согласно формуле (3.10). В x -пространстве получим

$$F_{m_1 m_2}^{(2)}(x_1 - x_2) = \int dy^4 V(x_1 - y) \left\{ u_{1+m_1} u_{1+m_2} \Delta_m^c(y - x_2) + \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{d\kappa^2 \rho_{m_1 m_2}(\kappa^2)}{\tilde{V}(\kappa^2)} \Delta_\kappa^c(y - x_2) \right\}, \quad (3.11)$$

где $V(x_1 - x_2)$ — нелокальная обобщенная функция вида

$$V(x_1 - x_2) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \square^n \delta^{(4)}(x_1 - x_2), \quad (3.12)$$

если $\tilde{V}(p^2) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (p^2)^n$. Такой тип нелокальных функций рассмотрен в [6, 7]. Итак, полученная причинная функция является сверткой причинной функции умеренного роста и нелокальной обобщенной функции. Иначе, функция $F_{m_1 m_2}^{(2)}(x_1 - x_2)$ представляет собой обычную хорошо определенную причинную функцию умеренного роста, которая как бы «размазана» с помощью нелокальной обобщенной функции $V(x_1 - x_2)$.

Выражение (3.11) математически хорошо определено. Можно дать другое представление в x -пространстве для функции (3.10). Воспользовавшись тождеством

$$[\Delta_m^c(x_1 - x_2)]^n = \int_{(nm)^2}^{\infty} d\kappa^2 \Omega_n(\kappa^2) \Delta_\kappa^c(x_1 - x_2), \quad (3.13)$$

справедливым при $x_1 = x_2$, перепишем исходную формулу (3.3) в виде

$$F_{m_1 m_2}^{(2)}(x_1 - x_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_{n+m_1} u_{n+m_2}}{n!} \int_{(nm)^2}^{\infty} d\kappa^2 \Omega_n(\kappa^2) \Delta_\kappa^c(x_1 - x_2). \quad (3.14)$$

Тогда регуляризованное выражение (3.14) запишется в виде

$$F_{m_1 m_2}^{(2)}(x_1 - x_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_{n+m_1} u_{n+m_2}}{n!} \int_{(nm)^2}^{\infty} d\kappa^2 \Omega_n(\kappa^2) [\Delta_\kappa^c(x_1 - x_2) + K_\kappa(x_1 - x_2)], \quad (3.15)$$

где

$$K_\kappa(x_1 - x_2) = \frac{i}{\tilde{V}(\kappa^2)} \int d^n p e^{ip(x_1 - x_2)} \frac{\tilde{V}(p^2) - \tilde{V}(\kappa^2)}{p - \kappa^2}. \quad (3.16)$$

Здесь $K_{\kappa}(x_1 - x_2)$ — нелокальная обобщенная функция, так как функция $\frac{\tilde{V}(p^0) - \tilde{V}(\kappa)}{p^0 - \kappa}$ целая.

Приведем одно из физических соображений, которое можно привлечь для интерпретации вводимой регуляризации. Пусть имеются два бесконечно тяжелых точечных источника, расположенных на некотором расстоянии друг от друга. Пусть взаимодействие между ними осуществляется через промежуточное мезонное поле. Пусть лагранжиан взаимодействия этой системы можно записать в виде

$$gL_I(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -g \int d^3x U(\varphi(x)) [\delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}_1) + \delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}_2)]. \quad (3.17)$$

S -матрица, описывающая взаимодействие этой системы, записывается по обычным правилам:

$$S = T \exp \left\{ +ig \int d^4x L_I(x) \right\}. \quad (3.18)$$

Первая не исчезающая поправка к энергии каждого источника и энергии взаимодействия между двумя источниками дается матричными элементами S -матрицы во втором порядке теории возмущений и пропорциональна

$$\begin{aligned} \Delta E &\sim \frac{1}{2\pi} \int d^4(x_1 - x_2) \langle 0 | T L_I(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; x_1) L_I(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; x_2) | 0 \rangle = \\ &= 2g^2 W_2(0) + 2g^2 \mathcal{V}_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \end{aligned} \quad (3.19)$$

где

$$W_2(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d(x_{01} - x_{02}) \langle 0 | T \{ U(\varphi(x_1)) U(\varphi(x_2)) \} | 0 \rangle. \quad (3.20)$$

Первый член в формуле (3.19) представляет собой поправку к собственной энергии источника, а второй член — потенциальную энергию между двумя источниками за счет обмена скалярными частицами.

Разумными физическими требованиями являются:

$$W_2(0) < \infty, \quad (I)$$

$$W_2(\mathbf{x}) \rightarrow 0 \text{ при } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (II)$$

В обычной локальной квантовой теории поля этим требованиям удовлетворить не удастся, если оставаться в рамках требований релятивистской инвариантности. В нелокальной теории эти требования автоматически выполняются. Действительно, согласно (3.20) и (3.11) имеем

$$W_2(\mathbf{r}) = \frac{u_1^2}{\tilde{V}(m^2)} \int d^3p V(|\mathbf{r} - \mathbf{p}|) \frac{e^{-m|\mathbf{q}|}}{|\mathbf{q}|} + \int_{4m^2}^{\infty} \frac{d\kappa^2 \rho_{0,0}(\kappa^2)}{\tilde{V}(\kappa^2)} \int d^3p V(|\mathbf{r} - \mathbf{p}|) \frac{e^{-\kappa|\mathbf{q}|}}{|\mathbf{q}|}, \quad (3.21)$$

где

$$V(|\mathbf{r} - \mathbf{p}|) = \int d^3q e^{i\mathbf{q}(\mathbf{r}-\mathbf{p})} \tilde{V}(-\mathbf{q}^2). \quad (3.22)$$

Если

$$\tilde{V}(-\mathbf{q}^2) = 0 \left(\frac{1}{(\mathbf{q}^2)^2} \right) \text{ при } \mathbf{q}^2 \rightarrow \infty,$$

то

$$V(0) < \infty,$$

$$V(|\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}|) = O(e^{-G(|\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}|/l)}) \text{ при } |\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}|/l \gg 1,$$

где параметр l имеет смысл элементарной длины. Отсюда легко получить, что

$$W_2(0) = \frac{u_1^2}{\tilde{V}(m^2)} a(m) + \int_{4m^2}^{\infty} \frac{d\kappa^2 \rho(\kappa')}{\tilde{V}(\kappa^2)} a(\kappa) < \infty, \quad (3.23)$$

так как

$$a(\kappa) = \int d^3\mathbf{p} V(|\mathbf{p}|) \frac{e^{-\kappa|\mathbf{q}|}}{|\mathbf{q}|} < \infty. \quad (3.24)$$

Таким образом, мы видим, что введение нелокальности в теорию изменяет потенциал Юкавы на малых расстояниях, происходит как бы «размазка» потенциала Юкавы на расстояниях порядка элементарной длины l .

Требования макропричинности и унитарности определяют лишь тот класс функций, к которому должен принадлежать нелокальный формфактор $V(|\mathbf{p}|)$.

Полученные формулы можно рассматривать как физическое обоснование введения евклидовой метрики (см. следующий раздел): убывание формфактора $\tilde{V}(p^2)$, и следовательно, пропагатора $\tilde{F}_{m,m}^{(2)}(p^2)$ при $p^2 \rightarrow -\infty$ приводит к тому, что взаимодействие двух бесконечно тяжелых точечных источников описывается несингулярным потенциалом, который представляет собой «размазанный» на расстояниях порядка l потенциал Юкава.

В случае $\tilde{V}(p^2) \rightarrow \infty$ при $p^2 \rightarrow -\infty$, что не противоречит основным принципам построения S -матрицы, потенциал $W(\mathbf{r})$ уже не описывался бы просто функцией, а был бы обобщенной функцией вида

$$W_2(\mathbf{r}) \sim \int d^3\mathbf{p} V(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}) \frac{e^{-m|\mathbf{q}|}}{|\mathbf{q}|}, \quad (3.25)$$

где

$$V(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \Delta^n \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}), \quad (3.26)$$

т. е. $V(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho})$ — нелокальная обобщенная функция, определенная на некотором пространстве целых функций. Это означает, что в этом случае бесконечно тяжелый источник не может быть точечным, так как распределение источника в пространстве должно описываться целой функцией. Следовательно, в этом случае мы не имеем той ясной физической интерпретации на языке потенциалов, которая возможна при условиях, обеспечивающих переход к евклидовой метрике (см. ниже).

4. РЯД ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ S -МАТРИЦЫ

Приступим теперь к построению ряда теории возмущений для S -матрицы теории. Проведем ряд формальных преобразований

$$S = T \exp \left\{ i \int d^4 x L_I(x) \right\} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g^n}{n!} \int d^4 x_1 \dots \int d^4 x_n S_n(x_1, \dots, x_n), \quad (4.1)$$

$$S_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{m_1, \dots, m_n=0}^{\infty} F_{m_1 \dots m_n}(x_1, \dots, x_n) : \frac{\varphi^{m_1}(x_1)}{m_1!} \frac{\varphi^{m_n}(x_n)}{m_n!} :. \quad (4.2)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} S_n(x_1, \dots, x_n) &= i^n T(L_I(x_1) \dots L_I(x_n)) = \\ &= i^n \int d\sigma(\xi_1) \dots \int d\sigma(\xi_n) T(: e^{\xi_1 \varphi(x_1)} : \dots : e^{\xi_n \varphi(x_n)} :) = \\ &= i^n \int d\sigma(\xi_1) \dots \int d\sigma(\xi_n) : e^{\xi_1 \varphi(x_1)} \dots e^{\xi_n \varphi(x_n)} : \prod_{1 \leq i < j \leq n} e^{\xi_i \xi_j \Delta_m^c(x_i - x_j)}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

При получении последнего равенства мы воспользовались обычной теоремой Вика для перехода от T -произведения к N -произведению. Отсюда легко получить

$$\begin{aligned} F_{m_1 \dots m_n}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) &= i^n \int d\sigma(\xi_1) \dots \int d\sigma(\xi_n) \xi_1^{m_1} \dots \xi_n^{m_n} \times \\ &\times \prod_{1 \leq i < j \leq n} \exp \{ \xi_i \xi_j \Delta_m^c(x_i - x_j) \}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Амплитуды физических процессов определяются интегралами вида

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{m_1 \dots m_n}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) &= \int d^4 x_1 \dots \int d^4 x_n e^{i(p_1 x_1 + \dots + p_n x_n)} F_{m_1 \dots m_n}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \\ &= (-i)^{n-1} (2\pi)^4 \delta^{(n)}(p_1 + \dots + p_n) T_{m_1 \dots m_n}^{(n)}(p_1, \dots, p_n), \end{aligned} \quad (4.5)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{T}_{m_1 \dots m_n}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) &= i^{n-1} n^4 \int d^4 x_1 \dots \int d^4 x_n \delta^{(n)}(x_1 + \dots + x_n) \times \\ &\times e^{i(p_1 x_1 + \dots + p_n x_n)} F_{m_1 \dots m_n}^{(n)}(x_1, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Здесь p_j — внешние импульсы.

В полученном выражении не определены математически величины $\exp \{ \xi_i \xi_j \Delta_m^c(x_i - x_j) \}$. Согласно сказанному в предыдущем разделе мы определим, или постулируем следующее представление:

$$e^{\xi_i \xi_j \Delta_m^c(x_i - x_j)} = 1 + w(\xi_i \xi_j; x_i - x_j), \quad (4.7)$$

где

$$\begin{aligned} w(\xi_i \xi_j; x_i - x_j) &= \int d^4 y V(x_i - y) \left[\frac{\xi_i \xi_j}{\tilde{V}(m^2)} \Delta_m^c(y - x_j) + \right. \\ &\left. + \int_{4m^2}^{\infty} \frac{d\kappa^2 \rho(\xi_i \xi_j; \kappa^2)}{\tilde{V}(\kappa^2)} \Delta_{\kappa^c}(y - x_j) \right], \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\rho(\xi_i \xi_j; \kappa^2) = \sum_{n=2}^{\left[\frac{\kappa^2}{m^2} \right]} \frac{(\xi_i \xi_j)^n}{n!} \Omega_n(\kappa^2). \quad (4.9)$$

В импульсном представлении получим

$$\tilde{w}(\xi_i \xi_j; p^2) = i \left[\frac{\tilde{V}(p^2)}{\tilde{V}(m^2)} \frac{\xi_i \xi_j}{m^2 - p^2 - i\varepsilon} + \frac{\tilde{V}(p^2)}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{d\kappa^2 \rho(\xi_i \xi_j; \kappa^2)}{\tilde{V}(\kappa^2) (\kappa^2 - p^2 - i\varepsilon)} \right]. \quad (4.10)$$

Предполагается, что целая функция $\tilde{V}(p^2)$ такова, что интеграл в (4.10) хорошо сходится.

С точки зрения диаграммной техники Фейнмана функция $\tilde{w}(\xi_i \xi_j; p^2)$ представляет собой пропагатор, соединяющий две точки, причем этот пропагатор учитывает любое количество частиц, распространяющихся из одной точки в другую.

Подставляя (4.7) в (4.4), получим

$$F_{m_1 \dots m_n}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = i^n \int d\sigma(\xi_1) \dots \int d\sigma(\xi_n) \xi_1^{m_1} \dots \xi_n^{m_n} \times \\ \times \prod_{1 \leq i < j \leq n} \{1 + w(\xi_i \xi_j; x_i - x_j)\}. \quad (4.11)$$

Соответственно амплитуды $T_{m_1 \dots m_n}^{(n)}(p_1, \dots, p_n)$ можно записать в виде

$$T_{m_1 \dots m_n}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = \int d\sigma(\xi_1) \dots \int d\sigma(\xi_n) \xi_1^{m_1} \dots \xi_n^{m_n} \times \\ \times t^{(n)}(\xi_1, \dots, \xi_n; p_1, \dots, p_n), \quad (4.12)$$

$$t^{(n)}(\xi_1, \dots, \xi_n; p_1, \dots, p_n) = i^{n-1} n^4 \int d^4 x_1 \dots \int d^4 x_n \delta^{(n)}(x_1 + \dots + x_n) \times \\ \times e^{i(p_1 x_1 + \dots + p_n x_n)} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \{1 + w(\xi_i \xi_j; x_i - x_j)\}. \quad (4.13)$$

Переходя к импульсному пространству, формально получим

$$t^{(n)}(\xi_1, \dots, \xi_n; p_1, \dots, p_n) = i^{n-1} (2\pi)^{4(n-1)} n^4 \times \\ \times \prod_{1 \leq i < j \leq n} \int d^4 q_{ij} \{\delta^{(n)}(q_{ij}) + \tilde{w}(\xi_i \xi_j, q_{ij}^2)\} \int d^4 q \prod_{l=1}^n \delta^{(4)}(p_l + q - \mathcal{H}_l(q_{ij})), \quad (4.14)$$

где

$$\mathcal{H}_l(q_{ij}) = \sum_{j=1}^{l-1} q_{jl} - \sum_{j=l+1}^n q_{lj}. \quad (4.15)$$

Полученный в (4.14) интеграл по промежуточным импульсам q_{ij} не определен, поскольку функции $\tilde{w}(\xi_i \xi_j; q_{ij}^2)$ довольно быстро растут при $q_{ij}^2 \rightarrow +\infty$. Здесь мы встречаемся с проблемой определения T -произведения лагранжианов взаимодействия:

$$T(L_I(x_1) \dots L_I(x_n)). \quad (4.16)$$

Введение формфактора $\tilde{V}(p^2)$ связано с определением лишь произведения

$$T(L_I(x_1) L_I(x_2)), \quad (4.17)$$

что не дает еще знания n -точечной функции (4.16).

С чисто математической точки зрения, проблема состоит в следующем. Известна обобщенная функция $T(L_I(x_1) L_I(x_2))$, зависящая только от двух аргументов x_1 и x_2 . Как определить обобщенную функцию $T(L_I(x_1) \dots L_I(x_n))$, которая зависит от n -аргументов $x_1, \dots, x_n$ и, по сути дела, является произведениями двухточечных обобщенных функций $T(L_I(x_1) \cdot L_I(x_2))$? Короче, как определить квадрат обобщенной функции?

С общей точки зрения можно считать, что T -произведения в (4.16) и (4.17) не связаны друг с другом, и следовательно, в этих случаях можно

действовать, вообще говоря, разными способами. Наша задача, однако, состоит в том, чтобы построить такой аппарат, который позволил бы автоматически получать n -точечные функции $T(L_I(x_1) \dots L_I(x_n))$, если нам известна регуляризация двухточечной функции $T(L_I(x_1)L_I(x_2))$.

Таким методом построения высших приближений теории по низшим является переход к евклидовой метрике пространственноподобных импульсов, если амплитуды второго порядка теории возмущений (4.10) убывают при $p^2 \rightarrow -\infty$. В рассматриваемых нелокальных теориях переход к евклидовой метрике с математической точки зрения означает определение произведения обобщенных функций.

Если порядок целых функций $\tilde{V}(p^2)$ строго меньше единицы

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln \max_{|z|=r} |\tilde{V}(p^2)|}{\ln r} < 1, \quad (4.18)$$

тогда существует некоторая регулярная процедура перехода к евклидовой метрике [6—9]. Если же порядок целых функций $\tilde{V}(p^2)$ равен или больше единицы, тогда никакой процедуры перехода к евклидовой метрике не существует. В этом случае мы просто будем постулировать, что формальный интеграл (4.14) должен быть с самого начала записан в евклидовых переменных (формальная замена $k_0 \rightarrow ik_4$). При этом внешние импульсы остаются псевдоевклидовыми. Интегралы будут сходиться, поскольку согласно (3.20)

$$\tilde{V}(p^2) = O\left(\frac{1}{p^2}\right) \text{ при } p^2 \rightarrow -\infty, \quad (4.19)$$

откуда

$$\tilde{w}(\xi_i \xi_j, p^2) = O\left(\frac{1}{(p^2)^2}\right) \text{ при } p^2 \rightarrow -\infty. \quad (4.19a)$$

Для удобства (это не обязательно, но при этом мы избегаем ненужных усложнений в записи формул) будем считать, что внешние импульсы $p_1, \dots, p_n$, от которых зависит амплитуда $t^{(n)}(\xi_1, \dots, \xi_n; p_1, \dots, p_n)$, пространственноподобны и находятся в евклидовой области.

Совокупность пространственноподобных векторов p_j с наперед заданными скалярными произведениями $(p_i p_j)$ называется евклидовой, если при любом выборе вещественных неотрицательных чисел $a_1, \dots, a_n$ ($a_j \geq 0$)

скалярный квадрат вектора $\sum_{j=1}^n a_j p_j$, неположителен:

$$\left(\sum_{j=1}^n a_j p_j\right)^2 = \sum_{i,j=1}^n a_i a_j (p_i p_j) \leq 0, \quad (4.20)$$

и только нулевой вектор имеет длину нуль. Иначе, если совокупность псевдоевклидовых пространственноподобных векторов $p_1, \dots, p_n$ евклидова, то всегда можно выбрать такую совокупность евклидовых векторов $q_1, \dots, q_n$, что выполняется равенство

$$(p_i p_j) = -(q_i q_j), \quad (4.21)$$

здесь

$$p_i p_j = p_{i0} p_{j0} - \mathbf{p}_i \mathbf{p}_j,$$

$$q_i q_j = q_{i4} q_{j4} + \mathbf{q}_i \mathbf{q}_j.$$

Итак, вместо (4.14) получим

$$t^{(n)}(\xi_1, \dots, \xi_n, q_1, \dots, q_n) = (2\pi)^{4(n-1)} n^4 \prod_{1 \leq i < j \leq n} \int d^4 k_{ij} \times \\ \times \{\delta^{(n)}(k_{ij}) + \tilde{w}_E(\xi_i \xi_j, k_{ij}^2)\} \int d^4 k \prod_{l=1}^n \delta^{(n)}(q_l + k - \mathcal{K}_l(k_{ij})), \quad (4.22)$$

где

$$\tilde{w}_E(\xi_i \xi_j, k^2) = \frac{\tilde{V}(-k^2)}{\tilde{V}(m^2)} \frac{\xi_i \xi_j}{m^2 + k^2} + \frac{\tilde{V}(-k^2)}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{d\kappa^2 \rho(\xi_i \xi_j, \kappa^2)}{\tilde{V}(\kappa^2)} \frac{1}{\kappa^2 + k^2}. \quad (4.23)$$

Все интегралы и δ -функции в (4.22) записаны в евклидовой метрике.

Итак, амплитуда $t^{(n)}(\xi_1, \dots, \xi_n, q_1, \dots, q_n)$ определяется сходящимся интегралом и зависит от скалярных произведений евклидовых внешних импульсов $q_1, \dots, q_n$. Поскольку всевозможные скалярные произведения псевдоевклидовых и евклидовых импульсов задаются одним и тем же числом инвариантных переменных, то интеграл (4.23) определяет истинную амплитуду в евклидовой области пространственноподобных внешних импульсов, т. е. в области, где $(q_i q_j) = -(p_i p_j)$. В силу единственности аналитического продолжения можно получить амплитуду во всей области изменения инвариантных переменных путем аналитического продолжения.

Амплитуда $T_{m_1 \dots m_n}^{(n)}(q_1, \dots, q_n)$ может быть записана в виде

$$T_{m_1 \dots m_n}^{(n)}(q_1, \dots, q_n) = \int d\sigma(\xi_1) \dots \int d\sigma(\xi_n) \xi_1^{m_1} \dots \xi_n^{m_n} t^{(n)}(\xi_1, \dots, \xi_n, q_1, \dots, q_n), \quad (4.24)$$

где функция $t^{(n)}$ дается формулой (4.22). Переходя в формуле (4.24) в евклидово x -пространство, получим

$$T_{m_1 \dots m_n}^{(n)}(q_1, \dots, q_n) = n^4 \int d^4 x_1 \dots \int d^4 x_n \times \\ \times \delta^{(4)}(x_1 + \dots + x_n) e^{i(q_1 x_1 + \dots + q_n x_n)} F_{m_1 \dots m_n}^{(n)}(x_1, \dots, x_n), \quad (4.25)$$

$$F_{m_1 \dots m_n}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \int d\sigma(\xi_1) \dots \int d\sigma(\xi_n) \times \\ \times \xi_1^{m_1} \dots \xi_n^{m_n} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \{1 + w_E(\xi_i \xi_j; x_i - x_j)\}. \quad (4.26)$$

Здесь интегрирование проводится по евклидову x -пространству.

Нас сейчас будут интересовать условия, при которых функция $F_{m_1 \dots m_n}^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ определена в евклидовом x -пространстве.

Для функции $w(\xi_i \xi_j; x_i - x_j)$ получим следующую оценку сверху:

$$|w(\xi_i \xi_j; x_i - x_j)| \leq \int_{m^2}^{\infty} \frac{d\kappa^2 |\rho(\xi_i \xi_j, \kappa^2)|}{\tilde{V}(\kappa^2)} \left| \int d^4 y V(x_i - y) \Delta_*(y - x_j) \right| \leq \\ \leq \int_{m^2}^{\infty} \frac{d\kappa^2 \rho(\xi_i \xi_j, \kappa^2)}{\tilde{V}(\kappa^2)} \int d^4 y |V(y)| \Delta_*(y) \leq \\ \leq |V(0)| \int_{m^2}^{\infty} \frac{d\kappa^2 \rho(\xi_i \xi_j, \kappa^2)}{\kappa^2 \tilde{V}(\kappa^2)} \leq \text{const } e^{h_i(\ln |\xi_i \xi_j|)}, \quad (4.27)$$

где

$$h_1(a) = \max_r (ar - H_1(r)), \quad (4.28)$$

если

$$\bar{V}(\kappa^2) = -O(e^{H_1(\kappa^2)}), \quad \kappa \rightarrow +\infty. \quad (4.29)$$

Функция $h_1(a)$ — строго растущая функция. Всегда существует такая строго растущая функция $h_2(a)$, что

$$h_1(\ln |\xi_i| + \ln |\xi_j|) \leq h_2(\ln |\xi_i|) + h_2(\ln |\xi_j|). \quad (4.30)$$

Если $h_1(a)$ — выпуклая сверху функция, то

$$h_2(a) = h_1(a). \quad (4.31a)$$

Если $h_1(a)$ — выпуклая снизу функция, то

$$h_2(a) = \frac{1}{2} h_1(2a). \quad (4.31b)$$

Тогда для функции $F_{m_1 \dots m_n}^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ получим следующую оценку сверху:

$$|F_{m_1 \dots m_n}^{(n)}(x_1, \dots, x_n)| \leq \text{const} \prod_{l=1}^n \int d\sigma(\xi_l) |\xi_l|^{m_l} e^{(n-1)h_2(\ln |\xi_l|)}. \quad (4.32)$$

Итак, достаточным условием сходимости будет

$$\int e^{nh_2(\ln |\xi|)} |\xi|^m |d\sigma(\xi)| < \infty \quad (4.33)$$

для любых целых n и m .

Принимая во внимание формулы (2.7), (4.28) и (4.30), легко получить, что порядок роста формфактора должен быть строго больше:

$$H_1(p^2) > \max_{a>0} (p^2 a - G(e^a)) = \max_{|\xi|} (p^2 \ln |\xi| - G(|\xi|)). \quad (4.34)$$

Это строгое неравенство не определяет функцию $H_1(p^2)$ однозначно по функции $G(|\xi|)$, а лишь указывает нижнюю границу порядка роста.

Введем функцию

$$\frac{s(n)}{n} = \max_{|\xi|} ((n-1)h_2(\ln |\xi|) - G(|\xi|)). \quad (4.35)$$

Функция $s(n)/n$ растет при $n \rightarrow \infty$ не медленнее, чем линейно по n , а поэтому при $n \rightarrow \infty$

$$s(n) \geq An^2, \quad (4.36)$$

где A — некоторая постоянная. Функция $s(n)$ определяет рост n -го приближения теории возмущений. Имеем следующую оценку:

$$|F_{m_1 \dots m_n}^{(n)}(x_1, \dots, x_n)| \leq \text{const} e^{s(n)}. \quad (4.37)$$

Хотя это оценка сверху, она все же, как нам кажется, правильно передает порядок роста n -го приближения ряда теории возмущений для лагранжианов взаимодействия общего вида (2.4), когда все $u_n \neq 0$.

Мы видим, что рост n -го приближения теории возмущений зависит от точного порядка роста формфактора $\tilde{V}(p^2)$, поэтому выбор порядка роста формфактора должен быть связан с проблемой суммирования всего ряда теории возмущений.

5.8-МАТРИЦА В ЕВКЛИДОВОЙ МЕТРИКЕ

Пусть нам известна матрица рассеяния S . Рассмотрим процесс столкновения m_i частиц с импульсами $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{m_i}$, когда в результате взаимодействия возникает m_f частиц с импульсами $\mathbf{p}'_1, \dots, \mathbf{p}'_{m_f}$. Матричный элемент процесса определим следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\langle f | S | i \rangle}{\langle 0 | S | 0 \rangle} &\equiv \frac{\langle \mathbf{p}'_1, \dots, \mathbf{p}'_{m_f} | S | \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{m_i} \rangle}{\langle 0 | S | 0 \rangle} = \\ &= \langle f | i \rangle + \frac{(-i)^{m_f+m_i-1}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}(m_f+m_i)-4} \sqrt{m_i! m_f!}} \times \\ &\times \frac{\delta^{(n)}(p_1 + \dots + p_{m_i} - p'_1 - \dots - p'_{m_f})}{\sqrt{2p_{10} \dots 2p_{m_i0} 2p'_{10} \dots 2p'_{m_f0}}} T_{m_i+m_f}(p_1, \dots, p_{m_i}, -p'_1, \dots, p'_{m_f}), \end{aligned} \quad (5.1)$$

где

$$\begin{aligned} T_n(k_1, \dots, k_n) &= (i)^{n-1} n^4 \int d^4 x_1 \dots \int d^4 x_n e^{-i(k_1 x_1 + \dots + k_n x_n)} \times \\ &\times \delta^{(4)}(x_1 + \dots + x_n) \left\langle 0 \left| \frac{\delta^n S}{\delta \varphi(x_1) \dots \delta \varphi(x_n)} \right| 0 \right\rangle. \end{aligned} \quad (5.2)$$

В формулах (5.1) и (5.2) мы имеем обычную псевдоевклидову метрику.

Задача теории — найти полную амплитуду процесса $T_{m_i+m_f}(p_i, -p'_f)$.

Как говорилось в предыдущем разделе, введение в теорию евклидовой метрики как метода определения произведения обобщенных функций приводит к тому, что удобно с самого начала записывать S -матрицу в евклидовой метрике, а в физическую область переходить путем аналитического продолжения по инвариантным импульсным переменным. В евклидовой метрике S -матрица может быть представлена в виде следующего ряда:

$$\begin{aligned} S_E[\varphi] &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g^n}{n!} \int d^4 x_1 \dots \int d^4 x_n \int d\sigma(\xi_1) \dots \int d\sigma(\xi_n) \times \\ &\times e^{i\varphi(x_1) + \dots + i\varphi(x_n)} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \{1 + w_E(\xi_i \xi_j, x_i - x_j)\}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

где

$$w_E(\xi_i \xi_j, x_i - x_j) = \int d^4 q e^{iq(x_i - x_j)} \tilde{w}(\xi_i \xi_j, q^2), \quad (5.4)$$

$$\tilde{w}_E(\xi_i \xi_j, q^2) = \frac{\tilde{V}(-q^2)}{\tilde{V}(m^2)} \frac{\xi_i \xi_j}{m^2 + q^2} + \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{d\kappa^2 \rho(\xi_i \xi_j, \kappa^2)}{\tilde{V}(\kappa^2)} \frac{\tilde{V}(-q^2)}{\kappa^2 + q^2}, \quad (5.5)$$

$$\rho(\xi_i \xi_j, \kappa^2) = \sum_{n=2}^{\left[\frac{\kappa}{m}\right]} \frac{(\xi_i \xi_j)^n}{n!} \Omega_n(\kappa^2). \quad (5.6)$$

В формулах (5.3) — (5.5) интегрирование проводится по евклидовым x - и q -пространствам; здесь $q^2 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2$.

Кроме того, в формуле (5.3) мы считаем $\varphi(x)$ не вторично квантованным скалярным полем $\varphi(x)$, а просто некоторой вещественной функцией, зависящей от евклидовой координаты x .

В этом случае S -матрица рассматривается просто как функционал от вещественной функции $\varphi(x)$. Обычно этот функционал называется производящим.

Приведем теперь формулу, которая связывает физическую амплитуду (5.2), зависящую от физических псевдоевклидовых импульсов $k_1, \dots, k_n$, с евклидовой S -матрицей или производящим функционалом (5.3). Амплитуда (5.2) зависит от всевозможных скалярных произведений псевдоевклидовых 4-импульсов $k_1, \dots, k_n$ и является аналитической функцией этих произведений. В евклидовой области пространственноподобных импульсов $k_1, \dots, k_n$, т. е. в области, где существуют такие евклидовы импульсы $q_1, \dots, q_n$, что

$$(k_i k_j) = -(q_i q_j), \quad (5.7)$$

амплитуда $T_n(k_1, \dots, k_n)$ равна

$$T_n(k_1, \dots, k_n) = T_n^E(q_1, \dots, q_n) = n^4 \int d^4 x_1 \dots \int d^4 x_n e^{-i(q_1 x_1 + \dots + q_n x_n)} \times \\ \times \delta^{(4)}(x_1 + \dots + x_n) \frac{1}{S_E[0]} \cdot \frac{\delta^n S_E[\varphi]}{\delta \varphi(x_1) \dots \delta \varphi(x_n)} \Big|_{\varphi=0}. \quad (5.8)$$

Переход в физическую область, как уже неоднократно говорилось, осуществляется методом аналитического продолжения по инвариантным импульсным переменным.

Как показано в [8—10], S -матрица будет унитарна в каждом порядке теории возмущений по степеням константы взаимодействия g .

6. ВЫБОР ФОРМФАКТОРА

Как видно, в нашей схеме построения теории поля регуляризующей функции $\tilde{V}(p^2)$ отводится фундаментальная роль формфактора, устраняющего все расходимости, возникающие в теории. При построении же S -матрицы требуется выйти за пределы массовой оболочки при интегрировании по промежуточным виртуальным сечениям системы, поэтому амплитуды физических процессов зависят от явного вида функции $\tilde{V}(p^2)$. Итак, возникает физический вопрос: как выбрать функцию $\tilde{V}(p^2)$ и можно ли ее выбрать единственным образом?

Из предыдущего следует, что функция $\tilde{V}$ должна быть целой функцией точного порядка $H_1(r)$, кроме того, потребуем следующее:

- 1) $\tilde{V}(x)$ вещественна на вещественной оси и не имеет нулей при $x > 0$;
- 2) $\tilde{V}(x) = O(e^{H_1(x)})$ при $x \rightarrow +\infty$;
- 3) $\tilde{V}(x) = O(1/x)$ при $x \rightarrow -\infty$.

Последнее требование, как будет видно ниже, необходимо для сходимости интегралов, определяющих высшие приближения теории возмущений при построении S -матрицы.

Перечисленные выше требования еще не определяют функцию $\tilde{V}(z)$ однозначно.

Для того чтобы ограничить произвол в выборе фактора $\tilde{V}(z)$, воспользуемся следующей теоремой [12].

Теорема. Пусть аналитическая функция $H_1(z)$ обладает следующими свойствами:

- 1) $H_1(x)$ — вещественная положительная монотонно растущая при $x \rightarrow +\infty$ функция;
- 2) $H_1(z)$ регулярна при $-\pi < \arg z < \pi$;
- 3) существует такая область $\mathcal{D}$, что: а) все x , большие некоторого $x_0 > 0$, принадлежат $\mathcal{D}$; б) $\operatorname{Re} H_1(z) > 0$ для $z \in \mathcal{D}$;
- 4) пусть контур L охватывает область $\mathcal{D}$, причем

$$\operatorname{Re} H_1(z) = 0 \quad \text{для } z \in L.$$

Введем функцию

$$\tilde{V}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_R} \frac{d\xi e^{H_1(\xi)}}{\xi - z} \quad (|z| < R), \quad (6.1)$$

где контур L_R обходит в положительном направлении область

$$\mathcal{D}_R = \mathcal{D} \cap C_R,$$

где

$$C_R = \{z : |z| > R\}.$$

Тогда функция $\tilde{V}(z)$ является целой аналитической функцией в плоскости z , причем для нее справедливы асимптотические оценки

$$\tilde{V}(z) \approx e^{H_1(z)} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}} \quad (z \rightarrow \infty, z \in \mathcal{D}), \quad (6.2)$$

$$\tilde{V}(z) \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}} \quad (z \rightarrow \infty, z \notin \mathcal{D}). \quad (6.3)$$

Из теории аналитических функций известно, что чем выше рост функции $H_1(z)$, тем уже область $\mathcal{D}$. Поэтому построенная функция $\tilde{V}(z)$ единственна. Итак, условия

$$1) \tilde{V}(z) = e^{H_1(z)} + O(1/z) \quad (z \rightarrow \infty, z \in \mathcal{D});$$

$$2) \tilde{V}(z) = O\left(\frac{1}{z}\right) \quad (z \rightarrow \infty, z \notin \mathcal{D})$$

определяют функцию $\tilde{V}(z)$ однозначно.

Перечисленные условия назовем **принципом минимальной области роста**.

Действительно, возможно существование более широких областей $\mathcal{D}_1 \supset \mathcal{D}$ таких, что на контуре L_1 , охватывающем область $\mathcal{D}_1$,

$$\operatorname{Re} H_1(z) = 0.$$

Тогда интеграл (6.1) по контуру L_{1R} , охватывающему область $\mathcal{D}_{1R} = \mathcal{D}_1 \cap C_R$, определяет функцию $\tilde{V}_1(z)$, которая будет расти в более широкой области $\mathcal{D}_1$ при $z \rightarrow \infty$.

С другой стороны, добавление к функции $\tilde{V}(z)$ другой целой функции меньшего порядка роста также неизбежно расширяет область роста $\mathcal{D}$.

Мы видим, что значение порядка роста $H_1(z)$ позволяет выбрать форм-фактор единственным образом. Однако, как говорилось в конце предыдущего раздела, мы не можем определить $H_1(z)$ единственным образом без рассмотрения проблемы существования полной S -матрицы, а не только каждого отдельного порядка теории возмущений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Нами предложен вариант построения конечной и унитарной S -матрицы по теории возмущений для практически любого нелинейного лагранжиана взаимодействия скалярных частиц. Приведем в заключение схему построения S -матрицы (см. рис. 2), в которой мы еще раз обращаем внимание на

Рис. 2

основные моменты, где делаются дополнительные постулаты и предположения, которые необходимо было привлечь при построении S -матрицы теории.

Объединенный институт
ядерных исследований

Поступила в редакцию
12 мая 1969 г.

Литература

- [1] Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей, Гостехиздат, 1957.
- [2] D. C. Bonlware, L. S. Brown. Phys. Rev., **172**, 5, 1628, 1968.
- [3] Y. Nambu. Phys. Letters, **26B**, 626, 1968.
- [4] M. K. Volkov, Commun. math. Phys., **7**, 289, 1968.
- [5] T. D. Lee. Preprint CERN. TH — 940, 1968.
- [6] G. V. Efimov. Commun. math. Phys., **7**, 138, 1968.
- [7] Г. В. Ефимов. Препринт ИТФ — 68 — 52, Киев, 1968.
- [8] G. V. Efimov. Commun. math. Phys., **5**, 42, 1967.
- [9] Г. В. Ефимов. Препринт ИТФ — 69 — 54, Киев, 1968.
- [10] Г. В. Ефимов. ЯФ, **4**, 432, 1966.
- [11] Г. В. Ефимов. Препринт ИТФ — 68 — 55, Киев, 1968.
- [12] М. А. Евграфов. Асимптотические оценки и целые функции, Физматгиз, 1962.

THE ESSENTIALLY NONLINEAR INTERACTION LAGRANGIANS AND THE NON-LOCAL QUANTUM FIELD THEORY

G. V. Efimov

The formal scheme is developed for the investigation of the quantum theory of scalar field $\varphi(x)$ with the essentially nonlinear interaction Lagrangian of the type

$$L_I(x) = g \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n!} : \varphi^n(x) :,$$

where u_n is the sequence of numbers, which satisfy some general conditions. The arguments are presented in favour of the conclusion that in the developed framework the non-local form-factor can be found which makes the S -matrix constructed from the interaction Lagrangian $L_I(x)$ finite and unitary in all orders of the perturbation theory.