Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Горбунов, А. П. Исаев, О. В. Огиевецкий, БРСТ-оператор для квантовых алгебр Ли: связь с bar-комплексом, *ТМФ*, 2004, том 139, номер 1, 29–44

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf40>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 15:33:44

© 2004 г. В. Г. Горбунов*, А. П. Исаев†, О. В. Огиевский‡

БРСТ-ОПЕРАТОР ДЛЯ КВАНТОВЫХ АЛГЕБР ЛИ: СВЯЗЬ С VAR-КОМПЛЕКСОМ

Квантовые алгебры Ли обобщают (супер)алгебры Ли и представляют собой важный класс квадратичных алгебр, возникающих в исчислении Вороновича на квантовых группах. Многие понятия теории (супер)алгебр Ли обобщаются на “квантовый” случай. В частности, имеется БРСТ-оператор Q ($Q^2 = 0$), который порождает дифференциал в теории Вороновича и дает информацию о (ко)гомологиях квантовых алгебр Ли. В наших предыдущих работах было сформулировано и решено рекуррентное соотношение для оператора Q квантовых алгебр Ли. В данной работе рассматриваются var-комплекс для q -алгебр Ли и его подкомплекс q -антисимметричных цепей. Устанавливается цепное отображение (являющееся изоморфизмом) стандартного комплекса для q -алгебры Ли в подкомплекс антисимметричных цепей. Для этого используется ряд нетривиальных тождеств в групповой алгебре группы кос. Обсуждается также обобщение стандартного комплекса на случай, когда q -алгебра Ли снабжена оператором градуировки.

Ключевые слова: БРСТ-оператор, квадратичные алгебры, квантовые алгебры Ли, var-комплекс.

1. ВВЕДЕНИЕ

Исчисление Вороновича [1] связывает с алгеброй Хопфа $\mathcal{A}$ алгебру внешних форм Γ и обертывающую алгебру $\mathcal{U}$ левоинвариантных векторных полей на $\mathcal{A}$. Алгебра $\mathcal{U}$ называется квантовой алгеброй Ли (q -алгеброй Ли для краткости). Она определяется соотношениями

$$\chi_i \chi_j - \sigma_{ij}^{km} \chi_k \chi_m = C_{ij}^k \chi_k,$$

где $\{\chi_i\}$ – набор генераторов, а структурные константы σ_{ij}^{km} и C_{ij}^k подчиняются определенным связям (см. раздел 2). q -Алгебра Ли является неоднородной квадратичной алгеброй. Общая теория квадратичных алгебр рассматривалась в ряде работ (см., например, [2]–[4]). Отметим, что случай q -алгебр Ли весьма специален. В работе [1] был построен аналог комплекса де Рама для алгебры $\mathcal{U}$. Следуя классической теории

*Department of Mathematics, University of Kentucky, USA. E-mail: vgorb@ms.uky.edu

†Лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова, Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия. E-mail: isaevap@thsun1.jinr.ru

‡Center of Theoretical Physics, Luminy, Marseille, France; Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия. E-mail: oleg@cpt.univ-mrs.fr

алгебр Ли, в статьях [5], [6] мы ввели квантовые аналоги стандартного комплекса и БРСТ-дифференциала с ожидаемыми свойствами (обзор общей БРСТ-теории можно найти в [7]). В данной работе мы продолжаем исследование q -алгебр Ли в духе теории алгебр Ли. А именно, стандартный комплекс q -алгебры Ли отображается в подпространство q -антисимметричных цепей bar -комплекса для $\mathcal{U}$ (см., например, [8]). Оказывается, что образ этого отображения в точности, как и в случае алгебр Ли, является подкомплексом bar -комплекса для $\mathcal{U}$. Более того, квантовый БРСТ-дифференциал является ограничением bar -дифференциала b на подпространство q -антисимметричных цепей.

Работа построена следующим образом. В разделе 2 напомним определение q -алгебр Ли. В разделе 3 вводятся построенные Вороновичем внешние расширения q -алгебр Ли (алгебра внешних форм Γ и внутренних производных Γ^* ; отметим, что наше определение базиса дифференциальных форм слегка отличается от определения Вороновича, см. [5]) и развивается аппарат, необходимый для построения основных конструкций в разделах 4 и 5. Раздел 4 содержит явную конструкцию БРСТ-оператора q -алгебры Ли. Изложение в разделах 2–4 следует работе [9]. В разделе 5 обсуждаются bar -комплекс $(C_n(\mathcal{U}), b)$ для q -алгебры Ли, его подкомплекс q -антисимметричных цепей $(C_n(\mathcal{U}, \wedge \mathcal{L}), b)$ и цепное отображение стандартного комплекса для q -алгебры Ли в $(C_n(\mathcal{U}, \wedge \mathcal{L}), b)$. Для доказательства основных предложений в разделах 4 и 5 используются нетривиальные тождества в групповой алгебре группы кос. Раздел 6 посвящен обобщению вышеизложенной конструкции на случай, когда q -алгебра Ли снабжена оператором градуировки. Примером может служить супералгебра Ли с градуировкой, задаваемой оператором четности. Известно, что имеются два выбора коммутационных соотношений между бозонными и фермионными духовыми переменными. Мы объясняем эквивалентность этих двух выборов в рамках теории q -алгебр Ли, снабженных оператором градуировки. В разделе 7 суммируются результаты данной работы.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Данные, задающие квантовую алгебру Ли с N генераторами, удобно закодировать в виде следующей $((N+1)^2 \times (N+1)^2)$ -матрицы [10]:

$$\begin{aligned} R_{AB}^{CD} &= \delta_A^i \delta_B^j \sigma_{ij}^{kl} \delta_k^C \delta_l^D + \delta_A^i \delta_B^j C_{ij}^k \delta_0^C \delta_k^D + \delta_A^i \delta_i^D \delta_B^0 \delta_0^C + \delta_B^C \delta_A^0 \delta_0^D \equiv \\ &\equiv \delta_A^{\langle 1} \delta_B^{\langle 2} \sigma_{12}^C \delta_1^D \delta_2^D + \delta_A^{\langle 1} \delta_B^{\langle 2} C_{12}^C \delta_0^C \delta_2^D + \delta_A^{\langle 1} \delta_1^D \delta_B^0 \delta_0^C + \delta_B^C \delta_A^0 \delta_0^D. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь индексы $1, 2, \dots$ — номера N -мерных векторных пространств V_N ; $\langle 1, \langle 2, \dots$ и $1 \rangle, 2 \rangle, \dots$ — соответственно исходящие и входящие векторы; строчные буквы $i, j, k, l, \dots = 1, 2, \dots, N$ обозначают индексы векторного пространства V_N ; прописные буквы $A, B, \dots = 0, 1, \dots, N$ обозначают индексы $(N+1)$ -мерного пространства V_{N+1} (V_N является подпространством в V_{N+1}).

Уравнения (1) эквивалентны следующим условиям:

$$R_{kl}^{ij} = \sigma_{kl}^{ij}, \quad R_{kl}^{0j} = C_{kl}^j, \quad R_{B0}^{0A} = R_{0B}^{A0} = \delta_B^A, \quad (2)$$

причем остальные компоненты матрицы R обращаются в нуль. Мы предполагаем, что матрица $\sigma \in \text{End}(V_N \otimes V_N)$ имеет собственное значение 1.

Пусть $L_A = \{\chi_0, \chi_i\}$, $i = 1, \dots, N$, – “квантовый вектор”

$$L_A = \delta_A^{\langle 1} \chi_1 \rangle + \delta_A^0 \chi_0 = \begin{pmatrix} \chi_0 \\ \chi_i \end{pmatrix} \quad (3)$$

для матрицы R :

$$R_{AB}^{CD} L_C L_D = L_A L_B. \quad (4)$$

Эти соотношения эквивалентны следующим:

$$[\chi_0, \chi_i] = 0, \quad (1 - \sigma_{12}) \chi_1 \rangle \chi_2 \rangle = C_{12}^{\langle 1} \chi_0 \chi_1 \rangle.$$

Можно выполнить масштабное преобразование $\chi_i \rightarrow \chi_0 \chi_i$. Преобразованные таким образом генераторы χ_i , $i = 1, 2, \dots, N$, удовлетворяют соотношениям

$$(1 - \sigma_{12}) \chi_1 \rangle \chi_2 \rangle = C_{12}^{\langle 1} \chi_1 \rangle, \quad (5)$$

а соответствующая алгебра называется *квантовой алгеброй Ли*, если матрица R удовлетворяет уравнению Янга–Бакстера

$$R_{AB}^{CD} R_{MC}^{ES} R_{SD}^{FN} = R_{MA}^{CS} R_{SB}^{DN} R_{CD}^{EF} \quad \text{или} \quad R_{\underline{23}} R_{\underline{12}} R_{\underline{23}} = R_{\underline{12}} R_{\underline{23}} R_{\underline{12}} \quad (6)$$

(здесь индексы $\underline{12}$ или $\underline{23}$ обозначают номера векторных пространств V_{N+1} , в которых R -матрица действует нетривиально). Уравнение Янга–Бакстера для R накладывает следующие условия на структурные константы квантовой алгебры Ли (5):

$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2, \quad (7)$$

$$C_1 \delta_3 C_1 = \sigma_2 C_1 \delta_3 C_1 + C_2 C_1, \quad (8)$$

$$C_1 \delta_3 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 C_2, \quad (9)$$

$$(\sigma_2 C_1 \delta_3 + C_2) \sigma_1 = \sigma_1 (\sigma_2 C_1 \delta_3 + C_2). \quad (10)$$

Мы использовали здесь сокращенные обозначения $\sigma_n := \sigma_{n,n+1}$, $C_n := C_{n,n+1}^{\langle n}$, $\delta_n := \delta_n^{\langle n-1}$.

3. ВНЕШНИЕ РАСШИРЕНИЯ КВАНТОВОЙ АЛГЕБРЫ ЛИ

Для построения внешнего расширения квантовой алгебры Ли (5) вводятся квантовые аналоги внешних алгебр с генераторами γ_i и Ω^i , $i = 1, \dots, N$:

$$\Omega^{\langle n} \wedge \dots \wedge \Omega^{\langle 2} \wedge \Omega^{\langle 1} = \Omega^{\langle n} \otimes \dots \otimes \Omega^{\langle 2} \otimes \Omega^{\langle 1} A_{1 \rightarrow n}, \quad (11)$$

$$\gamma_1 \rangle \wedge \gamma_2 \rangle \wedge \dots \wedge \gamma_n \rangle = A_{1 \rightarrow n} \gamma_1 \rangle \otimes \gamma_2 \rangle \otimes \dots \otimes \gamma_n \rangle. \quad (12)$$

Перекрестные коммутационные соотношения имеют вид

$$\gamma_2 \rangle \Omega^{\langle 2} = -\Omega^{\langle 1} \sigma_{12}^{-1} \gamma_1 \rangle + I_2, \quad (13)$$

где I_2 – единичная матрица, действующая во втором векторном пространстве. В уравнениях (11) и (12) используются операторы $A_{1 \rightarrow n}$ – квантовые аналоги антисимметризаторов. Они определяются по индукции (в действительности операторы $A_{1 \rightarrow n}$ имеют смысл уже для групповой алгебры группы кос B_{M+1} , если заменить матрицы σ_i генераторами $\hat{\sigma}_i$, $i = 1, \dots, M$; см. замечание 1 ниже):

$$A_{1 \rightarrow n} \equiv f_{1 \rightarrow n} A_{1 \rightarrow n-1} \quad \text{или} \quad A_{1 \rightarrow n} \equiv \bar{f}_{1 \rightarrow n} A_{2 \rightarrow n}, \quad (14)$$

где $A_{1 \rightarrow 1} = 1$, $f_{k \rightarrow k} = \bar{f}_{k \rightarrow k} = 1$ и

$$\begin{aligned} f_{k \rightarrow m} &= 1 - f_{k \rightarrow m-1} \sigma_{m-1} \quad \text{или} \quad f_{k \rightarrow m} = f_{k+1 \rightarrow m} + (-1)^{m-k} \sigma_k \dots \sigma_{m-1}, \\ \bar{f}_{k \rightarrow m} &= 1 - \bar{f}_{k+1 \rightarrow m} \sigma_k \quad \text{или} \quad \bar{f}_{k \rightarrow m} = \bar{f}_{k \rightarrow m-1} + (-1)^{m-k} \sigma_{m-1} \dots \sigma_{k+1} \sigma_k \end{aligned} \quad (15)$$

при $k < m \leq n$. В явном виде имеем

$$\begin{aligned} f_{k \rightarrow n} &\equiv f_{k \rightarrow n}^{(\sigma)} = 1 - \sigma_{n-1} + \sigma_{n-2} \sigma_{n-1} - \dots + (-1)^{n-k} \sigma_k \sigma_{k+1} \dots \sigma_{n-1}, \\ \bar{f}_{k \rightarrow n} &\equiv \bar{f}_{k \rightarrow n}^{(\sigma)} = 1 - \sigma_k + \sigma_{k+1} \sigma_k - \dots + (-1)^{n-k} \sigma_{n-1} \dots \sigma_{k+1} \sigma_k. \end{aligned} \quad (16)$$

Если последовательность операторов $A_{1 \rightarrow n}$ обрывается на шаге $n = h + 1$ ($A_{1 \rightarrow n} = 0 \forall n > h$), то число h называется высотой матрицы $\sigma_{12} = \rho(\hat{\sigma}_{12})$.

Элементы γ_i и Ω^i играют роль квантовых аналогов духовых переменных. Выбор знака и появление матрицы σ_{12}^{-1} в правой части (13) соответствуют стандартному случаю (супер)алгебр Ли. Коммутационные соотношения χ_i с γ_j и Ω^k имеют вид

$$\chi_2 \rangle \Omega^{\langle 2} = \Omega^{\langle 1} (\sigma_{12} \chi_1 \rangle + C_{12}^{\langle 2}), \quad \gamma_1 \rangle \chi_2 \rangle = \sigma_{12} \chi_1 \rangle \gamma_2 \rangle + C_{12}^{\langle 1} \gamma_1 \rangle. \quad (17)$$

Алгебра (5), (11)–(13) и (17) является внешним расширением квантовой алгебры Ли (см. [5]). Эта алгебра порождает дифференциальное исчисление Картана на квантовых группах в подходе Вороновича [1].

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть $\hat{\sigma}_i$, $i = 1, \dots, M$, – генераторы группы кос B_{M+1} :

$$\hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_{i+1} \hat{\sigma}_i = \hat{\sigma}_{i+1} \hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_{i+1}, \quad [\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j] = 0 \quad \text{при} \quad |i - j| > 1. \quad (18)$$

Важные свойства элементов $f_{k \rightarrow n}^{(\hat{\sigma})}$ и $\bar{f}_{k \rightarrow n}^{(\hat{\sigma})}$ (16) групповой алгебры B_{M+1} состоят в том, что

$$f_{1 \rightarrow n}^{(\hat{\sigma})} f_{1 \rightarrow n-1}^{(\hat{\sigma})} \dots f_{1 \rightarrow m}^{(\hat{\sigma})} = x_n^{(n-m+1)} A_{m \rightarrow n}, \quad (19)$$

$$\bar{f}_{1 \rightarrow n}^{(\hat{\sigma})} \bar{f}_{2 \rightarrow n}^{(\hat{\sigma})} \dots \bar{f}_{m \rightarrow n}^{(\hat{\sigma})} = x_n^{(n-m)} A_{1 \rightarrow m} \quad (20)$$

для $n \geq m \geq 1$. Здесь $x_n^{(0)} = 1$, $x_m^{(1)} = f_{1 \rightarrow m}^{(\hat{\sigma})}$, $x_n^{(n)} = 1$, $x_n^{(n-1)} = \bar{f}_{1 \rightarrow n}^{(\hat{\sigma})}$ и $x_{m+1}^{(2)}$ имеет вид

$$\begin{aligned} x_{m+1}^{(2)} = & f_{1 \rightarrow m}^{(\hat{\sigma})} + f_{1 \rightarrow m-1}^{(\hat{\sigma})} (\hat{\sigma}_m \hat{\sigma}_{m-1}) + f_{1 \rightarrow m-2}^{(\hat{\sigma})} (\hat{\sigma}_{m-1} \hat{\sigma}_{m-2}) (\hat{\sigma}_m \hat{\sigma}_{m-1}) + \dots \\ & \dots + f_{1 \rightarrow 2}^{(\hat{\sigma})} (\hat{\sigma}_3 \hat{\sigma}_2) \dots (\hat{\sigma}_m \hat{\sigma}_{m-1}) + (\hat{\sigma}_2 \hat{\sigma}_1) \dots (\hat{\sigma}_m \hat{\sigma}_{m-1}). \end{aligned} \quad (21)$$

Тождества (19), (20) эквивалентны формулам факторизации

$$A_{1 \rightarrow n} = x_n^{(n-m)} A_{1 \rightarrow m} A_{m+1 \rightarrow n}. \quad (22)$$

Элементы $x_n^{(m)}$ можно определить индуктивно, используя рекуррентное соотношение

$$x_{n+1}^{(n-m+1)} = x_n^{(n-m)} - (-1)^{n-m} x_n^{(n-m+1)} \hat{\sigma}_n \dots \hat{\sigma}_m.$$

В частности, имеем

$$x_{n+1}^{(2)} = f_{1 \rightarrow n}^{(\hat{\sigma})} + x_n^{(2)} \hat{\sigma}_n \hat{\sigma}_{n-1}, \quad n \geq 2, \quad (23)$$

что дает (21). Тогда имеем $x_{n+1}^{(3)} = x_n^{(3)} - x_n^{(2)} \hat{\sigma}_n \hat{\sigma}_{n-1} \hat{\sigma}_{n-2}$ при $n \geq 3$ и т.д.

Заметим, что элементы $x_n^{(m)}$ являются альтернированными суммами по элементам группы кос, которые можно рассматривать как квантовые аналоги $(m, n-m)$ -перетасовок (перетасовки получаются проекцией $\hat{\sigma}_i \rightarrow -s_i$, где s_i – генераторы симметрической группы S_{M+1}). С этой точки зрения внешние произведения (11), (12) связаны с квантовыми перетасовочными (shuffle) произведениями (о квантовых перетасовках и соответствующих произведениях см. [11], [1]). Ассоциативность этих произведений гарантируется тождествами $x_n^{(n-m)} x_m^{(m-k)} = x_n^{(n-k)} (T_k x_{n-k}^{(n-m)} T_k^{-1})$ при $k < m < n$, где $T_k \hat{\sigma}_i T_k^{-1} = \hat{\sigma}_{i+k}$.

4. БРСТ-ОПЕРАТОР ДЛЯ КВАНТОВОЙ АЛГЕБРЫ ЛИ

В работе [5] мы привели рекурсию, которая определяет БРСТ-оператор Q для квантовой алгебры Ли.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *БРСТ-оператор Q для квантовых алгебр Ли (5), удовлетворяющий уравнению $Q^2 = 0$, должен иметь вид*

$$Q = \Omega^i \chi_i + \sum_{r=1}^{h-1} Q_{(r)}, \quad (24)$$

где h – высота сплетающей матрицы σ_{12} , операторы $Q_{(r)}$ задаются выражениями

$$Q_{(r)} = \Omega^{\langle r+1 |} \wedge \Omega^{\langle r |} \wedge \dots \wedge \Omega^{\langle 1 |} X_{|1 \dots r+1\rangle}^{\langle 1 \dots r |} \gamma_{|1\rangle} \wedge \dots \wedge \gamma_{|r\rangle}, \quad (25)$$

а $X_{|1 \dots r+1\rangle}^{\langle 1 \dots r |}$ – тензоры, которые подчиняются рекуррентным соотношениям

$$A_{1 \rightarrow r+1} X_{|1 \dots r+1\rangle}^{\langle 1 \dots r |} A_{1 \rightarrow r} = A_{1 \rightarrow r+1} ((-1)^r \sigma_r \sigma_{r-1} \dots \sigma_1 - \mathbf{1}) X_{|2 \dots r+1\rangle}^{\langle 2 \dots r |} A_{2 \rightarrow r} \quad (26)$$

с начальным условием $A_{12}X_{|12\rangle}^{(1)} = -C_{|12\rangle}^{(1)}$.

Следует подчеркнуть, что вывод рекурсии (26) требует рассмотрения лишь линейных по χ_i членов в уравнении $Q^2 = 0$.

В работе [9] было приведено решение уравнений (26) и явно определены коэффициенты $(AXA)_{|1\dots r+1\rangle}^{(1\dots r)}$. При этом было использовано важное тождество в групповой алгебре группы кос.

ЛЕММА 1. Пусть $\hat{\sigma}_i$, $i = 1, \dots, M$, – генераторы группы кос B_{M+1} (18). Тогда выполнено следующее тождество в групповой алгебре B_{M+1} :

$$Y_{1 \rightarrow r+1} \bar{f}_{1 \rightarrow r}^{(\hat{\sigma})} = ((-1)^{r+1} f_{1 \rightarrow r+1}^{(\hat{\sigma})} \hat{\sigma}_r \dots \hat{\sigma}_1 + \bar{f}_{1 \rightarrow r+1}^{(\hat{\sigma})}) Y_{2 \rightarrow r+1}, \quad (27)$$

где $f_{1 \rightarrow r}^{(\hat{\sigma})}$ и $\bar{f}_{1 \rightarrow r}^{(\hat{\sigma})}$ определяются в (16) и

$$Y_{k \rightarrow r+1} = (1 - \hat{\sigma}_r^2)(1 + \hat{\sigma}_{r-1} \hat{\sigma}_r^2) \dots (1 - (-1)^{r-k} \hat{\sigma}_k \hat{\sigma}_{k+1} \dots \hat{\sigma}_{r-1} \hat{\sigma}_r^2), \quad Y_{k \rightarrow k} = 1. \quad (28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С помощью уравнений (15) можно представить тождество (27) в виде

$$Y_{1 \rightarrow r+1} \bar{f}_{1 \rightarrow r}^{(\hat{\sigma})} = F_{1 \rightarrow r+1} Y_{2 \rightarrow r+1}, \quad (29)$$

где

$$F_{1 \rightarrow r+1} = (-1)^r f_{1 \rightarrow r}^{(\hat{\sigma})} \hat{\sigma}_r^2 \dots \hat{\sigma}_1 + \bar{f}_{1 \rightarrow r}^{(\hat{\sigma})}. \quad (30)$$

Тождество (29) доказывается по индукции (см. [9], [12]).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Операторы $Y_{k \rightarrow r+1}$ (28) имеют другое представление:

$$Y_{k \rightarrow r+1} = (1 + \hat{\sigma}_r)(1 - \hat{\sigma}_{r-1} \hat{\sigma}_r) \dots (1 + (-1)^{r-k} \hat{\sigma}_k \hat{\sigma}_{k+1} \dots \hat{\sigma}_r) f_{k \rightarrow r+1}^{(\hat{\sigma})}. \quad (31)$$

Это представление есть не что иное, как квантовый вариант факторизационных тождеств Пагира [13] (которые можно получить из (28), (31) проекцией $\hat{\sigma}_i \rightarrow q s_i$, где s_i – генераторы симметрической группы, $s_i^2 = 1$). Доказательство тождеств (31) проводится непосредственно (см., например, [9]).

Имеется следующий результат [9]:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Явное решение рекуррентных соотношений (26) дается формулой

$$\begin{aligned} & (-1)^{r+1} (A_{1 \rightarrow r+1} X A_{1 \rightarrow r})_{j_1 \dots j_{r+1}}^{i_1 \dots i_r} = \\ & = ((1 - R_{\underline{r}}^2)(1 + R_{\underline{r-1}} R_{\underline{r}}^2) \dots (1 + (-1)^r R_{\underline{1}} \dots R_{\underline{r-1}} R_{\underline{r}}^2))_{j_1 \dots j_r j_{r+1}}^{k_1 \dots k_r 0} (A_{1 \rightarrow r})_{k_1 \dots k_r}^{i_1 \dots i_r}. \end{aligned} \quad (32)$$

Здесь $\underline{1}, \dots, \underline{r-1}, \underline{r}$ нумеруют экземпляры векторного пространства V_{N+1} ; $R_{\underline{r}} := R_{r, r+1}$ и $\underline{r}, \underline{r+1}$ – номера векторных пространств V_{N+1} , в которых R -матрица (1) действует нетривиально; $i_1, \dots, j_1, \dots, k_1, \dots = 1, 2, \dots, N$ – векторные индексы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя определение антисимметризатора (14) и соотношения (7) в группе кос, перепишем правую часть (26) в виде

$$\begin{aligned} A_{1 \rightarrow r+1}((-1)^r \sigma_r \sigma_{r-1} \dots \sigma_1 - 1) X_{|2 \dots r+1}^{\langle 2 \dots r |} A_{2 \rightarrow r} = \\ = ((-1)^r f_{1 \rightarrow r+1} \sigma_r \sigma_{r-1} \dots \sigma_1 - \bar{f}_{1 \rightarrow r+1}) A_{2 \rightarrow r+1} X_{|2 \dots r+1}^{\langle 2 \dots r |} A_{2 \rightarrow r}. \end{aligned}$$

Таким образом, выражение (32) является решением уравнения (26), если выполнено тождество

$$(Y_{\underline{1 \rightarrow r+1}})_{1 \dots r+1}^{\langle 1 \dots r |} \bar{f}_{1 \rightarrow r} = ((-1)^{r+1} f_{1 \rightarrow r+1} \sigma_r \dots \sigma_1 + \bar{f}_{1 \rightarrow r+1}) (Y_{\underline{2 \rightarrow r+1}})_{2 \dots r+1}^{\langle 2 \dots r |}, \quad (33)$$

где

$$Y_{\underline{k \rightarrow r+1}} = (1 - R_{\underline{r}}^2)(1 + R_{\underline{r-1}} R_{\underline{r}}^2) \dots (1 + (-1)^r R_{\underline{k}} R_{\underline{k+1}} \dots R_{\underline{r-1}} R_{\underline{r}}^2).$$

Согласно структуре индексов векторное пространство V_{N+1} является прямой суммой V_N и одномерного векторного пространства V_0 . Пусть $P: V_{N+1} \rightarrow V_N$ и $1 - P: V_{N+1} \rightarrow V_0$ — соответствующие проекторы. Аналогично пусть $\bar{P}$ и $1 - \bar{P}$ — проекторы, связанные с дуальными пространствами $\bar{V}_{N+1}$.

Определим

$$P_{1 \rightarrow r} := P_1 \dots P_r, \quad P^{1 \rightarrow r 0} = \bar{P}_1 \dots \bar{P}_r (1 - \bar{P})_{r+1}.$$

Эти операторы разделяют компоненты, которые нам нужны.

Уравнение (33) можно теперь переписать в виде

$$\begin{aligned} P_{1 \rightarrow r+1} Y_{\underline{1 \rightarrow r+1}} \bar{f}_{\underline{1 \rightarrow r}}^{(R)} P^{1 \rightarrow r 0} = \\ = P_{1 \rightarrow r+1} ((-1)^{r+1} f_{\underline{1 \rightarrow r+1}}^{(R)} R_{\underline{r}} \dots R_{\underline{1}} + \bar{f}_{\underline{1 \rightarrow r+1}}^{(R)}) Y_{\underline{2 \rightarrow r+1}} P^{1 \rightarrow r 0} \end{aligned} \quad (34)$$

(где $f_{\underline{1 \rightarrow n}}^{(R)}$ и $\bar{f}_{\underline{1 \rightarrow n}}^{(R)}$ — $(N+1)$ -мерные аналоги операторов (16)) в силу соотношений

$$\begin{aligned} \bar{f}_{\underline{1 \rightarrow r}}^{(R)} P^{1 \rightarrow r} &= P^{1 \rightarrow r} \bar{f}_{\underline{1 \rightarrow r}}^{(\sigma)}, \\ Y_{\underline{2 \rightarrow r+1}} P^{1 \rightarrow r 0} &= P^{1 \rightarrow r+1} (P_{2 \rightarrow r+1} Y_{\underline{2 \rightarrow r+1}} P^{2 \rightarrow r 0}) \equiv \\ &\equiv P^{1 \rightarrow r+1} (Y_{\underline{2 \rightarrow r+1}})_{2 \dots r+1}^{\langle 2 \dots r |}, \\ P_{1 \rightarrow r+1} ((-1)^r f_{\underline{1 \rightarrow r+1}}^{(R)} R_{\underline{r}} \dots R_{\underline{1}} - \bar{f}_{\underline{1 \rightarrow r+1}}^{(R)}) P^{1 \rightarrow r+1} &= \\ &= ((-1)^r f_{1 \rightarrow r+1} \sigma_r \sigma_{r-1} \dots \sigma_1 - \bar{f}_{1 \rightarrow r+1}), \end{aligned}$$

которые можно получить непосредственно, используя явный вид R -матрицы (2).

Уравнение (34) выполнено в силу тождества (27), которое было доказано в лемме 1. Действительно, если в тождестве (27) взять R -матричное представление группы кос $\rho_R(B_{M+1})$: $\rho_R(\hat{\sigma}_k) = R_{\underline{k}}$ и подействовать на это тождество слева и справа проекторами $P_{1 \rightarrow r+1}$, $P^{1 \rightarrow r 0}$, то получим (34). Этим завершается доказательство предложения.

В следующем разделе нам понадобятся дополнительные сведения о рассмотренном выше R -матричном представлении группы кос. Введем элементы Юциса–Мэрфи $J_r \in \rho_R(B_{M+1})$:

$$J_1 = 1, \quad J_{r+1} = R_{\underline{r}} J_r R_{\underline{r}}. \quad (35)$$

Эти элементы образуют коммутирующий набор в $\rho_R(B_{M+1})$, $[J_r, J_m] = 0$, и удовлетворяют равенствам

$$R_{\underline{m}} J_r = J_r R_{\underline{m}}, \quad m < r. \quad (36)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Явный вид компонент*

$$Z_{r+1} := P_{1 \rightarrow r+1}(J_{r+1}) P^{1 \rightarrow r 0}$$

элементов Юциса–Мэрфи (35) в терминах структурных констант C_n и σ_m дается формулой

$$Z_{r+1} = C_r + \sigma_r C_{r-1} \delta_{r+1} + \sigma_r \sigma_{r-1} C_{r-2} \delta_r \delta_{r+1} + \dots + \sigma_r \sigma_{r-1} \dots \sigma_2 C_1 \delta_3 \dots \delta_{r+1}. \quad (37)$$

Элементы Z_r обладают свойствами

$$\sigma_m Z_r = Z_r \sigma_m, \quad m \leq r-2, \quad (38)$$

$$Z_{r+1} = C_r + \sigma_r Z_r \delta_{r+1}. \quad (39)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя определение элементов Юциса–Мэрфи (35) и представление (2), можно переписать $P_{1 \rightarrow r+1}(J_{r+1}) P^{1 \rightarrow r 0}$ в виде

$$P_{1 \rightarrow r+1}(R_{\underline{r}} \dots (R_{\underline{1}})^2 \dots R_{\underline{r}}) P^{1 \rightarrow r 0} = P_{1 \rightarrow r+1}(R_{\underline{r}} R_{\underline{r-1}} \dots R_{\underline{1}}) P^{02 \rightarrow r+1} \delta_2 \delta_3 \dots \delta_{r+1}.$$

Теперь, снова используя (2), выводим (37). Для получения свойства (38) применим к (36) операторы $P_{1 \rightarrow r}$ и $P^{1 \rightarrow r-1 0}$ слева и справа (при $m \leq r-2$). Рекуррентное соотношение (39) является прямым следствием соотношений (37).

5. СВЯЗЬ С ЦЕПНЫМ ВАГ-КОМПЛЕКСОМ

Напомним сначала некоторые стандартные факты. Для каждой ассоциативной алгебры $\mathcal{U}$ строится ваг-комплекс $(C_n(\mathcal{U}), b)$:

а) $C_n(\mathcal{U})$ является пространством $\underbrace{\mathcal{U} \otimes \dots \otimes \mathcal{U}}_n$;

б) для цепи

$$T = a_1 \otimes a_2 \otimes \dots \otimes a_n \in C_n(\mathcal{U}) \quad (40)$$

действие граничного оператора $b: C_{n+1}(\mathcal{U}) \rightarrow C_n(\mathcal{U})$ имеет вид

$$b(a_1 \otimes a_2 \otimes \dots \otimes a_{n+1}) = \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} (a_1 \otimes \dots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \dots \otimes a_{n+1}). \quad (41)$$

Используя ассоциативность алгебры $\mathcal{U}$, можно непосредственно проверить, что $b^2(a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) = 0$. Более того, для алгебры $\mathcal{U}$ с единичным элементом комплекс $(C_n(\mathcal{U}), b)$ является ациклическим, поскольку можно определить оператор гомотопии $\delta: C_n(\mathcal{U}) \rightarrow C_{n+1}(\mathcal{U})$,

$$\delta(a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n) = (a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1),$$

который удовлетворяет равенству $\delta b + b\delta = \text{id}$.

Пусть $\mathcal{U}$ — q -алгебра Ли с генераторами χ_i и определяющими соотношениями (5). Рассмотрим цепи T (40), где все элементы a_k принадлежат набору $\{\chi_j\}$ генераторов q -алгебры Ли, и определим их q -антисимметричную линейную комбинацию, задаваемую сверткой с числовым тензором $A_{1 \rightarrow n} \in \text{End}(V^{\otimes n})$ (14):

$$\chi_1 \rangle \wedge \chi_2 \rangle \wedge \cdots \wedge \chi_n \rangle := A_{1 \rightarrow n} \{\chi_1 \rangle \otimes \chi_2 \rangle \otimes \cdots \otimes \chi_n \rangle\} \in C_n(\mathcal{U}). \quad (42)$$

В действительности нам понадобятся цепи следующего вида:

$$a \otimes \{\chi_1 \rangle \wedge \chi_2 \rangle \wedge \cdots \wedge \chi_n \rangle\} \in C_{n+1}(\mathcal{U}) \quad (43)$$

с произвольным $a \in \mathcal{U}$. Обозначим подпространство таких цепей как $C_{n+1}(\mathcal{U}, \wedge \mathcal{L}) \in \mathcal{U} \otimes \underbrace{\mathcal{L} \wedge \cdots \wedge \mathcal{L}}_n$, где $\mathcal{L}$ — линейная оболочка элементов $\{\chi_i\}$.

Сформулируем теперь один из основных результатов данной работы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Граничный оператор b (41) сохраняет q -антисимметрию,*

$$b: C_{n+1}(\mathcal{U}, \wedge \mathcal{L}) \longrightarrow C_n(\mathcal{U}, \wedge \mathcal{L}). \quad (44)$$

Другими словами, комплекс $(C_n(\mathcal{U}, \wedge \mathcal{L}), b)$ является подкомплексом var-комплекса $(C_n(\mathcal{U}), b)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действуя граничным оператором (41) на q -антисимметричные цепи (43), находим, что

$$\begin{aligned} b\{a \otimes \chi_1 \rangle \wedge \chi_2 \rangle \wedge \cdots \wedge \chi_{n+1} \rangle\} &= (-1)^n A_{1 \rightarrow n+1} \{a \chi_1 \rangle \otimes \chi_2 \rangle \otimes \cdots \otimes \chi_{n+1} \rangle\} + \\ &+ a \otimes A_{1 \rightarrow n+1} \left[\sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \{\chi_1 \rangle \otimes \cdots \otimes \chi_k \rangle \chi_{k+1} \rangle \otimes \cdots \otimes \chi_{n+1} \rangle\} \right], \end{aligned} \quad (45)$$

или, преобразуя далее,

$$\begin{aligned} b\{a \otimes \chi_1 \rangle \wedge \chi_2 \rangle \wedge \cdots \wedge \chi_{n+1} \rangle\} &= (-1)^n \bar{f}_{1 \rightarrow n+1} \{a \chi_1 \rangle \otimes \chi_2 \rangle \wedge \cdots \wedge \chi_{n+1} \rangle\} + \\ &+ a \otimes A_{1 \rightarrow n+1} \left[\sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} t_{k, k+1}^{\langle k} \{\chi_1 \rangle \otimes \cdots \otimes \chi_k \rangle \otimes \chi_{k+2} \rangle \otimes \cdots \otimes \chi_{n+1} \rangle\} \right], \end{aligned} \quad (46)$$

где структурные константы t_{jk}^i удовлетворяют соотношениям

$$C_{k,k+1}^{\langle k \rangle} = (1 - \sigma_k) t_{k,k+1}^{\langle k \rangle}, \quad (47)$$

тензоры $\bar{f}_{1 \rightarrow n+1}$ определены согласно (14)–(16) и мы воспользовались определяющими соотношениями (5) и свойствами “антисимметризаторов”

$$A_{1 \rightarrow n+1} \chi_k \chi_{k+1} = A_{1 \rightarrow n+1} t_{k,k+1}^{\langle k \rangle} \chi_k.$$

Таким образом, для доказательства отображения (44) надо представить второй член в (46) в виде

$$a \otimes W_{1 \dots n+1}^{\langle 1 \dots n \rangle} \{ \chi_1 \rangle \wedge \dots \wedge \chi_n \rangle \} = a \otimes W_{1 \dots n+1}^{\langle 1 \dots n \rangle} A_{1 \rightarrow n} \{ \chi_1 \rangle \otimes \dots \otimes \chi_n \rangle \}. \quad (48)$$

Поэтому достаточно доказать следующую лемму.

ЛЕММА 2. *Существуют такие тензоры $W_{n+1} := W_{1 \dots n+1}^{\langle 1 \dots n \rangle}$, что*

$$A_{1 \rightarrow n+1} \left(\sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} t_{k,k+1}^{\langle k \rangle} \delta_{k+2 \rightarrow n+1} \right) = W_{n+1} A_{1 \rightarrow n}, \quad (49)$$

где $\delta_{n+1 \rightarrow n} := 1$, $\delta_{k+2 \rightarrow n+1} := \delta_{k+2} \dots \delta_{n+1}$ – оператор сдвига $i \rightarrow i+1$ при $k < i \leq n$. Явный вид тензоров W_n (в терминах структурных констант σ_{kl}^{ij} и C_{jk}^i квантовой алгебры Ли) дается формулами

$$\begin{aligned} W_{n+1} &= C_n - (1 - \sigma_n) C_{n-1} \delta_{n+1} + (1 - \sigma_{n-1} + \sigma_n \sigma_{n-1}) C_{n-2} \delta_n \delta_{n+1} - \dots \\ &\quad \dots + (-1)^n [1 - \sigma_2 + \sigma_3 \sigma_2 - \dots + (-1)^{n+1} \sigma_n \dots \sigma_2] C_1 \delta_3 \dots \delta_{n+1} = \\ &= Z_{n+1} - Z_n \delta_{n+1} + Z_{n-1} \delta_n \delta_{n+1} + \dots + (-1)^n Z_2 \delta_3 \dots \delta_{n+1}, \end{aligned} \quad (50)$$

где элементы Z_k определены в (37), (39) (мы фиксируем $Z_2 = C_1 = -W_2$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы доказать равенство (49), используем тождества (7)–(10) для структурных констант и соотношение (47) между C_{ik}^j и t_{ik}^j . Доказательство проведем по индукции.

Уравнение (49), очевидно, выполняется при $n = 1$. Предположим, что (49) справедливо при $n = m - 1$. Требуется доказать, что оно справедливо при $n = m$. В левой части (49) при $n = m$ получаем

$$\begin{aligned} A_{1 \rightarrow m+1} \left(\sum_{k=1}^m (-1)^{m-k} t_{k,k+1}^{\langle k \rangle} \delta_{k+2} \dots \delta_{m+1} \right) &= \\ &= A_{1 \rightarrow m+1} \left(\left[\sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{m-k} t_{k,k+1}^{\langle k \rangle} \delta_{k+2} \dots \delta_m \right] \delta_{m+1} + t_{m,m+1}^{\langle m \rangle} \right) = \\ &= (-f_{m+1} W_m \delta_{m+1} + f_{m+1} f_m t_{m,m+1}^{\langle m \rangle}) A_{1 \rightarrow m-1} = \\ &= (-f_{m+1} W_m \delta_{m+1} + x_{m+1} C_m) A_{1 \rightarrow m-1}. \end{aligned}$$

Во втором равенстве мы использовали (14), (49) при $n = m - 1$; в третьем равенстве использовали (19) при $n - m = 2$. Здесь и ниже мы полагаем $f_m := f_{1 \rightarrow m}$ и $x_m := x_m^{(2)}$ для упрощения обозначений.

Сравнивая полученное выражение с правой частью (49), мы можем записать уравнение

$$-f_{m+1}W_m\delta_{m+1} + x_{m+1}C_m = W_{m+1}f_m, \quad (51)$$

которое является тождеством при $m = 2$ в силу (9) и (10). Докажем (51) по индукции. Для этого заметим (см. (50)), что имеется рекуррентное соотношение

$$W_{n+1} = Z_{n+1} - W_n\delta_{n+1}. \quad (52)$$

Подставим в левую часть (51) рекуррентные соотношения (15), (23), (52) и учтем соотношения (9), (38), (39) и базу индукции:

$$\begin{aligned} & -W_m\delta_{m+1} + f_m\sigma_m(Z_m - W_{m-1}\delta_m)\delta_{m+1} + (f_m + x_m\sigma_m\sigma_{m-1})C_m = \\ & = -W_m\delta_{m+1} + f_m(\sigma_m Z_m\delta_{m+1} + C_m) + W_m f_{m-1}\delta_{m+1}\sigma_{m-1} = \\ & = (Z_{m+1} - W_m\delta_{m+1}) - f_{m-1}\sigma_{m-1}Z_{m+1} + W_m\delta_{m+1}f_{m-1}\sigma_{m-1} = \\ & = (Z_{m+1} - W_m\delta_{m+1})(1 - f_{m-1}\sigma_{m-1}) = W_{m+1}f_m. \end{aligned}$$

Таким образом, доказано уравнение (51), а соответственно и (49). Лемма доказана.

Этим завершается доказательство предложения.

Тождество (49) гарантирует, что q -антисимметричные цепи (43) образуют подкомплекс в ваг-комплексе q -алгебры Ли $\mathcal{U}$ (5). Тождество

$$(b)^2\{a \otimes \chi_1 \wedge \chi_2 \wedge \cdots \wedge \chi_{n+1}\} = 0$$

для граничного оператора (45) непосредственно следует из тождества $b^2 = 0$ для ваг-дифференциала b (41).

По аналогии с теорией обычных алгебр Ли (см., например, [8]) мы свяжем комплекс $(C_n(\mathcal{U}, \wedge \mathcal{L}), b)$ со стандартным комплексом для квантовой алгебры Ли. А именно, мы соотнесем цепи

$$C_n = a \otimes A_{1 \rightarrow n}(\chi_1) \otimes \cdots \otimes \chi_n \in C_n(\mathcal{U}, \wedge \mathcal{L})$$

с полиномами внешних произведений γ с коэффициентами в $\mathcal{U}$,

$$M_n = a\gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \cdots \wedge \gamma_n, \quad a \in \mathcal{U}, \quad (53)$$

с помощью взаимно однозначного отображения $\mathbf{i}: C_n \leftrightarrow M_n$,

$$\mathbf{i}(a\{\gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \cdots \wedge \gamma_n\}) = a \otimes A_{1 \rightarrow n}\{\chi_1 \otimes \chi_2 \otimes \cdots \otimes \chi_n\}. \quad (54)$$

БРСТ-оператор Q (24), (25), (32) действует на выражения (53) справа, и согласно (13) переменные Ω^i в Q следует рассматривать как “правые q -производные” по γ (в частности, $\forall a \in \mathcal{U}$ правое действие Ω^i на a дает нуль).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Справедливы следующие утверждения:*

- 1) $Q^2 = 0$;
- 2) *отображение $\mathbf{i}$ (54) является цепным отображением, $b \circ \mathbf{i} = \mathbf{i} \circ Q$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим только первые два члена в выражении (24):

$$Q = \Omega^{\langle 1} \chi_1 \rangle - \Omega^{\langle 2} \wedge \Omega^{\langle 1} t_{12}^{\langle 1} \gamma_1 \rangle + \dots. \quad (55)$$

Используя (13), (17), (37) и (39), можно доказать по индукции следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \gamma_1 \rangle \wedge \dots \wedge \gamma_n \rangle \Omega^{\langle n} &= (-1)^n \Omega^{\langle 0} \sigma_0^{-1} \dots \sigma_{n-1}^{-1} \gamma_0 \rangle \wedge \dots \wedge \gamma_{n-1} \rangle + \\ &+ (-1)^{n-1} \bar{f}_{1 \rightarrow n}^{(\sigma)} \sigma_1^{-1} \dots \sigma_{n-1}^{-1} \gamma_1 \rangle \wedge \dots \wedge \gamma_{n-1} \rangle, \\ \gamma_1 \rangle \wedge \dots \wedge \gamma_{n-1} \rangle \chi_n \rangle &= \sigma_{n-1} \dots \sigma_1 \chi_1 \rangle \gamma_2 \rangle \wedge \dots \wedge \gamma_n \rangle + Z_n \gamma_1 \rangle \wedge \dots \wedge \gamma_{n-1} \rangle. \end{aligned} \quad (56)$$

Таким образом, с использованием (20) и (56) правое действие на (53) первых двух членов (55) дает

$$\begin{aligned} Q(a\gamma_1 \rangle \wedge \dots \wedge \gamma_n \rangle) &= (-1)^{n-1} \bar{f}_{1 \rightarrow n}^{(\sigma)} (a\chi_1 \rangle \gamma_2 \rangle \wedge \dots \wedge \gamma_n \rangle) + \\ &+ (-1)^{n-1} \bar{f}_{1 \rightarrow n}^{(\sigma)} \sigma_1^{-1} \dots \sigma_{n-1}^{-1} Z_n(a\gamma_1 \rangle \wedge \dots \wedge \gamma_{n-1} \rangle) - \\ &- x_n^{(n-2)} (\sigma_1^{-1} \dots \sigma_{n-1}^{-1}) (\sigma_1^{-1} \dots \sigma_{n-2}^{-1}) C_{n-1}(a\gamma_1 \rangle \wedge \dots \wedge \gamma_{n-1} \rangle) + \dots. \end{aligned} \quad (57)$$

Согласно предложению 1 первые два члена в (55) совместно с условием

$$Q^2|_{\text{линейные по } \chi \text{ члены}} = 0 \quad (58)$$

определяют БРСТ-оператор Q единственным образом. Поэтому необходимо только проверить, что формула (57) (при $n = 1, 2$) совместна с $b \circ \mathbf{i} = \mathbf{i} \circ Q$ и с уравнениями (46), (48), (54). Это можно сделать непосредственно. Поэтому $Q^2 = 0$, а $\mathbf{i}$ является цепным отображением.

Тот факт, что отображение $\mathbf{i}$ (54) является цепным, демонстрирует соотношение между стандартным комплексом для q -алгебры Ли (с нашим БРСТ-оператором) и подкомплексом $(C_n(\mathcal{U}, \wedge \mathcal{L}), b)$ бар-комплекса $(C_n(\mathcal{U}), b)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Можно показать, что

$$W_{n+1} = P_{1 \rightarrow n+1} (\bar{f}_{1 \rightarrow n+1}^{(R)} - 1) R_{\underline{1}} \dots R_{\underline{n}} P^{1 \rightarrow n 0}.$$

Соотношение (51) получается из тождества

$$f_{1 \rightarrow m+1}^{(R)} (\bar{f}_{1 \rightarrow m}^{(R)} R_{\underline{1}} \dots R_{\underline{m-1}}) R_{\underline{m}} = (\bar{f}_{1 \rightarrow m+1}^{(R)} R_{\underline{1}} \dots R_{\underline{m}}) f_{1 \rightarrow m}^{(R)} \quad (59)$$

действием на него операторами $P^{1 \rightarrow m, 0}$ и $P_{1 \rightarrow m+1}$ справа и слева. Тождество (59) эквивалентно тождеству

$$f_{1 \rightarrow m+1}^{(R)} \bar{f}_{1 \rightarrow m}^{(R)} = \bar{f}_{1 \rightarrow m+1}^{(R)} f_{2 \rightarrow m+1}^{(R)},$$

которое есть не что иное, как условие ассоциативности $x_{m+1}^{(1)} x_m^{(m-1)} = x_{m+1}^{(m)} T_1 x_m^{(1)} T_1^{-1}$, рассмотренное в замечании 1. Для доказательства всех этих утверждений требуются соотношения

$$\begin{aligned} (\bar{f}_{1 \rightarrow n+1}^{(R)} - 1) R_1 \dots R_n P^{1 \rightarrow n 0} &= \\ &= P^{1 \rightarrow n+1} W_{n+1} + \sum_{k=1}^n (-1)^k P^{1 \rightarrow k} (1 - P^{k+1}) P^{k+2 \rightarrow n+1} \delta_{k+2} \dots \delta_{n+1}, \\ f_{1 \rightarrow m}^{(R)} P^{1 \rightarrow m} &= P^{1 \rightarrow m} f_{1 \rightarrow m}^{(\sigma)}. \end{aligned}$$

6. ОБОБЩЕНИЕ q -АЛГЕБРЫ ЛИ

6.1. Рассмотрим преобразование подобия R -матрицы

$$R_{12} \rightarrow R'_{12} = \mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2 R_{12} \mathcal{D}_1^{-1} \mathcal{D}_2^{-1}, \quad (60)$$

которое соответствует линейному преобразованию генераторов $L_B \rightarrow \mathcal{D}_B^C L_C$. Новая матрица (60) удовлетворяет уравнению Янга–Бакстера (6) для всех числовых матриц $\mathcal{D}$. Если матрица $\mathcal{D}$ имеет специальный вид

$$\mathcal{D}_0^0 = 1, \quad \mathcal{D}_i^0 = \mathcal{D}_0^i = 0, \quad \mathcal{D}_j^i = D_j^i,$$

то новая R -матрица (60) имеет тот же вид (1) с преобразованными структурными константами:

$$\sigma_{12} \rightarrow \sigma'_{12} = D_1 D_2 \sigma_{12} D_1^{-1} D_2^{-1}, \quad C_{|12\rangle}^{(2|)} \rightarrow C'_{|12\rangle}^{(2|)} = D_1 D_2 C_{|12\rangle}^{(2|)} D_2^{-1}. \quad (61)$$

Это преобразование оставляет инвариантным векторное пространство (обозначаемое через $\mathcal{L}$), линейно порожденное N элементами χ_i . q -Алгебра Ли остается квадратичной при любом выборе базиса в $\mathcal{L}$, а структурные константы (5) изменяются согласно (61).

Интересный специальный случай возникает, когда матрица R сохраняется под действием преобразования (60), $R_{12} = R'_{12}$. Тогда $(N \times N)$ -матрица D_j^i такова, что

$$D_1 D_2 \sigma_{12} = \sigma_{12} D_1 D_2, \quad D_1 D_2 C_{|12\rangle}^{(2|)} = C_{|12\rangle}^{(2|)} D_2. \quad (62)$$

ЛЕММА 3. Пусть $R'_{12} = R_{12}$. Тогда R -матрица $\mathcal{D}_1 R_{12} \mathcal{D}_1^{-1}$ удовлетворяет уравнению Янга–Бакстера.

Доказательство проводится непосредственно.

Теперь можно рассмотреть квадратичную алгебру с определяющими соотношениями

$$(\mathcal{D}_1 R_{12} \mathcal{D}_1^{-1}) L'_{1\downarrow} L'_{2\downarrow} = L'_{1\downarrow} L'_{2\downarrow}.$$

В компонентах для квантового вектора $L'_A = \{\xi_0, \xi_i\}$ получаем

$$\xi_i \xi_0 = D_i^j \xi_0 \xi_j, \quad (1 - D_1 \sigma_{12} D_1^{-1}) \xi_{1\downarrow} \xi_{2\downarrow} = D_1 C_{12\downarrow}^{(1)} \xi_0 \xi_{1\downarrow}. \quad (63)$$

Эта алгебра связана с q -алгеброй Ли (5) преобразованием

$$\chi_i = \xi_0^{-1} \xi_i. \quad (64)$$

6.2. Имеется обобщение внешней алгебры (11)–(13) и (17), возникающее в соответствии с только что проведенным рассмотрением. Можно ввести оператор градуировки g с коммутационными соотношениями

$$g\gamma_1\rangle = D_1\gamma_1\rangle g, \quad g\Omega^{\langle 1} = \Omega^{\langle 1} D_1^{-1} g, \quad g\chi_1\rangle = D_1\chi_1\rangle g, \quad (65)$$

где D_j^i – матрица, удовлетворяющая (62). Заметим, что оператор градуировки g можно “включить в игру”, если рассмотреть квадратичную алгебру (63), положить (64) и взять $g = \xi_0^{-1}$.

Соотношения (65) согласованы с соотношениями (5), (11)–(13) и (17). Тогда дифференциальная алгебра Вороновича (11)–(13), (17) переписывается для новых генераторов

$$\tilde{\Omega}^{\langle 1} = \Omega^{\langle 1} g^{-1}, \quad \tilde{\gamma}_1\rangle = g\gamma_1\rangle$$

в виде

$$\tilde{\gamma}_2\rangle \tilde{\Omega}^{\langle 2} = -\tilde{\Omega}^{\langle 1} D_1^{-1} \sigma_{12}^{-1} D_1 \tilde{\gamma}_1\rangle + I_2, \quad (66)$$

$$\tilde{\Omega}^{\langle 1} \wedge \tilde{\Omega}^{\langle 2} \wedge \dots \wedge \tilde{\Omega}^{\langle n} = \tilde{\Omega}^{\langle 1} \otimes \tilde{\Omega}^{\langle 2} \otimes \dots \otimes \tilde{\Omega}^{\langle n} A_{1 \rightarrow n}^{(D)}, \quad (67)$$

$$\tilde{\gamma}_1\rangle \wedge \tilde{\gamma}_2\rangle \wedge \dots \wedge \tilde{\gamma}_n\rangle = A_{1 \rightarrow n}^{(D)} \tilde{\gamma}_1\rangle \otimes \tilde{\gamma}_2\rangle \otimes \dots \otimes \tilde{\gamma}_n\rangle, \quad (68)$$

$$\chi_2\rangle \tilde{\Omega}^{\langle 2} = \tilde{\Omega}^{\langle 1} (\sigma_{12} D_1 \chi_1\rangle + C_{12}^{\langle 2}), \quad \tilde{\gamma}_1\rangle \chi_2\rangle = \sigma_{12} D_1 \chi_1\rangle \tilde{\gamma}_2\rangle + C_{12}^{\langle 1} \tilde{\gamma}_{|1}\rangle, \quad (69)$$

где $A_{1 \rightarrow n}^{(D)} = D_1^{-1} \dots D_{n-1}^{-1} A_{1 \rightarrow n} D_1 \dots D_{n-1}$.

Эта обобщенная алгебра вкладывается в bar -комплекс, причем вложение подобно тому, которое рассматривалось для частного случая $D = 1$ (подробности мы опустим).

6.3. Квантовая алгебра Ли, определяемая равенствами (5), (7)–(10), обобщает обычные (супер) алгебры Ли. Действительно, в недеформированном случае сплетающая матрица $\sigma_{ij}^{mk} = (-1)^{(m)(k)} \delta_j^m \delta_i^k$ является матрицей суперперестановки (здесь $(m) = 0, 1$ – четность генератора χ_m). Уравнение (7) выполняется тождественно (и, более того, мы имеем $\sigma^2 = 1$). Уравнение (8) совпадает с тождеством Якоби для (супер) алгебр Ли. Уравнение (9) тогда эквивалентно условию $\mathbb{Z}_2$ -градуировки: $C_{jk}^i = 0$ для $(i) \neq (j) + (k)$. В этом случае уравнение (10) следует из (9).

В этом смысле внешние алгебры (11)–(13) и (66)–(68) обобщают алгебры Гейзенберга фермионных (и бозонных) духовых и антидуховых переменных. Матрица градуировки D при этом является матрицей $D_n^m = (-1)^{(n)} \delta_n^m$, которая определяет хорошо известный автоморфизм супералгебр, и мы имеем

$$(D_1 \sigma_{12} D_1^{-1})_{ij}^{mk} = -(-1)^{((m)+1)((k)+1)} \delta_j^m \delta_i^k.$$

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе мы исследовали специальный класс квадратичных алгебр $\mathcal{U}$ – квантовых алгебр Ли (5). Мы рассмотрели внешнее расширение алгебры $\mathcal{U}$, добавляя алгебру духовых переменных (11)–(13), (17), и нашли БРСТ-оператор Q . Используя БРСТ-оператор (24), (25), (32), можно построить аналоги стандартного комплекса и комплекса де Рама для квантовых алгебр Ли. В данной работе показано, что имеется отображение $\mathbf{i}$, которое действует из стандартного комплекса в подкомплекс bar -комплекса для $\mathcal{U}$. Отображение $\mathbf{i}$ индуцирует (из bar -дифференциала b) дифференциал на стандартном комплексе. Мы сравнили этот индуцированный дифференциал с оператором Q . Оператор Q единственным образом определяется двумя свойствами: начальными членами (55) и условием (58). Мы проверили, что индуцированный дифференциал удовлетворяет этим двум свойствам. Поэтому он совпадает с Q . Более того, отсюда следует, что $Q^2 = 0$. Для построения отображения $\mathbf{i}$ мы должны проверить некоторый набор нетривиальных тождеств на структурные константы σ_{ij}^{kl} и C_{ij}^k . Подобные тождества появлялись и в индуктивном определении БРСТ-оператора для q -алгебр Ли. Изящное доказательство некоторых из этих тождеств основано на комбинировании констант σ_{ij}^{kl} и C_{ij}^k в большую матрицу R_{CD}^{AB} , реализующую R -матричное представление группы кос $\mathcal{B}_\bullet$. Мы далее пользовались свойствами элементов Юиса–Мэрфи в $\mathcal{B}_\bullet$, квантовыми перетасовочными произведениями и несколькими важными тождествами в групповой алгебре группы кос.

Мы рассмотрели обобщение вышеизложенной конструкции на случай q -алгебры Ли, снабженной оператором градуировки.

Следует отметить, что ряд результатов из раздела 5 можно рассматривать как явную реализацию некоторых фактов из работы [3] для случая специального выбора неоднородных квадратичных алгебр.

Заметим, что частный пример нашей конструкции БРСТ-оператора для квантовой алгебры Ли $U_q(\mathfrak{gl}(N))$ уже был детально рассмотрен в нашей работе [14]. В этом случае мы также построили квантовые аналоги анти-БРСТ-оператора и квантового оператора Лапласа.

Мы надеемся, что наша конструкция БРСТ-оператора для квантовых алгебр Ли будет полезна для построения БРСТ-операторов в случае любых квадратичных алгебр (в том числе для бесконечномерных алгебр, таких как W_3), а также для конструирования квантовых W -алгебр из квантовых аффинных алгебр (см. [15] и приведенную там библиографию) посредством квантового аналога процедуры гамильтоновой редукции с помощью квантового БРСТ-метода.

Благодарности. Авторы признательны А. Герасимову, П. Этингофу и А. Полищуку за полезные обсуждения. В. Г. Горбунов и А. П. Исаев благодарят также Математический институт Макса Планка в Бонне и Марсельский университет, где была выполнена существенная часть данной работы, за гостеприимство и поддержку. Работа А. П. Исаева поддержана грантами РФФИ № 03-01-00781 и INTAS № 03-51-3350. Мы также благодарны рецензенту за полезные замечания.

Список литературы

- [1] *S. L. Woronowicz*. Commun. Math. Phys. 1989. V. 122. P. 125.
- [2] *B. L. Feigin, B. L. Tsygan*. Cyclic homology of algebras with quadratic relations, universal enveloping algebras and group algebras. In: K-Theory, Arithmetic and Geometry. Lect. Notes in Math. V. 1289. Ed. Yu. I. Manin. New York: Springer, 1987. P. 210; *P. Feng, B. L. Tsygan*. Commun. Math. Phys. 1991. V. 140. P. 481.
- [3] *A. Braverman, D. Gaietsgory*. J. Algebra. 1996. V. 181. P. 315; hep-th/9411113.
- [4] *A. Polishchuk, L. Positselski*. Quadratic algebras. 1996 (неопубликовано).
- [5] *А. П. Исаев, О. В. Огиевецкий*. ТМФ. 2001. Т. 129. № 2. С. 298; math.QA/0106206.
- [6] *Ч. Бурдук, А. П. Исаев, О. В. Огиевецкий*. ЯФ. 2001. Т. 64. № 12. С. 2191; math.QA/0010060.
- [7] *M. Henneaux, C. Teitelboim*. Quantization of Gauge Systems. Princeton: Princeton Univ. Press, 1992.
- [8] *А. Картан, С. Эйленберг*. Гомологическая алгебра. М.: ИЛ, 1960.
- [9] *A. P. Isaev, O. Ogievetsky*. BRST operator for quantum Lie algebras: explicit formula. Int. J. Mod. Phys. A. 2004 (in press).
- [10] *D. Bernard*. Phys. Lett. B. 1991. V. 260. P. 389.
- [11] *M. Rosso*. Invent. Math. 1998. V. 133. P. 133.
- [12] *M. Graña*. Contemp. Math. 2000. V. 267. P. 111.
- [13] *D. B. Zagier*. Commun. Math. Phys. 1992. V. 147. P. 199.
- [14] *A. P. Isaev, O. Ogievetsky*. Nucl. Phys. B. 2001. V. 102. P. 306.
- [15] *A. Sevostyanov*. Selecta Math. (N. S.). 2002. V. 8. P. 637; math.QA/0107215.