Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Педрони, В. Шиача, Х. П. Зубелли, Бигамильтонова теория уравнения Гарри Дима, *ТМФ*, 2002, том 133, номер 2, 311–326

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf400>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 14:52:11

© 2002 г. М. Педрони*, В. Шиача[†], Х. П. Зубелли[‡]

БИГАМИЛЬТОНОВА ТЕОРИЯ УРАВНЕНИЯ ГАРРИ ДИМА

Предложен способ описания уравнения Гарри Дима (ГД) в бигамильтоновом формализме для уравнения Кортевега–де Фриза и других солитонных уравнений. Это достигается с помощью некоторого пуассонова пучка, построенного из двух совместных пуассоновых структур. Построен аналог иерархии Кадомцева–Петвиашвили (КП), редукции которого приводят к иерархии ГД. Такая система названа иерархией ГД–КП. Построена бесконечномерная система обыкновенных дифференциальных уравнений (от бесконечного количества переменных), которая оказывается эквивалентной иерархии ГД–КП. Ее роль аналогична роли, играемой центральной системой для иерархии КП.

Ключевые слова: бигамильтонов формализм, уравнение Гарри Дима, полностью интегрируемые системы.

1. ВВЕДЕНИЕ

Широкое распространение полностью интегрируемых моделей, таких как нелинейное уравнение Шредингера, уравнение Кортевега–де Фриза (КдФ) и система N -волн, в рамках которых рассматриваются многие физические явления, частично объясняет интерес, возникший к солитонным уравнениям в последние три десятилетия. Другая причина этого интереса связана с многогранными глубокими связями солитонных уравнений с различными областями математики. Эти области простираются от алгебраической геометрии до численного анализа и включают в себя как теорию операторов, так и симплектическую геометрию.

С уравнением КдФ напрямую связано очень интересное уравнение, известное как уравнение Гарри Дима (ГД),

$$q_t = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{(1+q)}} \right)_{xxx}, \quad (1.1)$$

*Dipartimento di Matematica, Università di Genova, Genova, Italy.

E-mail: pedroni@dima.unige.it

[†]Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università di Palermo, Palermo, Italy. E-mail: sciacca@dipmat.math.unipa.it

[‡]IMPA, Rio de Janeiro, Brazil. E-mail: zubelli@impa.br

принимаящее после подстановки $\rho = -(1 + q)^{-1/2}$ эквивалентный вид

$$\rho_t = \rho^3 \rho_{xxx}. \quad (1.2)$$

Уравнение (1.1) было обнаружено в неопубликованной работе Гарри Дима (см. [1]) и появилось в более общем виде в работах Сабатье [2]. Это уравнение обладает многими типичными свойствами солитонных уравнений [3]. Позже связь этого уравнения с иерархиями Кадомцева–Петвиашвили (КП) и модифицированного уравнения КП было детально изучено Овелом и Карильо [4].

В данной работе уравнение ГД исследуется с точки зрения бигамильтонова формализма. Показано, что оно допускает методическую трактовку, развитую в работах [5]–[7]. Другими словами, рассмотрение начинается с пары совместных пуассоновых структур, которые также играют важную роль в теории иерархии КдФ, и с построения функции Казимира для соответствующего пуассонова пучка. В силу стандартной конструкции при этом возникает полная иерархия гамильтоновых потоков, коммутирующих с уравнением ГД. Простым способом и без обращения к псевдодифференциальным операторам можно построить иерархию коммутирующих потоков, которая после ограничения приводит к иерархии ГД. Этот процесс редукции полностью аналогичен процессу, в котором иерархия КдФ возникает из иерархии КП, и потому такую иерархию естественно называть иерархией ГД–КП¹⁾. Наконец, можно выписать бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, для которой иерархия ГД–КП представляет собой подходящую редукцию.

План дальнейшего изложения следующий.

В п. 1.1 дается обзор общих понятий пуассоновой геометрии, бигамильтоновой теории и построения в этом подходе иерархий КдФ и КП. Этот обзор будет служить канвой для теории ГД, развитой ниже, и поможет нам подчеркнуть параллели между иерархией ГД–КП и стандартной иерархией КП. Раздел 2 посвящен построению бигамильтоновой структуры для уравнения ГД и построению бесконечного числа коммутирующих потоков из решения уравнения Риккати. Эти потоки и образуют иерархию ГД. В разделе 3 описывается построение иерархии ГД–КП, играющей для уравнения ГД ту же роль, что иерархия КП играет для уравнения КдФ. В бигамильтоновом формализме иерархия ГД–КП задается бесконечным набором законов сохранения. Токи, отвечающие этим законам, исследуются в разделе 4. В том же разделе показано, что эти токи также могут быть использованы для полного описания эволюции величин в иерархии ГД–КП как иерархии обыкновенных дифференциальных уравнений. Это приводит к понятию *центральной системы*, которая также была успешно использована в ранних работах, посвященных иерархиям КдФ и скрытого уравнения КдФ [5], [6], [8], [9].

1.1. Предварительные сведения. Бигамильтонов подход к солитонным уравнениям. Для того чтобы изложение в данной работе было согласованным, здесь

¹⁾Заметим, что в работе [4] иерархия ГД–КП была построена с использованием псевдодифференциальных операторов.

дается обзор бигамильтонова подхода к иерархиям КдФ и КП. Более детальное рассмотрение и мотивировки читатель может найти в работах [5]–[13].

Наш подход основан на понятии пуассоновых многообразий, которое естественно использовать при исследовании гамильтоновых систем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть $\mathcal{M}$ – дифференциальное многообразие. *Скобка Пуассона* на $\mathcal{M}$ – это антисимметричное $\mathbb{R}$ -билинейное отображение

$$\{\cdot, \cdot\}: C^\infty(\mathcal{M}) \times C^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{M}), \quad (1.3)$$

обладающее следующими свойствами:

1. Тождество Якоби

$$\{\{F, G\}, H\} + \{\{H, F\}, G\} + \{\{G, H\}, F\} = 0.$$

2. Правило Лейбница

$$\{FG, H\} = F\{G, H\} + \{F, H\}G.$$

Пуассоново многообразие – это дифференциальное многообразие, снабженное скобкой Пуассона.

Отталкиваясь от скобки Пуассона, можно ввести тензор P -типа $(2, 0)$, который будет интерпретироваться как отображение из $T^*\mathcal{M}$ в $T\mathcal{M}$, задаваемое формулой

$$\langle dG, P dF \rangle = \{F, G\}. \quad (1.4)$$

Этот тензор называется *пуассоновым тензором*, ассоциированным со скобкой $\{\cdot, \cdot\}$. Векторное поле $X_H = \{H, \cdot\} = P dH$ в пуассоновом многообразии называется *гамильтоновым векторным полем, ассоциированным с функцией H* . Отображение $H \mapsto X_H$, которое сопоставляет функции H ее гамильтоново векторное поле X_H , является гомоморфизмом алгебр Ли:

$$X_{\{F, G\}} = [X_F, X_G]. \quad (1.5)$$

Отсюда следует, что равенство $\{F, G\} = 0$ влечет равенство $[X_F, X_G] = 0$; другими словами, гамильтоновы векторные поля, связанные с функциями в инволюции, коммутируют. *Функция Казимира* есть функция H такая, что $X_H = 0$, т.е. это функция, находящаяся в инволюции с любой другой функцией на $\mathcal{M}$. В терминах пуассонова тензора функция Казимира – это функция, дифференциал которой лежит в ядре структуры P : $P dH = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Пусть $\mathcal{M}$ – многообразие, снабженное двумя скобками Пуассона, $\{\cdot, \cdot\}_0$ и $\{\cdot, \cdot\}_1$. Говорится, что эти скобки *совместны*, если любая линейная комбинация

$$\{F, G\}_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \{F, G\}_1 - \lambda \{F, G\}_0 \quad (1.6)$$

также является скобкой Пуассона. *Бигамильтоново многообразие* – это многообразие $\mathcal{M}$, на котором заданы две совместные скобки Пуассона. В этом случае скобка $\{\cdot, \cdot\}_\lambda$ называется *пуассоновым пучком*, определяемым скобками $\{\cdot, \cdot\}_0$ и $\{\cdot, \cdot\}_1$ на многообразии $\mathcal{M}$.

Поскольку свойства антисимметрии и правило Лейбница для скобки $\{\cdot, \cdot\}_\lambda$ удовлетворяются автоматически, то единственное условие, которое надо проверить – это тождество Якоби. Существуют и другие, эквивалентные формы записи условия совместности. Например, положим $X_F \stackrel{\text{def}}{=} P_0 dF$ и $Y_F \stackrel{\text{def}}{=} P_1 dF$ для $F \in C^\infty(\mathcal{M})$. Тогда легко показать, что условие совместности при этом может быть представлено в виде

$$L_{X_F} P_1 + L_{Y_F} P_0 = 0 \quad \forall F \in C^\infty(\mathcal{M}),$$

где L_X обозначает производную Ли вдоль векторного поля X .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Пусть $(\mathcal{M}, P_0, P_1)$ – бигамильтоново многообразие. Векторное поле X на $\mathcal{M}$ называется *бигамильтоновым векторным полем*, если оно гамильтоново по отношению как к структуре P_0 , так и к структуре P_1 , т.е. если существуют две функции H_0 и H_1 такие, что

$$X = P_0 dH_1 = P_1 dH_0. \quad (1.7)$$

Следующее определение представляет собой существенную составляющую конструкции Ленарда. Эта конструкция широко используется при доказательстве того, что определенные гамильтоновы модели, такие как иерархия КдФ, обладают бесконечными наборами сохраняющихся величин, находящихся в инволюции между собой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Пусть $(\mathcal{M}, P_0, P_1)$ – бигамильтоново многообразие. Тогда бигамильтонова иерархия представляет собой последовательность $\{H_k\}_{k \geq 0}$ функций на $\mathcal{M}$, удовлетворяющих *рекуррентным соотношениям Ленарда*

$$\{\cdot, H_{k+1}\}_0 = \{\cdot, H_k\}_1, \quad k \geq 0, \quad (1.8)$$

и дополнительному условию $\{\cdot, H_0\}_0 = 0$. В терминах пуассоновых тензоров получим

$$P_0 dH_{k+1} = P_1 dH_k,$$

где H_0 – функция Казимира структуры P_0 : $P_0 dH_0 = 0$.

Из бигамильтоновой иерархии немедленно следует бесконечная последовательность бигамильтоновых векторных полей

$$X_k = P_0 dH_k = P_1 dH_{k-1}. \quad (1.9)$$

Все эти поля коммутируют, поскольку функции из бигамильтоновой иерархии находятся в инволюции по отношению к обоим скобкам Пуассона.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Пусть $\{H_k\}$ – бигамильтонова иерархия. Введем функцию

$$H(\lambda) = \sum_{k \geq 0} H_k \lambda^{-k}. \quad (1.10)$$

Тогда, как непосредственно следует из определения бигамильтоновой иерархии, получим, что $H(\lambda)$ представляет собой функцию Казимира пуассонова пучка $\{\cdot, \cdot\}_\lambda$. Обратно, пусть $H(\lambda)$ – функция Казимира структуры $\{\cdot, \cdot\}_\lambda$, которая разлагается в ряд Лорана $H(\lambda) = \sum_{k \geq -n} H_k \lambda^{-k}$ с подходящим n ; тогда коэффициенты $\{H_k\}$ образуют бигамильтонову иерархию.

Это простое замечание указывает на метод поиска бигамильтоновых иерархий – искать функции Казимира пуассонова пучка, которые представляют собой деформации функций Казимира структуры P_0 . Этот метод доказал свою эффективность в целом ряде интегрируемых моделей, таких как иерархия КдФ, иерархия цепочки Тоды и т.д. [5], [6], [12], [14].

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Пусть $\{H_k\}$ – бигамильтонова иерархия, а $X_k = P_0 dH_k = P_1 \times dH_{k-1}$ – соответствующие бигамильтоновы векторные поля. Введем функции

$$H^k(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^k H_j \lambda^{k-j}. \quad (1.11)$$

Тогда легко показать, что для всех λ векторные поля X_k оказываются гамильтоновыми по отношению к скобке P_λ с гамильтонианом $H^{k-1}(\lambda)$,

$$X_k = P_\lambda dH^{k-1}(\lambda). \quad (1.12)$$

Таким образом, векторные поля X_k оказываются не только бигамильтоновыми, но они же являются гамильтоновыми векторными полями по отношению к любой скобке из пуассонова пучка.

Теперь вкратце напомним построение иерархий КдФ и КП с точки зрения бигамильтоновых структур. Читатель может найти детали в работах [5], [6], [11]. Пусть $\mathcal{U}$ представляет собой бесконечномерное многообразие скалярных C^∞ -функций на S^1 , снабженное скобками Пуассона

$$\{F, G\}_0 = 2 \int_{S^1} dF(dG)_x dx, \quad (1.13)$$

$$\{F, G\}_1 = \frac{1}{2} \int_{S^1} (dF(dG)_{xxx} - 4u(dG)_x - 2u_x dG) dx, \quad (1.14)$$

так что пуассонов пучок задается формулой

$$(P_\lambda)_u v = -\frac{1}{2} v_{xxx} + 2(u + \lambda)v_x + u_x v. \quad (1.15)$$

В этих формулах $u \in \mathcal{U}$ – точка, v – ковектор в точке u . Спаривание между v и общим касательным вектором $\dot{u}$ имеет вид

$$\langle v, \dot{u} \rangle = \int_{S^1} v(x) \dot{u}(x) dx. \quad (1.16)$$

Чтобы показать, что пуассонов пучок (1.15) имеет функцию Казимира, надо найти такую точную 1-форму $v(\lambda) = dH(\lambda)$ на $\mathcal{U}$, что

$$P_\lambda v(\lambda) = -\frac{1}{2}v(\lambda)_{xxx} + 2(u + \lambda)v(\lambda)_x + u_x v(\lambda) = 0. \quad (1.17)$$

Пусть $v(\lambda)$ – единственное решение уравнения

$$\frac{1}{4}v_x^2 - \frac{1}{2}v v_{xx} + (u + \lambda)v^2 = \lambda, \quad (1.18)$$

имеющее вид

$$v(\lambda) = 1 + \sum_{i \geq 1} v_i \lambda^{-i}.$$

Тогда можно показать, что $v(\lambda)$ представляет собой точную 1-форму. В самом деле, если положить $\lambda = z^2$ и

$$h(z) = \frac{z}{v} + \frac{v_x}{2v}, \quad (1.19)$$

так что

$$h_x + h^2 = u + z^2, \quad (1.20)$$

то получится, что 1-форма v есть дифференциал от функции

$$H = 2z \int_{S^1} h dx, \quad (1.21)$$

которая тем самым представляет собой функцию Казимира пуассонова пучка. Таким образом, функции Казимира пуассонова пучка (1.15) можно вычислять, решая уравнение Риккати (1.20) (ср. с работой [15]).

Основным объектом предшествующего обсуждения было отображение J из многообразия $\mathcal{U}$ в пространство рядов Лорана, которое ставит в соответствие точке $u \in \mathcal{U}$ гамильтонову плотность $h(u)$, т.е. представляет собой решение уравнения Риккати (1.20). Поскольку J позволяет нам вычислить гамильтонианы, это отображение называется *отображением момента*, связанным с абелевой алгеброй, действующей на многообразии $\mathcal{U}$ с помощью иерархии КдФ. Соотношения инволюции между функциями H_j предполагают, что в то время как u эволюционирует в соответствии с потоками КдФ, плотность $h(u)$ должна обладать законами сохранения вида

$$\frac{\partial h}{\partial t_j} = \partial_x H^{(j)}, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (1.22)$$

где $H^{(j)}$ – подходящие токовые плотности. Важный момент состоит в том, что можно записать $H^{(j)}$ непосредственно в терминах общего ряда Лорана вида

$$h(z) = z + \sum_{j \geq 1} h_j z^{-j}. \quad (1.23)$$

Тогда уравнения (1.22) становятся бесконечномерными системами уравнений в частных производных по переменным $\{h_j\}_{j \geq 1}$, которые эквивалентны иерархиям КП. Эти идеи детально исследуются для случая уравнения ГД в следующем разделе.

2. ИЕРАРХИЯ ГАРРИ ДИМА И ЕЕ БИГАМИЛЬТОНОВА СТРУКТУРА

Начнем исследование иерархии ГД с точки зрения бигамильтоновой конструкции по аналогии со схемой, развитой ранее для уравнения КдФ. Пусть $\mathcal{U}$, как и раньше, обозначает пространство скалярных C^∞ -функций на S^1 , снабженное скобками Пуассона [16]

$$\{F, G\}_0 = \frac{1}{2} \int_{S^1} dF (dG)_{xxx} dx, \quad (2.1)$$

$$\{F, G\}_1 = - \int_{S^1} (2u (dG)_x + u_x dG) dx. \quad (2.2)$$

Соответствующие пуассоновы тензоры имеют вид

$$(P_0)_u = -\frac{1}{2} \partial_{xxx}, \quad (2.3)$$

$$(P_1)_u = -2u \partial_x - u_x, \quad (2.4)$$

так что пуассонов пучок задается формулой

$$(P_\lambda)_u v = -\frac{1}{2} v_{xxx} + \lambda(2uv_x + u_x v). \quad (2.5)$$

Можно показать непосредственно, что P_λ представляет собой пуассонов тензор, так что скобки, определенные выше, оказываются совместными, и пространство $\mathcal{U}$ представляет собой бигамильтоново многообразие.

Первая задача – показать, что, как и в случае иерархии КдФ, пуассонов пучок (2.5) допускает функцию Казимира в форме ряда Лорана. Это позволяет написать иерархию интегрируемых векторных полей, которая содержит в себе и уравнение ГД. Важно, что поиск функции Казимира для пучка (2.5) также связан с решением уравнения Риккати. Начнем с нахождения точной 1-формы $w(\lambda) = dK(\lambda)$ на $\mathcal{U}$, такой, что

$$P_\lambda w(\lambda) = -\frac{1}{2} w(\lambda)_{xxx} + \lambda(2uw(\lambda)_x + u_x w(\lambda)) = 0. \quad (2.6)$$

Проинтегрируем один раз это уравнение, отметив, что

$$w \left(-\frac{1}{2} w_{xxx} + \lambda(2uw_x + u_x w) \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{4} w_x^2 - \frac{1}{2} w w_{xx} + \lambda u w^2 \right), \quad (2.7)$$

и поэтому можно рассмотреть уравнение

$$\frac{1}{4} w_x^2 - \frac{1}{2} w w_{xx} + \lambda u w^2 = \lambda. \quad (2.8)$$

Это уравнение имеет единственное решение вида $w(\lambda) = w_0 + \sum_{i \geq 1} w_i \lambda^{-i}$, а коэффициенты w_i могут быть вычислены с помощью итераций. Чтобы показать, что $w(\lambda)$ представляет собой точную 1-форму, положим $\lambda = z^2$ и заметим, что уравнение (2.8) может быть записано в виде уравнения Риккати

$$\left(\frac{z}{w} + \frac{w_x}{2w} \right)_x + \left(\frac{z}{w} + \frac{w_x}{2w} \right)^2 = uz^2. \quad (2.9)$$

Поэтому можно положить

$$k(z) = \frac{z}{w} + \frac{w_x}{2w}, \quad (2.10)$$

так что (2.9) приобретает вид

$$k_x + k^2 = uz^2. \quad (2.11)$$

Теперь рассмотрим кривую $u(t)$ в пространстве $\mathcal{U}$ и обозначим через $w(t)$ решения уравнения (2.8) в точках этой кривой. Дифференцируя уравнение (2.11) по времени t , получим, что $z^2 \dot{u} = \dot{k}_x + 2k\dot{k}$, а потому

$$\begin{aligned} \langle w, \dot{u} \rangle &= \frac{1}{z^2} \int_{S^1} w(x) (\dot{k}_x + 2k\dot{k}) dx = \frac{2}{z^2} \int_{S^1} \left(-\frac{1}{2}w_x + kw \right) \dot{k} dx = \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{2}{z} \int_{S^1} k dx \right), \end{aligned} \quad (2.12)$$

где было использовано уравнение (2.10) в виде

$$-\frac{1}{2}w_x + kw = z. \quad (2.13)$$

Уравнение (2.12) показывает, что 1-форма w задается дифференциалом от функции

$$K = \frac{2}{z} \int_{S^1} k dx, \quad (2.14)$$

которая тем самым является функцией Казимира пуассонова пучка.

Таким образом, функции Казимира пуассонова пучка (2.5) могут быть вычислены, если решить уравнение Риккати (2.11); его единственное решение допускает асимптотическое разложение по степеням переменной z ,

$$k(z) = k_{-1}z + \sum_{j \geq 0} k_j z^{-j}. \quad (2.15)$$

Можно показать, что k_{2j} представляет собой полную производную при всех j , так что K задается рядом Лорана по λ . Ввиду значимости всех этих свойств, логично объединить их в одном предложении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть k – единственное решение уравнения Риккати (2.11), допускающее асимптотическое разложение (2.15). Тогда его интеграл $K(\lambda)$, определенный формулой (2.14), есть функция Казимира пуассонова пучка (2.5).

Теперь уже имеется алгебраическая техника для вычисления функции Казимира. Перед тем как идти дальше, дадим пример того, как она работает в первых порядках разложения по z . Запишем сначала уравнение Риккати (2.11)

$$\begin{aligned} (z^2) \quad & k_{-1}^2 = u, \\ (z) \quad & k_{-1,x} + 2k_0 k_{-1} = 0, \\ (1) \quad & k_{0,x} + k_0^2 + 2k_{-1} k_1 = 0, \\ (z^{-1}) \quad & k_{1,x} + 2k_0 k_1 + 2k_{-1} k_2 = 0, \\ (z^{-2}) \quad & k_{2,x} + k_1^2 + 2k_0 k_2 + 2k_{-1} k_3 = 0, \quad \dots \end{aligned} \quad (2.16)$$

для нескольких первых коэффициентов. Теперь можно решить систему (2.16) рекуррентно,

$$k_{-1} = \sqrt{u}, \quad (2.17)$$

$$k_0 = -\frac{1}{4} \frac{u_x}{u}, \quad (2.18)$$

$$k_1 = -\frac{5}{32} \frac{u_x^2}{u^2 \sqrt{u}} + \frac{1}{8} \frac{u_{xx}}{u \sqrt{u}}, \quad \dots \quad (2.19)$$

Теперь коэффициенты k_j функции $k(z)$ выражены через функцию u и ее производные. Используя предложение 2.1, можно построить функцию Казимира

$$K(\lambda) = 2z^{-1} \int_{S^1} k dx$$

структуры P_λ . Следовательно, $K = K_0 + K_2 \lambda^{-1} + K_4 \lambda^{-2} + \dots$, как только

$$K_j = 2 \int_{S^1} k_{j-1}.$$

Функции K_{2j} образуют бигамильтонову иерархию, а векторные поля иерархии теперь определены как $X_{2j+1} = P_0 dK_{2j} = P_1 dK_{2j-2}$. Простое вычисление показывает, что векторное поле, отвечающее уравнению ГД (1.1), после замены $u = 1 + q$ и простого масштабного преобразования времен приобретает вид

$$X_3(u) = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{u}} \right)_{xxx}. \quad (2.20)$$

Итак, можно сделать вывод, что все уравнения ГД оказываются гамильтоновыми не только по отношению к обоим пуассоновым тензорам P_0 и P_1 , но и по отношению к пуассонову пучку P_λ . В самом деле, из простого вычисления (см. также замечание 1.2) получим, что

$$X_{2j+1} = P_\lambda dK^{(2j-2)}(\lambda), \quad (2.21)$$

где $K^{(2j-2)}(\lambda) = (z^{2j-2} K(\lambda))_+^{(2)}$.

3. ИЕРАРХИЯ ГД–КП

Потоки, задаваемые уравнением (2.21), естественным образом погружаются в иерархию коммутирующих потоков с бесконечным набором полей аналогично тому, что происходит, когда иерархия КдФ погружается в иерархию КП. На самом деле Карильо и Овел [4] получили такую иерархию ГД–КП в терминах псевдодифференциальных операторов. Ниже будет показано, как соотнести иерархию ГД–КП, построенную в работе [4], с нашей иерархией, следуя технике работы [18].

²⁾Здесь $(S(z))_+$ обозначает неотрицательную часть лорановского разложения функции $S(z)$ по z .

Одно из ключевых наблюдений данной работы состоит в том, что такую иерархию можно построить, исходя из “первых принципов”, подобных тем, что определяют эволюцию $k(u)$ и решение уравнения (2.11), если u эволюционирует в соответствии с иерархией ГД. Основным объектом опять будет отображение из многообразия $\mathcal{U}$ в алгебру рядов Лорана, заданную уравнением Риккати (2.11). Так как решение $k(z)$ этого уравнения позволяет вычислить гамильтонианы, оно называется *отображением моментов*, связанным с абелевой алгеброй, действующей на многообразии $\mathcal{U}$ посредством иерархии ГД. Поскольку функции K_j находятся в инволюции, если u эволюционирует в соответствии с потоками ГД, то функция $k(u)$ должна иметь законы сохранения, имеющие вид

$$\frac{\partial k}{\partial t_{2j+1}} = \partial_x K^{(2j+1)}$$

для некоторых подходящих токовых плотностей $K^{(2j+1)}$. Задача состоит в том, чтобы найти подходящие выражения для токов $K^{(j)}$, которые можно вычислить исходя из идей, развитых в работе [6] в применении к случаю уравнения КдФ. Из уравнения (2.11) получим, что

$$(\partial_x + 2k) \left(\frac{\partial k}{\partial t_j} \right) = z^2 \frac{\partial u}{\partial t_j}, \quad (3.1)$$

в то время как уравнения ГД (2.21) могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t_{2j+1}} = (\partial_x + 2k) \left(\frac{1}{2} \partial_x \right) (-\partial_x + 2k)(\lambda^j w)_+, \quad (3.2)$$

поскольку

$$-\frac{1}{2} w_{xxx} + \lambda u w_x + u_x w = (\partial_x + 2k) \left(\frac{1}{2} \partial_x \right) (-\partial_x + 2k)v. \quad (3.3)$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} (\partial_x + 2k) \left(\frac{\partial k}{\partial t_{2j+1}} \right) &= z^2 (\partial_x + 2k) \left(\frac{1}{2} \partial_x \right) (-(z^{2j-1}w)_+ + 2k(z^{2j-1}w)_+) = \\ &= (\partial_x + 2k) \partial_x z^2 \left(-\frac{1}{2} (z^{2j-1}v)_+ + h(z^{2j-1}v)_+ \right), \end{aligned} \quad (3.4)$$

что в свою очередь приводит к формуле

$$K^{(2j+1)} = -\frac{1}{2} (\lambda^j v)_{+,x} + h(\lambda^j v)_+. \quad (3.5)$$

Это и есть формула для токовых плотностей, которые возникают в искомым законах сохранения. Заметим, что можно положить $K^{(2j)} = z^{2j}$, поскольку зависимость от четных времен тривиальна, и потому можно распространить определение токов на каждый номер j .

Фундаментальное наблюдение, позволяющее обобщить эту процедуру на теорию ГД–КП, состоит в том, что токи $K^{(j)}$ можно вычислять непосредственно из k , не обращаясь к вычислению рядов $w(\lambda)$, что находится в полной аналогии с теорией КдФ [6].

Ключевой объект конструкции – это понятие *многочленов Фаз ди Бруно*. По определению [17] $k^{(j)} = (\partial_x + k)^j \cdot 1$ для $j \geq 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Токи $K^{(l)}$, определенные выше, задаются непосредственно из k при $l \geq 2$, и, в частности, эти токи удовлетворяют соотношениям:

1. $K^{(l)} = z^l + O(z)$;
2. $K^{(l)} \in K''_+$, где $K''_+ \stackrel{\text{def}}{=} \langle k^{(2)}, k^{(3)}, \dots \rangle$ (линейная оболочка C^∞ -функций).

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Для четного l доказательство тривиально. Чтобы доказать первое утверждение при $l = 2j+1$, запишем $(z^{2j-2}w)_+ = z^{2j-2}w - (z^{2j-2}w)_-$ и используем соотношение $-w_x/2 + kw = z$. Чтобы доказать второе утверждение, напомним, что $(z^{2j-2}w)_+ = \sum_{k=0}^{j-1} w_{2k} z^{2(j-k-1)}$, а потому

$$K^{(2j+1)} = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^j w_{2k,x} z^{2(j-k)} + \sum_{k=0}^j w_{2k} z^{2(j-k)} k.$$

Доказательство второго утверждения будет завершено, если доказать, что $z^{2k}k^{(l)} \in K''_+$ и, следовательно,

$$z^2 k^{(l)} = z^2 (\partial_x + k)^l \cdot 1 = (\partial_x + k)^l (z^2) \in K''_+,$$

поскольку $(\partial_x + k)K''_+ \subset K''_+$. Таким образом, например,

$$z^4 = z^2 z^2 = z^2 \frac{1}{u} k^{(2)} = \frac{1}{u} z^2 k^{(2)} \in K''_+ \text{ и т.д.}$$

Предложение 3.1 играет центральную роль при формулировке теории КП для уравнений ГД. Из него следует, что токи $K^{(j)}$, $j \geq 2$, можно вычислять, считая начальным любой ряд Лорана $k(z)$ вида

$$k = k_{-1}z + \sum_{l \geq 0} k_l z^{-l}. \quad (3.6)$$

При этом достаточно только проверять справедливость утверждений 1 и 2 предложения 3.1 и совсем не обязательно утверждать справедливость уравнения (2.11). Например, можно записать, что

$$K^{(l)} = c_l k^{(l)} + \dots + c_2 k^{(2)}, \quad (3.7)$$

где коэффициенты c_j зависят от коэффициентов функции k , определяемых асимптотическим разложением. В этом месте локальные законы сохранения становятся эволюционными уравнениями в пространстве рядов Лорана вида (3.6), при этом становясь независимыми от уравнений ГД.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Иерархия ГД-КП представляет собой систему векторных полей, действующих на пространстве рядов Лорана вида (3.6) по формулам

$$\frac{\partial k}{\partial t_l} = \partial_x K^{(l)}, \quad l = 2, 3, \dots,$$

где сохраняющиеся плотности $K^{(l)}$ определены в соответствии с утверждениями 1 и 2 предложения 3.1.

Чтобы получить определенную выше иерархию ГД, необходимо только лишь наложить связь

$$K^{(2)} = z^2. \quad (3.8)$$

Действительно, легко видеть, что связь (3.8) эквивалентна уравнению Риккати иерархии ГД: следуя разложению (3.7), ток $K^{(2)}$ можно представить в базисе многочленов Фаэ ди Бруно, т.е.

$$K^{(2)} = (k_{-1})^{-2} k^{(2)}.$$

Уравнение (3.8) при этом становится уравнением Риккати (2.11), если положить $u = k_{-1}^{-2}$. Отсюда следует, что $K^{(2k)} = z^{2k}$ при $k = 1, 2, \dots$, и все четные потоки оказываются стационарными.

В работе [4] была построена иерархия коммутирующих потоков, которая включала поток ГД как одну из своих редукций. Это построение, использовавшее понятие псевдодифференциальных операторов, состоит в следующем.

Рассмотрим оператор

$$L_{\text{Dym}} \stackrel{\text{def}}{=} q_{-1} \partial_x + q_0 + q_1 \partial_x^{-1} + q_2 \partial_x^{-2} + \dots. \quad (3.9)$$

Тогда иерархия в лаксовой форме задается уравнениями

$$\frac{\partial L_{\text{Dym}}}{\partial t_j} = [(L_{\text{Dym}}^j)_{\geq 2}, L_{\text{Dym}}], \quad j \geq 2, \quad (3.10)$$

где $(S)_{\geq 2}$ обозначает проекцию псевдодифференциального оператора S на пространство дифференциальных операторов порядка ≥ 2 .

Это определение становится эквивалентным определению, данному в настоящей работе, если произвести замену переменных, вытекающую из замены переменных в работе [6]. Сначала определим многочлены Фаэ ди Бруно $k^{(j)}$ с отрицательными индексами $j < 0$. Это можно сделать исходя из соотношения $k^{(0)} = 1$, если разрешить в обратном направлении уравнения

$$k^{(j+1)} = k_x^{(j)} + k k^{(j)}$$

и затем разложить z по базису $\{k^{(j)}\}_{j \in \mathbb{Z}}$,

$$z = q_{-1} k + \sum_{j \geq 0} q_j k^{(-j)}.$$

Эти соотношения устанавливают замену переменных между $\{k_j\}_{j \geq -1}$ и $\{q_j\}_{j \geq -1}$. Затем надо показать, что уравнения (3.10) совпадают с уравнениями иерархии ГД-КП, заданными в определении 3.1.

4. ЭВОЛЮЦИЯ ТОКОВ

Исследуем теперь более подробно эволюцию токов $K^{(j)}$, когда k эволюционирует в соответствии с иерархией ГД–КП. Первое замечание состоит в том, что уравнения ГД–КП можно интерпретировать как условия коммутативности

$$[\partial_{t_j} + K^{(j)}, \partial_x + k] = 0$$

для операторов $\partial_{t_j} + K^{(j)}$ и $\partial_x + k$. Поскольку $K^{(j)} \in K_+''$ и K_+'' инвариантно по отношению к оператору $\partial_x + k$, то получим, что

$$(\partial_{t_j} + K^{(j)})k^{(l)} = (\partial_{t_j} + K^{(j)})(\partial_x + k)^l \cdot 1 = (\partial_x + k)^l K^{(j)} \in K_+'' \quad (4.1)$$

для всех $l \geq 0$ и $j \geq 2$. Таким образом, имеем

$$(\partial_{t_j} + K^{(j)})(K^{(i)}) \in K_+'' \quad (4.2)$$

Как и в случае уравнения КдФ, мы видим, что токи $K^{(j)}$ образуют базис пространства K_+'' . Поэтому уравнения (4.2) можно представить в виде комбинации токов с подходящими коэффициентами. Более подробно, если записать

$$K^{(i)} = z^i + K_{-1}^i z + \sum_{l \geq 0} K_l^i z^{-l}, \quad i \geq 2, \quad (4.3)$$

то уравнения (4.2) могут быть записаны в явном виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial K^{(i)}}{\partial t_j} + K^{(i)} K^{(j)} &= K^{(i+j)} + K_{-1}^i K^{(j+1)} + K_{-1}^j K^{(i+1)} + \\ &+ K_{-1}^i K_{-1}^j K^{(2)} + K_0^i K^{(j)} + K_0^j K^{(i)} + \\ &+ \sum_{l=1}^{i-2} K_l^j K^{(i-l)} + \sum_{l=1}^{j-2} K_l^i K^{(j-l)}, \quad i, j \geq 2, \end{aligned} \quad (4.4)$$

что дает эволюцию токов. Похожее выражение может быть найдено и для эволюции k . В самом деле, из выражения (4.1) следует, что

$$\frac{\partial k}{\partial t_j} + k K^{(j)} \in K_+'',$$

так что

$$\frac{\partial k}{\partial t_j} + k K^{(j)} = k_{-1} K^{(j+1)} + k_0 K^{(j)} + K_{-1}^j k_{-1} K^{(2)} + \sum_{l=1}^{j-2} k_l K^{(j-l)}, \quad j \geq 2. \quad (4.5)$$

Конечно, это выражение не отличается от определения иерархии ГД–КП, но в нем явно не содержится x -производных. Более того, справедливость уравнений

$$\partial_x K^{(j)} + k K^{(j)} = k_{-1} K^{(j+1)} + k_0 K^{(j)} + K_{-1}^j k_{-1} K^{(2)} + \sum_{l=1}^{j-2} k_l K^{(j-l)}, \quad j \geq 2, \quad (4.6)$$

и

$$\partial_x k + k^2 = k_{-1}^2 K^{(2)} \quad (4.7)$$

следует из того, что оператор $\partial_x + k$ отображает линейную оболочку $K'_+ \stackrel{\text{def}}{=} \langle k^{(j)} \rangle_{j \geq 1}$ в K''_+ .

В следующем разделе будет показано, что по аналогии с уравнениями центральной системы для иерархии КП уравнения (4.4)–(4.7) порождают *уравнения центральной системы для иерархии ГД*.

Подчеркнем, что уравнения (4.4)–(4.7) указывают на то, что эволюция лорановских коэффициентов токов $K^{(i)}$ и k подразумевает существование *динамической системы*, которая не включает в себя пространственных производных. Отметим также, что такая система отличается от системы, полученной в работе [18], поскольку в данном случае функция k не является мономом.

5. ЦЕНТРАЛЬНАЯ СИСТЕМА ИЕРАРХИИ ГД

В предыдущем разделе была проанализирована эволюция токов при условии выполнения уравнений ГД–КП. Заметим, что все коэффициенты в уравнениях (4.4)–(4.7) зависят от коэффициентов k_j функции k через многочлены Фаз ди Бруно, как в предложении 3.1. Основным моментом при переходе к рассмотрению центральной системы состоит в том, что токи (4.3) рассматриваются как произвольные элементы пространства K''_+ , не зависящие от k . Следующий шаг состоит в том чтобы рассмотреть функцию k , не зависящую от уравнения Риккати при переходе от локальных законов сохранения к уравнениям ГД–КП. В этой новой картине ряд k не играет никакой специальной роли, и его можно привести к виду

$$K^{(1)} = K_{-1}^1 z + \sum_{l \geq 0} K_l^1 z^{-l}.$$

Было показано (см. (4.2)), что эволюция токов описывается уравнениями

$$(\partial_{t_j} + K^{(j)})K^{(l)} \in K''_+, \quad l, j \geq 1. \quad (5.1)$$

Легко видеть, что эти уравнения могут быть записаны в виде

$$\partial_{t_j} K^{(l)} = -\pi''_-(K^{(j)} K^{(l)}), \quad l, j \geq 1, \quad (5.2)$$

где величины π''_- и π''_+ обозначают проекции пространства L всех лорановских рядов на соответствующие подпространства K''_+ и K''_- , определяемые разложением

$$L = \langle K^{(2)}, K^{(3)}, \dots \rangle \oplus \langle z, 1, z^{-1}, \dots \rangle = K''_+ \oplus K''_-. \quad (5.3)$$

Будем называть (5.2) *центральной системой ГД* (ЦС–ГД), связанной с теорией ГД–КП. Рассмотрим некоторые ее свойства.

Во-первых, эволюция токов, задаваемая уравнениями центральной системы для иерархии ГД, образует систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

типа Риккати в компонентах полей $K^{(i)}$ при $i \geq 1$. Во-вторых, определенные выше потоки взаимно коммутируют. Чтобы это показать, заметим, что вдоль потоков ЦС–ГД (5.2) имеет место равенство

$$\frac{\partial K^{(j)}}{\partial t_i} = \frac{\partial K^{(i)}}{\partial t_j}.$$

Затем можно вычислить коммутатор двух векторных полей иерархии ЦС–ГД для тока общего положения $K^{(i)}$. Будем называть такие поля $\mathbf{X}_j$ и $\mathbf{X}_l$ и заметим, что

$$[\mathbf{X}_j, \mathbf{X}_l](K^{(i)}) = \frac{\partial}{\partial t_j} \frac{\partial K^{(i)}}{\partial t_l} - \frac{\partial}{\partial t_l} \frac{\partial K^{(i)}}{\partial t_j} = \left[\frac{\partial}{\partial t_j} + K^{(j)}, \frac{\partial}{\partial t_l} + K^{(l)} \right] K^{(i)}.$$

Ввиду специального вида ряда Лорана для $K^{(i)}$ вышеприведенный коммутатор принадлежит пространству K''_- . С другой стороны, из условий инвариантности (5.2), задающих потоки, следует, что этот коммутатор сам принадлежит пространству K''_+ , а потому равен нулю.

Как следствие этой конструкции в данной схеме оказывается применимым *процесс восстановления пространственной зависимости*, ранее описанный в работах [18]. В основе этой методики лежит следующее рассуждение.

Допустим, что на некотором многообразии имеется семейство $\{\mathbf{X}_j\}$ коммутирующих векторных полей. Тогда имеют место две естественных процедуры редукции. Первая состоит в том, что можно взять проекцию вдоль интегральных кривых одного из векторных полей. Вторая редукция сводится к ограничению на множество нулей некоторого фиксированного векторного поля. Полагая, в частности, $t_1 = x$ и используя первый поток для записи всех уравнений в терминах функции $k \stackrel{\text{def}}{=} K^{(1)}$ и ее производных по x , можно получить иерархию ГД–КП. Это соответствует первой схеме редукции. Второй шаг состоит в том, чтобы рассмотреть стационарные потоки по отношению к потоку по времени t_2 , задаваемые связью $K^{(2)} = z^2$. При этом воспроизводится уравнение Риккати и иерархия ГД, описанная в разделе 2.

6. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В данной работе для уравнения ГД были выполнены первые этапы программы, развитой в работах [6], [11] для иерархий КдФ и КП. Были построены иерархия ГД, иерархия ГД–КП и соответствующая центральная система. Указанная программа привела к построению линеаризованных потоков иерархии КП и к построению полиномиальных τ -функций [9], [12]. Это было достигнуто при использовании накрытий Дарбу и введения *модифицированной центральной системы*. Введение таких понятий в случае уравнения ГД было бы естественным продолжением данной работы.

Благодарности. Авторы благодарны Франко Магри за стимулирующее обсуждение и предложения. Работа М. Педрони была поддержана MURST (грант “Геометрия интегрируемых систем”). Работа В. Шиача была поддержана MURST (грант “Нелинейные математические проблемы распространения волн и стабильности в моделях непрерывных сред”). Работа Х. П. Зубелли была поддержана стипендией Бразильского

Национального Совета по научным исследованиям (CNPq) № 200258/84-2 (“Bolsista do CNPq-Brasil”) и грантом Научного фонда штата Рио де Жанейро (FAPERJ) № 170.369/2001. Его исследования в MSRI были частично поддержаны NSF (грант DMS-9810361).

Список литературы

- [1] *M. Kruskal*. Nonlinear wave equations. In: Dynamical Systems, Theory and Applications (Rencontres, Battelle Res. Inst., Seattle, Wash., 1974). Lecture Notes in Phys. V. 38. Ed. J. Moser. Berlin: Springer, 1975. P. 310–354.
- [2] *P. C. Sabatier*. Lett. Nuovo Cimento (2). 1979. V. 26(15). P. 483–486; *P. C. Sabatier*. 1979. V. 26(15). P. 477–482; *P. C. Sabatier*. Around the classical string problem. In: Nonlinear Evolution Equations and Dynamical Systems. Proc. Meet. Held at the Univ. Lecce, June 20–23, 1979. Lect. Notes Phys. V. 120. Eds. M. Boiti et al. Berlin: Springer, 1980. P. 85–102.
- [3] *C. Rogers*. Phys. Lett. A. 1987. V. 120. № 1. P. 15–18; *Ben Yu Guo, C. Rogers*. Sci. China Ser. A. 1989. V. 32. № 3. P. 283–295; *V. G. Dubrovsky, B. G. Konopelchenko*. J. Phys. A. 1994. V. 27(13). P. 4619–4628; *B. G. Konopelchenko, Jyh-Hao Lee*. Teoret. Mat. Fiz. 1994. V. 99. № 2. P. 337–344; *O. Ragnisco, S. Rauch-Wojciechowski*. J. Math. Phys. 1994. V. 35. № 2. P. 834–847; *B. G. Konopelchenko, Jyh-Hao Lee*. Phys. D. 1995. V. 81. № 1–2. P. 32–43.
- [4] *W. Oevel, S. Carillo*. J. Math. Anal. Appl. 1998. V. 217. № 1. P. 161–178; P. 179–199.
- [5] *P. Casati, G. Falqui, F. Magri, M. Pedroni*. J. Math. Phys. 1997. V. 38. № 9. P. 4606–4628.
- [6] *G. Falqui, F. Magri, M. Pedroni*. Commun. Math. Phys. 1998. V. 197. № 2. P. 303–324.
- [7] *P. Casati, G. Falqui, F. Magri, M. Pedroni*. J. Geom. Phys. 1998. V. 26. № 3–4. P. 291–310.
- [8] *F. Magri, M. Pedroni, J. P. Zubelli*. Commun. Math. Phys. 1997. V. 188. № 2. P. 305–325.
- [9] *Г. Фальки, Ф. Магри, М. Педрони, Х. П. Зубелли*. ТМФ. 2000. Т. 122. № 1. С. 23–36.
- [10] *P. Casati, G. Falqui, F. Magri, M. Pedroni*. Lett. Math. Phys. 1997. V. 41. № 3. P. 291–305.
- [11] *G. Falqui, M. Pedroni, F. Magri, P. Casati*. Soliton equations, bi-Hamiltonian manifolds and integrability. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). Rio de Janeiro, 1997.
- [12] *P. Casati, G. Falqui, F. Magri, M. Pedroni, J. P. Zubelli*. Mat. Contemp. 1998. V. 15. P. 45–65.
- [13] *F. Magri, M. Pedroni*. KdV equations, KP equations, and bi-Hamiltonian manifolds. In: Proceedings of the VIII International Conference on Waves and Stability in Continuous Media (Palermo, Italy, 1995). Suppl. Rend. Circ. Mat. Palermo. II. Ser. 45. Palermo: Circolo Matematico di Palermo, 1996. Part I. P. 377–392.
- [14] *G. Falqui, F. Magri, M. Pedroni*. J. Nonlinear Math. Phys. 2001. V. 8 (suppl.). P. 118–127.
- [15] *R. M. Miura, C. S. Gardner, M. D. Kruskal*. J. Math. Phys. 1968. V. 9. P. 1204–1209.
- [16] *F. Magri*. A geometrical approach to the nonlinear solvable equations.. In: Nonlinear Evolution Equations and Dynamical Systems. Proc. Meet. Held at the Univ. Lecce, June 20–23, 1979. Lect. Notes Phys. V. 120. Eds. M. Boiti et al. Berlin: Springer, 1980. P. 233–263; *I. Dorfman*. Dirac Structures and Integrability of Nonlinear Evolution Equations. Chichester: John Wiley & Sons Ltd., 1993.
- [17] *L. A. Dickey*. Soliton Equations and Hamiltonian Systems. River Edge, NJ: World Scientific Publishing Co. Inc., 1991.
- [18] *P. Casati, B. Konopelchenko, M. Pedroni*. Mat. Contemp. 2000. V. 18. P. 59–75.