Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Байатт-Смит, Х. У. Браден, О функциональном уравнении Руджинарса,
ТМФ, 2002, том 133, номер 3, 353–366

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf403>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 14:27:40

© 2002 г. Дж. Г. Б. Байатт-Смит*, Х. У. Браден*

О ФУНКЦИОНАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ РУДЖИНАРСА

Получено общее решение функционального уравнения, введенного Руджинарсом, которое гарантирует коммутативность n операторов, связанных с квантовыми моделями Руджинарса–Шнайдера.

Ключевые слова: интегрируемость, функциональные уравнения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Целью настоящей работы является исследование функционального уравнения

$$\sum_{\substack{I \subseteq \{1, 2, \dots, n\} \\ |I|=k}} \left(\prod_{\substack{i \in I \\ j \notin I}} h(x_j - x_i) h(x_i - x_j - i\beta) - \prod_{\substack{i \in I \\ j \notin I}} h(x_i - x_j) h(x_j - x_i - i\beta) \right) = 0, \quad (1)$$

где β — произвольное положительное число, а сумма берется по всем подмножествам с k элементами. Мы покажем, что это уравнение лежит в основе квантовой интегрируемости моделей Руджинарса–Шнайдера. Докажем, что справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1. *Общее решение функционального уравнения (1), аналитичное в окрестности вещественной оси с простым полюсом в начале координат или с набором таких полюсов в точках pr на вещественной оси ($n \in \mathbb{Z}$), имеет вид*

$$h(x) = b \frac{\sigma(x + \nu)}{\sigma(x)\sigma(\nu)} e^{\alpha x}. \quad (2)$$

Прежде чем приступить к доказательству теоремы 1, очертим контекст данной работы. Несколько лет назад Руджинарс и Шнайдер [1] провели исследование механических моделей, подчиняющихся алгебре Пуанкаре

$$\{H, B\} = P, \quad \{P, B\} = H, \quad \{H, P\} = 0, \quad (3)$$

*Department of Mathematics and Statistics, The University of Edinburgh, Edinburgh, UK.
E-mail: Byatt@ed.ac.uk; hwb@ed.ac.uk

где H – гамильтониан системы, генерирующий временные трансляции, P – генератор пространственных трансляций, а B – генератор бустов. Это исследование было частично мотивировано поиском механических моделей, описывающих взаимодействие солитонов. Оказалось, что модели, которые они открыли, обладают другими важными свойствами: они в действительности являются интегрируемыми и существует их естественная квантовая версия. Руджинарс и Шнайдер приняли анзац

$$H = \sum_{j=1}^n \operatorname{ch} p_j \prod_{k \neq j} f(x_j - x_k), \quad P = \sum_{j=1}^n \operatorname{sh} p_j \prod_{k \neq j} f(x_j - x_k), \quad B = \sum_{j=1}^n x_j.$$

При использовании канонической скобки Пуассона $\{p_i, x_j\} = \delta_{ij}$ в рамках этого анзаца автоматически удовлетворяются первые два соотношения в (3), включающие оператор бустов B . Последняя в (3) скобка Пуассона тогда равна

$$\begin{aligned} \{H, P\} = & - \sum_{j=1}^n \partial_j \prod_{k \neq j} f^2(x_j - x_k) - \\ & - \frac{1}{2} \sum_{j \neq k} \operatorname{ch}(p_j - p_k) \prod_{l \neq j} f(x_j - x_l) \prod_{m \neq k} f(x_k - x_m) (\partial_j \ln f(x_k - x_j) + \partial_k \ln f(x_j - x_k)), \end{aligned}$$

и для того чтобы независимые члены, пропорциональные $\operatorname{ch}(p_j - p_k)$, обращались в нуль, требуется, чтобы отношение $f'(x)/f(x)$ было нечетным. Отсюда вытекает, что $f(x)$ является или четной, или нечетной функцией¹⁾, и в любом случае функция $F(x) = f^2(x)$ четна. Если $f(x)$ удовлетворяет таким условиям, окончательная скобка Пуассона эквивалентна функциональному уравнению:

$$\{H, P\} = 0 \iff \sum_{j=1}^n \partial_j \prod_{k \neq j} f^2(x_j - x_k) = 0. \quad (4)$$

Заметим, что поделив уравнение (1) на β и взяв предел при $\beta \rightarrow 0$, получим (4), где $F(x) = h(x)h(-x)$ при $k = 1$.

При $n = 3$ уравнение (4) можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ F(x) & F(y) & F(z) \\ F'(x) & F'(y) & F'(z) \end{vmatrix} = 0, \quad x + y + z = 0, \quad (5)$$

где $F(x) = f^2(x)$. Руджинарс и Шнайдер показали [1], что $F(x) = \wp(x) + c$ удовлетворяет уравнению (5) и, более того, удовлетворяет уравнению (4) для всех n . То же самое функциональное уравнение (без допущения о четности функции $F(x)$) возникало в нескольких разных контекстах, связанных с интегрируемыми системами. Оно появляется при характеристизации квантово-механических потенциалов, для которых волновая

¹⁾Руджинарс и Шнайдер полагают $f(x) = f(-x)$.

функция основного состояния (заданного вида) факторизуема [2]²⁾. Недавно было показано [3], что это уравнение характеризует систему Калоджеро–Мозера [4], которая представляет собой скейлинговый предел системы Руджинарса–Шнайдера [5]. Возникают глубокие связи между функциональными уравнениями и интегрируемыми системами [6]. Аналитические решения уравнения (5) были охарактеризованы Бухштабером и Переломовым [7], а затем нами был получен [8] несколько более сильный результат с использованием значительно более простого доказательства.

ТЕОРЕМА 2 [8]. Пусть F — трижды дифференцируемая функция, удовлетворяющая функциональному уравнению (5). Тогда с точностью до явной инвариантности $F(z) \rightarrow \alpha F(\delta z) + \beta$ одна из функций $F(z) = \wp(z + d)$, $F(z) = e^z$ или $F(z) = z$ является решением уравнения (5). Здесь $\wp$ — $\wp$ -функция Вейерштрасса, а $3d$ — точка решетки для $\wp$ -функции.

Таким образом, четные решения уравнения (5) являются в точности решениями, полученными Руджинарсом и Шнайдером. До самого последнего времени общее решение уравнения (4) оставалось неизвестным, в работе [9] мы установили следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3 [9]. Общее четное решение уравнения (4) в классе мероморфных функций, единственные сингулярности которых на вещественной оси являются или двойным полюсом в начале координат, или двойными полюсами в точках np ($p \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$), для всех нечетных n дается решением Руджинарса–Шнайдера, а для четных $n \geq 4$, в дополнение к решениям Руджинарса–Шнайдера, имеются следующие решения:

$$\begin{aligned} F_1(z) &= \sqrt{(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3)} = \frac{\sigma_2(z)\sigma_3(z)}{\sigma^2(z)} = \\ &= \frac{\theta_3(v)\theta_4(v)}{\theta_1^2(v)} \frac{\theta_1'^2(0)}{4\omega^2\theta_3(0)\theta_4(0)} = b \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn}^2 u}, \\ F_2(z) &= \sqrt{(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_3)} = \frac{\sigma_1(z)\sigma_3(z)}{\sigma^2(z)} = \\ &= \frac{\theta_2(v)\theta_4(v)}{\theta_1^2(v)} \frac{\theta_1'^2(0)}{4\omega^2\theta_2(0)\theta_4(0)} = b \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn}^2 u}, \\ F_3(z) &= \sqrt{(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)} = \frac{\sigma_1(z)\sigma_2(z)}{\sigma^2(z)} = \\ &= \frac{\theta_2(v)\theta_3(v)}{\theta_1^2(v)} \frac{\theta_1'^2(0)}{4\omega^2\theta_2(0)\theta_3(0)} = b \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn}^2 u}. \end{aligned}$$

Здесь

$$\sigma_\alpha(z) = \frac{\sigma(z + \omega_\alpha)}{\sigma(\omega_\alpha)} e^{-z\zeta(\omega_\alpha)}, \quad u = \sqrt{e_1 - e_3} z, \quad v = \frac{z}{2\omega}, \quad b = e_1 - e_3,$$

²⁾Заметим, что δ -функциональный потенциал $a\delta(x)$ в квантово-механической задаче многих тел на прямой, имеющей факторизуемую волновую функцию основного состояния, можно рассматривать как предел $-b/(\alpha \operatorname{sh}^2(-x/\alpha + \pi i/3))$ при $\alpha \rightarrow 0$, где $\pi a\alpha = 6b$. Таким образом, все известные квантово-механические задачи с факторизуемой волновой функцией основного состояния включаются в уравнение (5).

причем $\omega_1 = \omega$, $\omega_2 = -\omega - \omega'$ и $\omega_3 = \omega'$, и приведено представление в терминах эллиптических функций Вейерштрасса, тета-функций и эллиптических функций Якоби [10]. При подходящих интервалах изменения z решения являются вещественными. Их вырождения дают все четные решения с одним лишь двойным полюсом при $x = 0$ на вещественной оси. Эти вырождения могут совпадать с вырождениями решения Руджинарса–Шнайдера. Можно непосредственно проверить, что эти новые решения действительно удовлетворяют уравнению (4) при четных n [11], однако для доказательства того, что таким образом исчерпываются все решения, пришлось развить новые методы.

Открытые Руджинарсом и Шнайдером модели не только демонстрируют действие алгебры Пуанкаре, но являются также полностью интегрируемыми. В частности, Руджинарс и Шнайдер показали пуассонову коммутативность для их решений переменных светового конуса

$$S_{\pm k} = \sum_{\substack{I \subseteq \{1, 2, \dots, n\} \\ |I|=k}} \exp\left(\pm \sum_{i \in I} p_i\right) \prod_{\substack{i \in I \\ j \notin I}} f(x_i - x_j), \quad (6)$$

так что $H = (S_1 + S_{-1})/2$ и $P = (S_1 - S_{-1})/2$. (Заметим, что четность или нечетность функций $f(x)$ означает, что в действительности имеется только n функционально независимых величин.) Нерешенным остается вопрос о том, приводят ли новые решения из теоремы 3 к интегрируемым системам. Известно, что если использовать анзац Руджинарса и Шнайдера, то эти новые решения не всегда приводят к коммутирующим относительно скобки Пуассона величинам, однако в настоящий момент мы не можем исключить наличие других сохраняющихся величин, коммутирующих относительно скобки Пуассона [11].

Руджинарс [12] исследовал также квантовый вариант классических моделей, введенных им и Шнайдером. С самого начала он искал операторные аналоги переменных светового конуса (6). Он показал, что при $k = 1, \dots, n$

$$\hat{S}_k = \sum_{\substack{I \subseteq \{1, 2, \dots, n\} \\ |I|=k}} \prod_{\substack{i \in I \\ j \notin I}} h(x_j - x_i)^{1/2} \exp\left(-\sqrt{-1} \beta \sum_{i \in I} \partial_i\right) \prod_{\substack{i \in I \\ j \notin I}} h(x_i - x_j)^{1/2}$$

попарно коммутируют тогда и только тогда, когда уравнение (1) выполняется для всех k и $n \geq 1$. Затем он показал, что выражение (2) дает решение уравнения (1), и это решение связано с известным ранее решением Руджинарса–Шнайдера соотношением

$$\frac{\sigma(x + \nu)\sigma(x - \nu)}{\sigma^2(x)\sigma^2(\nu)} = \wp(\nu) - \wp(x).$$

Руджинарс [12] предположил, что это решение “скорее всего единственно”, но не смог этого доказать. Наш классический анализ дает возможные функции $F(x) = h(x)h(-x)$. Возникает естественный вопрос: имеется ли решение уравнения (1), соответствующее нашим новым решениям? Если нет, то решение Руджинарса действительно единственно. Теорема 1 доказывает единственность решений Руджинарса.

Теперь мы обратимся к доказательству теоремы 1, используя метод преобразования, развитый в работе [9].

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

В этом разделе мы решим уравнение (1) путем построения преобразования Фурье этого уравнения при $k = 1$. Наряду с функцией $F(z) = h(z)h(-z)$ введем функцию

$$g(z, \beta) = h(-z)h(z - i\beta). \quad (7)$$

Преобразование Фурье уравнения (1) будет выполнено в терминах трансформанты Фурье $\hat{g}(k, \beta)$ функции $g(z, \beta)$. Мы покажем, как после тщательного выбора параметризации преобразование Фурье уравнения (1) при $k = 1$ приводит точно к тому же уравнению, которое возникло при исследовании преобразования Фурье уравнения (4). Тогда по теореме 3 получаем общие решения для $g(z, \beta)$. Мы обнаружили, что можно записать

$$g(z, \beta) \equiv h(-i\beta)(F_1(z - i\beta) - F_1(z) - F_1(\nu - i\beta) + F_1(\nu)),$$

где $F_1(z) = \int F(z) dz$, $F(\nu) = 0$, а $F(x)$ — любое решение, даваемое теоремой 3. Задав функцию $g(z, \beta)$, мы хотим теперь факторизовать ее, как указано в (7). Новые решения из теоремы 3 не обладают свойствами факторизации (7). Это означает, что при $k = 1$ единственные решения уравнения (1) даются выражением (2). Однако известно, что эти решения удовлетворяют уравнению (1) для всех k , что и позволяет доказать теорему. Наша стратегия будет заключаться в том, чтобы брать преобразование Фурье для функций возрастающей сложности, в первую очередь рассматривая функции, имеющие только полюс в начале координат и обращающиеся в нуль на бесконечности; затем мы рассмотрим аналогичные функции, стремящиеся к постоянной на бесконечности; наконец, мы рассмотрим функции с периодическим набором полюсов вдоль вещественной оси, включая начало координат.

Прежде чем мы выведем уравнение для $\hat{g}$, рассмотрим свойства функции g и условия, которые эти свойства налагают на $\hat{g}$. Исходные решения Руджинарса–Шнайдера для $F(z)$ можно выразить как

$$F(z) = A\wp(z, g_2, g_3) + B, \quad (8)$$

где A , B , g_2 и g_3 — константы. Они являются четными функциями z с двойным полюсом в начале координат. Новые решения уравнения, полученные в работе [9], имеют аналогичную структуру, но не позволяют добавить произвольную константу B . Однако в обоих случаях без потери общности можно использовать константу A и скейлинговые свойства функции $\wp(z)$ для ограничения выбора $F(z)$ так, чтобы $z^2 F(z) \rightarrow -1$ при $z \rightarrow 0$ и чтобы в случае, когда решение имеет конечный вещественный период, он полагался равным 2π . Пусть ν — нуль функции $F(z)$. Константу B можно выразить через ν таким образом, чтобы решения (8) приняли вид

$$F(z) = \wp(\nu) - \wp(z). \quad (9)$$

Условие $F(\nu) = 0$ тогда требует, чтобы $h(\nu)h(-\nu) = 0$. Фиксируем $h(z)$, потребовав, чтобы $h(z) = 0$ при $z = -\nu$. Из этого следует $g(\nu, \beta) = g(-\nu + i\beta, \beta) = 0$. Далее, поскольку $F(z)$ имеет двойной полюс при $z = 0$, функция $h(z)$ должна иметь простой полюс при $z = 0$, и мы выбираем $h(z)$ так, чтобы $zh(z) \rightarrow +1$ при $z \rightarrow 0$. Таким образом, функция $g(z, \beta)$ должна иметь простые полюсы при $z = 0$ и $z = i\beta$, причем $zg(z) \rightarrow -h(-i\beta)$ при $z \rightarrow 0$ и $(z - i\beta)g(z) \rightarrow h(-i\beta)$ при $z \rightarrow i\beta$.

Получим теперь уравнение для $\hat{g}$, выполнив преобразование Фурье уравнения (1). Положим $z_j = x_j + iy_j$ и обозначим через $E(\mathbf{k}, z_n)$ левую часть уравнения (1) при $k = 1$. Определим $(n - 1)$ -мерное преобразование Фурье как

$$\hat{E}(\mathbf{k}, z_n, \beta) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} E(\mathbf{z}, z_n, \beta) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{z}} d\mathbf{z}, \quad (10)$$

где $\mathbf{z}$ — вектор $(z_1, z_2, \dots, z_{n-1})$. Однако поскольку $g(z, \beta)$ имеет полюс в начале координат, мы заменим z_j на $z_j + i\epsilon_j$ и будем считать, что $\epsilon_1 > \epsilon_2 > \dots > \epsilon_n > 0$ и ϵ_1 мало. В определении $\hat{E}$ (10) предполагается, что интегрирование проводится вдоль вещественной оси в комплексной плоскости $x_j + iy_j$.

2.1. Функции с бесконечным вещественным периодом, обращающиеся в нуль на бесконечности. В первую очередь рассмотрим класс решений $g(z, \beta)$, которые имеют бесконечный вещественный период и стремятся к нулю на бесконечности, не имея при этом никаких других сингулярностей на вещественной оси, кроме полюса в начале координат. Тем самым при замене z_j на $z_j + i\epsilon_j$ подынтегральное выражение в (10) не будет иметь других сингулярностей в области интегрирования, если $\epsilon_1 < \beta$, где β вещественна и положительна. Редукция $\hat{E} = 0$ при $\epsilon_1 \rightarrow 0$ к уравнению, включающему обобщенный фурье-образ $\hat{g}(k, \beta)$, следует подходу, предложенному в работе [9]. Определение $\hat{g}$ имеет вид

$$\hat{g}(k, \beta) = \frac{1}{2}(\hat{g}_U(k, \beta) + \hat{g}_L(k, \beta)), \quad (11)$$

где

$$\hat{g}_U(k, \beta) = \oint_{-\infty}^{\infty} g(z, \beta) e^{-ikz} dz, \quad \hat{g}_L(k, \beta) = \oint_{-\infty}^{\infty} g(z, \beta) e^{-ikz} dz \quad (12)$$

определены так, что пути интегрирования проходят соответственно над и под полюсом при $z = 0$. Имеем тогда

$$\hat{g}_L - \hat{g}_U = 2\pi i \times \text{Res}|_{z=0} g(z, \beta) = -2\pi i h(-i\beta)$$

и

$$\hat{g}_U = \hat{g} + i\pi h(-i\beta), \quad \hat{g}_L = \hat{g} - i\pi h(-i\beta).$$

Однако приведенное выше определение сопряжено с проблемой при $\beta \rightarrow 0$, заключающейся в том, что

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \hat{g}(k, \beta) \neq \hat{g}(k, 0). \quad (13)$$

Это связано с тем, что при $\beta > 0$ оба пути интегрирования в (12) лежат ниже полюса при $z = i\beta$, тогда как если мы положим $\beta = 0$ и затем используем определения (11) и (12), то верхний путь интегрирования пройдет выше полюса, который становится двойным полюсом в точке $z = 0$ при $\beta \rightarrow 0$. Чтобы преодолеть эту трудность, определим

модифицированную функцию $\hat{g}_U$, обозначаемую $\hat{g}_{UM}$, и модифицированный обобщенный фурье-образ $\hat{g}_M$, сдвигая верхний контур в уравнении (12) таким образом, чтобы он проходил над полюсом при $z = i\beta$. Тогда

$$\hat{g}_{UM} = \hat{g}_U - 2\pi i \operatorname{Res} |_{z=i\beta} g(z, \beta) e^{-ikz} = \hat{g}_U - 2\pi i h(-i\beta) e^{\beta k}.$$

Отсюда получаем

$$\hat{g}_M = \hat{g} - \pi i h(-i\beta) e^{\beta k}. \quad (14)$$

С помощью этих определений легко показать, что когда $g = -1/(z(z - i\beta))$, имеем $\hat{g}_M = \pi(e^{\beta k} - 1)(\operatorname{sign} k)/\beta$ при $\lim_{\beta \rightarrow 0} \hat{g}_M = \pi|k|$, что представляет собой обобщенное преобразование Фурье функции $-1/z^2$.

В результате преобразования Фурье уравнения (1) при $k = 1$ каждый из членов

$$\prod_{j \neq i} h(x_j - x_i) h(x_i - x_j - i\beta) = \prod_{j \neq i} g(x_i - x_j)$$

в сумме редуцируется в произведение одномерных фурье-образов. Используя приведенные выше определения, получаем, что в зависимости от положения полюсов возникает одна из четырех возможностей:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} g(u + i\epsilon) e^{-iku} du &= \hat{g}_M(k) + i\pi h(-i\beta) - i\pi h(-i\beta) e^{\beta k}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(u - i\epsilon) e^{-iku} du &= \hat{g}_M(k) - i\pi h(-i\beta) + i\pi h(-i\beta) e^{\beta k}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(-u + i\epsilon) e^{-iku} du &= \hat{g}_M(k) + i\pi h(-i\beta) - i\pi h(-i\beta) e^{-\beta k}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(-u - i\epsilon) e^{-iku} du &= \hat{g}_M(k) - i\pi h(-i\beta) + i\pi h(-i\beta) e^{-\beta k}. \end{aligned}$$

Так, например, при $n = 3$

$$\begin{aligned} g(z_1 - \widehat{z_2}) g(z_1 - z_3) &= \int_{\mathbb{R}^2} g(z_1 - z_2 + i(\epsilon_1 - \epsilon_2)) \times \\ &\quad \times g(z_1 - z_3 + i(\epsilon_1 - \epsilon_3)) e^{-ik_1 z_1 - ik_2 z_2} dz_1 dz_2 = \\ &= e^{-i(k_1 + k_2) z_3} \int_{-\infty}^{\infty} dv g(v + i\epsilon') e^{-i(k_1 + k_2)v} \times \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} du g(-u + i\epsilon'') e^{-ik_2 u} = \\ &= e^{-i(k_1 + k_2) z_3} [\hat{g}_M(k_1 + k_2) + i\pi h(-i\beta) - i\pi h(-i\beta) e^{\beta(k_1 + k_2)}] \times \\ &\quad \times [\hat{g}_M(-k_2) + i\pi h(-i\beta) - i\pi h(-i\beta) e^{-\beta k_2}]. \end{aligned}$$

Здесь мы положили $u = z_2 - z_1$, $v = z_1 - z_3$, $\epsilon' = \epsilon_1 - \epsilon_3$ и $\epsilon'' = \epsilon_1 - \epsilon_2$. Наличие общего множителя $h(-i\beta)$ в этих выражениях подсказывает записать $\hat{g}_M(k, \beta)$ в виде

$\hat{g}_M(k, \beta) = -iI(k, \beta)\beta h(-i\beta)$. Тогда в пределе $\beta \rightarrow 0$ имеем $\hat{g}_M(k, 0) = I(k, 0)$. Используя это, находим, что равенство (10) при $n = 3$ можно записать как $\sum_{j=1}^3 J_j = 0$, где, например,

$$J_1 = -\left(I(k_1 + k_2, \beta)\frac{\beta}{\pi} - 1 + e^{\beta(k_1+k_2)}\right)\left(I(-k_2, \beta)\frac{\beta}{\pi} - 1 + e^{-\beta k_2}\right) + \\ + \left(I(-k_1 - k_2, \beta)\frac{\beta}{\pi} + 1 - e^{-\beta(k_1+k_2)}\right)\left(I(k_2, \beta)\frac{\beta}{\pi} + 1 - e^{\beta k_2}\right), \quad (15)$$

что соответствует $\widehat{g(z_1 - z_2)g(z_1 - z_3)} - \widehat{g(z_2 - z_1)g(z_3 - z_1)}$ в сумме, полученной из (1), и имеются аналогичные определения для J_2 и J_3 :

$$J_2 = \left(I(-k_1 - k_2, \beta)\frac{\beta}{\pi} + 1 - e^{-\beta(k_1+k_2)}\right)\left(I(k_1, \beta)\frac{\beta}{\pi} - 1 + e^{\beta k_1}\right) - \\ - \left(I(k_1 + k_2, \beta)\frac{\beta}{\pi} - 1 + e^{\beta(k_1+k_2)}\right)\left(I(-k_1, \beta)\frac{\beta}{\pi} + 1 - e^{-\beta k_1}\right), \\ J_3 = \left(I(k_1, \beta)\frac{\beta}{\pi} - 1 + e^{\beta k_1}\right)\left(I(k_2, \beta)\frac{\beta}{\pi} - 1 + e^{\beta k_2}\right) - \\ - \left(I(-k_1, \beta)\frac{\beta}{\pi} + 1 - e^{-\beta k_1}\right)\left(I(-k_2, \beta)\frac{\beta}{\pi} + 1 - e^{-\beta k_2}\right).$$

Введем функцию $\widehat{G}(k, \beta)$ так, что в ретроспективе это окажется предусмотрительной заменой переменной:

$$I(k, \beta) = \widehat{G}(k, \beta) \frac{e^{\beta k} - 1}{k\beta}. \quad (16)$$

Эту замену переменной подсказывает внимательное изучение ряда

$$I(k, \beta) = \sum_{j=0}^{\infty} I_j(k) \beta^j,$$

возникающего из $\sum_{j=1}^3 J_j = 0$ с использованием приведенных выше выражений. Как бы то ни было, $I \rightarrow \widehat{G}(k, 0)$ при $\beta \rightarrow 0$, и нам известно (поскольку $F(x)$ четна), что $\widehat{G}(k, 0)$ является четной. Рассмотрение уравнения для $\widehat{G}(k, \beta)$ (например, разложением в ряд) показывает, что $\widehat{G}(k, \beta)$ сама является четной. Этот факт приводит к упрощениям. В случае четности $\widehat{G}(k, \beta)$ выражение для J_1 упрощается:

$$J_1 = -\frac{(e^{\beta k_1} - 1)(e^{\beta k} - 1)(1 - e^{-\beta(k_1+k_2)})}{(k_1 + k_2)k_2} (\widehat{G}(k_2, \beta) - \pi k_2) (\widehat{G}(k_1 + k_2, \beta) + \pi(k_1 + k_2)),$$

и аналогично для J_2, J_3 . Далее находим, что содержащие β экспоненциальные множители являются общими для всех J_i , и тогда равенство (10) для случая $n = 3$ можно окончательно записать как

$$(k_2 \widehat{G}(k_1, \beta) + k_1 \widehat{G}(k_2, \beta)) \widehat{G}(k_1 + k_2, \beta) - (k_1 + k_2) \widehat{G}(k_1, \beta) \widehat{G}(k_2, \beta) = \pi^2 k_1 k_2 (k_1 + k_2). \quad (17)$$

Теперь это уравнение представляет собой в точности уравнение для фурье-образа $F(z)$, полученное в работе [9] (см. уравнение (5.5) в указанной работе) при исследовании уравнения (4) при $n = 3$. Единственными решениями требуемого вида являются функция $\widehat{G}(k, \beta) \equiv \widehat{G}(k) = \widehat{F}(k) = \pi k \operatorname{cth}(\pi k/a)$ и ее предел при $a \rightarrow 0$, а именно $\pi|k|$. Отсюда

$$\hat{g}_M(k, \beta) = -i\beta h(-i\beta) \frac{e^{\beta k} - 1}{\beta k} \widehat{F}(k), \quad (18)$$

или

$$g(z, \beta) = h(-i\beta) \left(\int F(z - i\beta) dz - \int F(z) dz \right). \quad (19)$$

Легко проверить, что при

$$\widehat{F}(k) = \pi k \operatorname{cth}\left(\frac{\pi k}{a}\right), \quad F(z) = -\frac{1}{4} \frac{a^2}{\operatorname{sh}^2(az/2)} \quad (20)$$

имеем

$$\begin{aligned} g(z, \beta) &= \frac{a}{2} h(-i\beta) \left(\operatorname{cth}\left(\frac{1}{2} a(z - i\beta)\right) - \operatorname{cth}\left(\frac{1}{2} az\right) \right) = \\ &= \frac{a}{2} h(-i\beta) \frac{\operatorname{sh}(ia\beta/2)}{\operatorname{sh}(az/2) \operatorname{sh}(a(z - i\beta)/2)} \equiv h(-z) h(z - i\beta), \end{aligned} \quad (21)$$

где $h(z) = a/(2 \operatorname{sh}(az/2))$, что дает соответствующую факторизацию $F(z) = h(-z) h(z)$.

Подобным же образом (или при $a \rightarrow 0$) для $\widehat{F}(k) = \pi|k|$ и $F(z) = -1/z^2$ имеем

$$g(z, \beta) = h(-i\beta) \left(\frac{1}{z - i\beta} - \frac{1}{z} \right) = h(-i\beta) \frac{-i\beta}{(-z)(z - i\beta)} \equiv h(-z) h(z - i\beta), \quad (22)$$

где $h(z) = 1/z$ и $F(z) = h(-z) h(z)$. Обе эти факторизации определены с точностью до сдвига на экспоненту $h(z) \rightarrow h(z) e^{\alpha z}$, заданную в формуле (2).

Для случая $n \geq 4$ находим также, что тот же набор преобразований $\hat{g}_M$ редуцирует формулу (10) к исходному выражению для фурье-образа $\widehat{F}$, возникающего при исследовании уравнения (4). При нечетных n имеются только решения (19) и (22), тогда как при четных n , кроме этих решений, имеется еще и решение

$$\widehat{F}(k) = \pi k \operatorname{th}\left(\frac{\pi k}{2a}\right), \quad F(z) = -\frac{a^2 \operatorname{ch} az}{\operatorname{sh}^2 az}. \quad (23)$$

Теперь, однако, мы имеем

$$g(z, \beta) = ah(-i\beta) \left(\frac{1}{\operatorname{sh}(a(z - i\beta))} - \frac{1}{\operatorname{sh} az} \right), \quad (24)$$

а это выражение нельзя записать в виде $g(z, \beta) = h(-z) h(z - i\beta)$. Следовательно, отсюда нельзя получить решений уравнения (1).

2.2. Функции с бесконечным вещественным периодом, постоянные на бесконечности. Решения Руджинарса–Шнайдера (8) содержат дополнительную произвольную константу, которая в гиперболическом пределе соответствует функции, не обращающейся в нуль на бесконечности. Новые решения из работы [9], примером которых является решение (23), не имеют этой степени свободы: все гиперболические вырождения этих решений стремятся к нулю на бесконечности. Чтобы исследовать функции, которые не стремятся к нулю на бесконечности, нам приходится иметь дело с преобразованиями Фурье обобщенных функций. Добавление константы к $F(z)$ требует добавления аналогичной константы к $g(z, \beta)$, поскольку, например, если $F \rightarrow a^2$ при $z \rightarrow \infty$, то $g \rightarrow a^2$ при $z \rightarrow \infty$. При $n = 3$ легко проверить, что преобразование $g(z, \beta) \rightarrow g(z, \beta) + \text{const}$ оставляет уравнение (1) неизменным. Однако это не выполняется автоматически в случае $n > 3$. Мы нашли, что при $n > 3$ преобразование $g(z, \beta) \rightarrow g(z, \beta) + A$ требует дополнительных условий на g , чтобы уравнение было инвариантно относительно этого преобразования. При $n = 4$ имеется только одно дополнительное условие, которое автоматически выполняется для решения g , соответствующего решению Руджинарса–Шнайдера, однако не для решения, соответствующего новым решениям [9]. Мы полагаем, что при $n > 4$ решение Руджинарса–Шнайдера автоматически удовлетворяет всем дополнительным условиям, а даваемые теоремой 3 новые решения нет. Добавление произвольной константы A к g требует добавления $A\delta(k)$ к $\hat{g}(k, \beta)$. Для решений $\hat{g}$, которые во всех других отношениях представляют собой функции от k с “хорошим” поведением, легко получить решение для $g(z, \beta)$ и соответствующее решение для $h(z)$, когда они существуют. Например, если изменить функцию $F(z)$ в (20), добавив к ней произвольную константу, и потребовать, чтобы $F(\nu) = 0$, то получим

$$F(z) = \frac{1}{4}a^2 \left\{ \frac{1}{\text{sh}^2(a\nu/2)} - \frac{1}{\text{sh}^2(az/2)} \right\}, \quad (25)$$

так что

$$g(z, \beta) = \frac{1}{2}ah(-i\beta) \frac{\text{sh}(-ai\beta/2)}{\text{sh}(-az/2) \text{sh}(a(z - i\beta)/2)} + A. \quad (26)$$

Поскольку по определению $g(z, \beta) = h(-z)h(z - i\beta)$ и функция $h(z)$ имеет нуль при $z = -\nu$, имеем $g(\nu, \beta) = 0$, как было указано ранее. Отсюда получаем

$$A \equiv A(\beta, \nu) = -\frac{1}{2}ah(-i\beta) \frac{\text{sh}(-ai\beta/2)}{\text{sh}(-a\nu/2) \text{sh}(a(\nu - i\beta)/2)}. \quad (27)$$

Теперь можно выразить g как

$$\begin{aligned} g(z, \beta) &= \frac{1}{2}ah(-i\beta) \frac{\text{sh}(a(-z + \nu)/2)}{\text{sh}(a\nu/2) \text{sh}(-az/2)} \frac{\text{sh}(a(z + \nu - i\beta)/2)}{\text{sh}(a(z - i\beta)/2)} \frac{\text{sh}(-ai\beta/2)}{\text{sh}(a(\nu - i\beta)/2)} \equiv \\ &\equiv h(-z)h(z - i\beta), \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$h(z) = \frac{1}{2}a \frac{\text{sh}(a(z + \nu)/2)}{\text{sh}(az/2) \text{sh}(a\nu/2)} \quad (29)$$

при

$$h(-z)h(z) = \frac{a^2}{4} \frac{\operatorname{sh}(a(z-\nu)/2) \operatorname{sh}(a(z+\nu)/2)}{\operatorname{sh}^2(az/2) \operatorname{sh}^2(a\nu/2)} = \frac{a^2}{4} \left\{ \frac{1}{\operatorname{sh}^2(a\nu/2)} - \frac{1}{\operatorname{sh}^2(az/2)} \right\}, \quad (30)$$

как и требовалось. Заметим также, что при $\nu \rightarrow \infty$ получаем, что $h(z)$ стремится к решениям из п. 2.1, умноженным на экспоненциальный множитель $e^{az/2}$, и наша факторизация однозначна только с точностью до таких членов.

Аналогичное, но более простое вычисление для $F(z) = 1/\nu^2 - 1/z^2$ дает

$$g(z, \beta) = h(-i\beta) \frac{\nu(-i\beta)}{\nu - i\beta} \frac{(-z + \nu)}{(-z)\nu} \frac{z + \nu - i\beta}{(z - i\beta)\nu}, \quad (31)$$

так что $h(z) = (z + \nu)/(z\nu)$ при $h(z)h(-z) = 1/\nu^2 - 1/z^2$.

2.3. Периодические функции. Для 2π -периодических функций, которые имеют периодический набор двойных полюсов при $z = 2\pi p$, мы показали [9], что подходящим видом преобразования $\hat{g}(k, \beta)$ является $\sum_{p=-\infty}^{\infty} a_p \delta(k - p)$, что соответствует ряду Фурье $(1/2\pi) \sum_{p=-\infty}^{\infty} a_p e^{ipz}$ для $g(z, \beta)$. Уравнение, которому удовлетворяет $\hat{g}$, такое же, как и в непериодическом случае, однако оно решается только для целочисленных значений $\{k_j\}$. Таким образом, если $\hat{g}(k, \beta)$ является решением в непрерывном случае, имеем решение $a_p(\beta) = \hat{g}(p, \beta)$. Соответствующее решение $g_{2\pi}(z, \beta)$ является периодическим продолжением непрерывного случая, выраженным как

$$g_{2\pi}(z, \beta) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} g(z - 2\pi p), \quad (32)$$

где $g(z)$ – непериодическое решение, определяемое равенством (19) с конкретными выражениями (21), (22), (24), (28) и (31).

Для функции $F(z) = 1/\operatorname{sh}^2 z$ это соответствует $\wp$ -функции. Поскольку без потери общности мы положили, что для $F(z)$ выполнено $z^2 F(z) = -1$ при $z \rightarrow 0$, то можно использовать скейлинговые свойства функции $\wp(z, g_2, g_3) = a^2 \wp(az, g_2/a^4, g_3/a^6)$, для того чтобы положить $F(z) = -\wp(z)$. Добавление константы к функции F приводит к добавлению константы к g , так что

$$F \rightarrow F + B \Rightarrow \int F \rightarrow \int F + Bz + B_1 \Rightarrow g \rightarrow g - iB\beta h(-i\beta). \quad (33)$$

Отсюда следует, что соответствующее решению (21) периодическое решение есть

$$g(z, \beta) = -h(-i\beta)(\zeta(z) - \zeta(z - i\beta) + C(\beta)), \quad (34)$$

где $C(\beta)$ – произвольная функция от β , зависящая также от параметра ν и определяемая условием $g(\nu, \beta) = 0$. Следовательно,

$$\begin{aligned} g(z, \beta) &= -h(-i\beta)(\zeta(z) - \zeta(z - i\beta) - \zeta(\nu) + \zeta(\nu - i\beta)) = \\ &= h(-i\beta) \frac{\sigma(\nu)\sigma(-i\beta)}{\sigma(\nu - i\beta)} \frac{\sigma(-z + \nu)}{\sigma(-z)\sigma(\nu)} \frac{\sigma(z + \nu - i\beta)}{\sigma(z - i\beta)\sigma(\nu)} \equiv h(-z)h(z - i\beta) \end{aligned} \quad (35)$$

при $h(z) = \sigma(z) = \sigma(z + \nu)/(\sigma(z)\sigma(\nu))$.

Выражение для g в случае новых решений Байатт-Смита и Брадена [9] можно записать в виде, аналогичном (34), однако оно снова не может быть факторизовано в произведение $h(-z)h(z - i\beta)$. Например, рассмотрим функцию $F(z) = -\operatorname{sn} z \operatorname{dn} z / \operatorname{sn}^2 z$, для которой справедливо равенство $\int F(z) dz = 1/\operatorname{sn} z$. Тогда из (19) имеем

$$g(z, \beta) = h(-i\beta) \left(\frac{1}{\operatorname{sn}(z - i\beta)} - \frac{1}{\operatorname{sn} z} \right), \quad (36)$$

и разложение в ряды показывает, что это выражение нельзя записать в факторизованном виде.

2.4. Другое функциональное уравнение. Мы доказали теорему 1. Мы показали, что преобразование Фурье уравнения (1) при $k = 1$ приводит к уравнению

$$g(z, \beta) \equiv h(-i\beta)(F_1(z - i\beta) - F_1(z) + C(\beta)) = h(-z)h(z - i\beta). \quad (37)$$

Здесь $F_1(z) = \int F(z) dz$ и $C(\beta) = -F_1(\nu - i\beta) + F_1(\nu)$, поскольку мы положили, что $g(\nu, \beta) = 0$. Мы нашли, что $F(z)$ должно являться решением, даваемым теоремой 3, и что среди таких решений только те решения, которые задаются формулой (2), допускают желаемую факторизацию. В заключение покажем, что анализ уравнения (37) непосредственно приводит к этому результату.

Рассмотрим уравнение (37) как функциональное уравнение для C , h и F_1 и в соответствии с этим определим g . Решим его при подходящих условиях, которые сохраняются от исходной задачи:

$$zh(z) \rightarrow a, \quad zF_1(z) \rightarrow a, \quad g(\nu, \beta) = 0. \quad (38)$$

Последнее условие означает, что $C(\beta) = -F_1(\nu - i\beta) + F_1(\nu)$, и, следовательно, $C(0) = 0$. Заметим, что уравнение (37) инвариантно по отношению к преобразованию

$$F_1(z) \rightarrow F_1(z) + Bz + B_1, \quad C(\beta) \rightarrow C(\beta) + i\beta B.$$

Этот произвол можно фиксировать, потребовав в дальнейшем, чтобы $C(0) = C'(0) = 0$.

Чтобы решить уравнение (37), разложим его в степенной ряд по β . Первые нетривиальные члены дают уравнения, достаточные для исключения $h(z)$ и $h(-z)$ и для вывода уравнения третьего порядка на $F_1(z)$ в терминах коэффициентов C_0, C_1, b_0, b_1, b_2 в разложениях

$$C(\beta) = \sum_{j=0}^{\infty} C_j \beta^{j+2}, \quad h(-i\beta) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j (-i\beta)^{j-1}. \quad (39)$$

Получающееся уравнение третьего порядка на F_1

$$(2F_1'''(x)F_1'(x) - 3F_1''(x)^2)b_0^2 + 12C_0^2b_0^2 + 12F_1'(x)^2(b_1^2 - 2b_2b_0) + 24iC_1b_0^2F_1'(x) = 0 \quad (40)$$

можно проинтегрировать, что дает

$$F_1(z) = b_0 \zeta(z, g_2, g_3) + z b_0 \wp(\nu, g_2, g_3), \quad (41)$$

при этом C определяется как

$$C(\beta) = b_0 \zeta(\nu) - b_0 \zeta(\nu - i\beta) + i\beta b_0 \wp(\nu) \quad (42)$$

(остающиеся константы в этом выражении определяются ниже в терминах C_0 , C_1 , b_1 и b_2). Функция $h(z)$ тогда определяется уравнением

$$\frac{h'}{h} = \frac{1}{2} \frac{F_1''}{F_1'} + \frac{1}{2} b_0 \wp'(\nu) + \frac{b_1}{b_0} \quad (43)$$

с решением

$$h(z) = b_0 \frac{\sigma(z + \nu)}{\sigma(z)\sigma(\nu)} e^{\alpha z}. \quad (44)$$

Четыре константы C_0 , C_1 , b_1 , b_2 определяют четыре константы, появляющиеся в уравнениях (41), (42), а именно $\wp(\nu)$, $\xi(\nu)$, g_2 и $\wp'(\nu)$, причем g_3 задается с помощью $\wp(\nu)$, $\wp'(\nu)$ и g_2 . Разумеется, чтобы удовлетворить условиям (38), мы также потребуем, чтобы $b_0 = a$. Соотношения между двумя наборами констант имеют вид

$$\begin{aligned} C_0 &= -\frac{1}{2} b_0 \wp'(\nu), & C_1 &= i b_0 \left(\wp(\nu) - \frac{1}{6} g_2 \right), \\ b_1 &= b_0 (\zeta(\nu) + \alpha), & b_2 &= \frac{1}{2} b_0 ((\zeta(\nu) + \alpha)^2 - \wp(\nu)). \end{aligned}$$

Константа α произвольна и не влияет на решение (41), поскольку ясно, что отношение $h(-z)h(z - i\beta)/h(-i\beta)$ не зависит от α . Это является отмеченной ранее неоднозначностью факторизации.

В заключение отметим, что только решения Руджинарса–Шнайдера (2) приводят к решениям уравнения (37) и, следовательно, к решениям уравнения (1). Таким образом, теорема 1 снова доказана.

Благодарности. Мы благодарны А. М. Дейви и С. Н. М. Руджинарсу за полезные обсуждения. Один из авторов (Х.У.Б.) признателен Институту математических наук Исаака Ньютона (Кембридж, Великобритания) за поддержку во время выполнения данной работы.

Список литературы

- [1] *S. N. M. Ruijsenaars, H. Schneider.* Ann. Phys. 1986. V. 170. P. 370–405.
- [2] *F. Calogero.* Lett. Nuovo Cimento. 1975. V. 13. P. 507–511; *E. Gutkin.* J. Math. Anal. Appl. 1988. V. 133. P. 122–134; *B. Sutherland.* Phys. Rev. Lett. 1975. V. 34. P. 1083–1085.
- [3] *H. W. Braden.* J. Phys. A. 2001. V. 34. P. 2197–2204.
- [4] Calogero–Moser–Sutherland Models. CRM Series in Mathematical Physics. Eds. J. F. van Diejen, L. Vinet. New York: Springer, 2000.
- [5] *H. W. Braden, R. Sasaki.* Progr. Theor. Phys. 1997. V. 97. P. 1003–1018.
- [6] *H. W. Braden, V. M. Buchstaber.* Reviews in Mathematics and Mathematical Physics. 1997. V. 10. P. 121–166; SIAM J. Math. Anal. 1997. V. 28. P. 903–923; Integrability: The Seiberg–Witten and Whitham Equations. Eds. H. W. Braden, I. M. Krichever. Amsterdam: Gordon and Breach, 2000; *M. Bruschi, F. Calogero.* SIAM J. Math. Anal. 1990. V. 21. P. 1019–1030; *Б. М. Бухштабер, И. М. Кривчевер.* ТМФ. 1993. Т. 94. № 2. С. 200–212; *F. Calogero.* Lett. Nuovo Cimento. 1976. V. 16. P. 77–80; *B. A. Dubrovin, A. S. Fokas, P. M. Santini.* Duke Math. J. 1994. V. 76. P. 645–668; *Б. М. Гупевуц.* Вестн. МГУ, Сер. I. Матем. Мех. 1987. Т. 112. С. 73–75; УМН. 1990. Т. 45. С. 131–132; Asymptotically additive integrals of motion for particles with nonpairwise interaction in dimension one. In: Probability Contributions to Statistical Mechanics. Adv. Soviet Math. V. 20. Eds. H. W. Braden, I. M. Krichever. Providence, RI: Am. Math. Soc., 1994. P. 221–275; *Б. М. Гупевуц, О. В. Радкевич.* УМН. 1994. Т. 49. С. 207–208; *V. I. Inozemtsev.* Lett. Math. Phys. 1989. V. 17. P. 11–17; Commun. Math. Phys. 1989. V. 121. P. 629–638.
- [7] *V. M. Buchstaber, A. M. Perelomov.* Am. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 1996. V. 175. P. 15–34.
- [8] *H. W. Braden, J. G. B. Byatt-Smith.* Bull. London Math. Soc. 1999. V. 31. P. 463–470.
- [9] *J. G. B. Byatt-Smith, H. W. Braden.* Functional equations and Poincaré invariant mechanical systems. Preprint EMPG-01-12. Edinburgh: EMPG, 2001; math-ph/0110012.
- [10] *E. T. Whittaker, G. N. Watson.* A Course of Modern Analysis. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1927.
- [11] *H. W. Braden, J. G. B. Byatt-Smith.* Phys. Lett. A. 2002. V. 295. P. 208–216; nlin.SI/0110014.
- [12] *S. N. M. Ruijsenaars.* Commun. Math. Phys. 1987. V. 110. P. 191–213.