Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Билс, Д. Х. Саттинджер, Й. Шмигельски, Потоки Калоджеро–Франсуаза и периодические пиконы, *ТМФ*, 2002, том 133, номер 3, 367–385

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf404>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 13:42:42

© 2002 г. Р. Билс*, Д. Х. Саттинджер[†], Й. Шмигельски[‡]

ПОТОКИ КАЛОДЖЕРО–ФРАНСУАЗА И ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ПИКОНЫ

Полностью интегрируемые гамильтоновы системы, открытые Калоджеро и Франсуазом, содержат конечномерные редукции уравнений Камасса–Холма и Хантера–Сакстона. Показано, что соответствующая спектральная задача имеет тот же вид, что и в периодическом дискретном уравнении Камасса–Холма. Поток линеаризуется отображением Абеля на гиперэллиптическую кривую. Для двухчастичных систем, когда род кривой равен единице, получены явные решения в терминах эллиптических функций Вейерштрасса.

Ключевые слова: конечномерные гамильтонианы, эллиптические и гиперэллиптические кривые, отображение Абеля.

1. ВВЕДЕНИЕ

Калоджеро [1] ввел класс гамильтоновых систем вида

$$H(x, m) = \sum_{j,k=1}^d m_j m_k F(x_j - x_k), \quad (1.1)$$

мотивированных мультипиконной гамильтоновой системой, открытой Камасса и Холмом [2]. Он нашел, что система (1.1) полностью интегрируема, когда $F(x) = \lambda + \mu \cos \nu x$. В дальнейшем Калоджеро и Франсуаз [3] доказали полную интегрируемость в более общем случае

$$F(x) = \lambda + \mu \cos \nu x + \mu' \sin \nu |x| \quad (1.2)$$

и в предельном случае

$$F(x) = \alpha + \beta |x| + \gamma x^2 \quad (1.3)$$

(полное исследование см. в [4]).

*Yale University, New Haven, Connecticut, USA

[†]Utah State University, Logan, Utah, USA

[‡]University of Saskatchewan, Saskatoon, Saskatchewan, Canada

Мультипиконный поток Камасса–Холма в нормировке, используемой в настоящей работе, соответствует случаю уравнения (1.2), когда $\lambda = 0$, $\mu = 1/2$, $\mu' = 1/2i$ и $\nu = -2i$. В работе [5] было показано, что случай уравнения (1.3) при $\alpha = \gamma = 0$, $\beta = 1$ соответствует дискретным решениям уравнения Хантера–Сакстона [6], которое является предельным случаем уравнения Камасса–Холма. Возникает вопрос: можно ли расширить методы обратной задачи рассеяния, используемые при построении явных решений мультипиконных уравнений [7] и дискретного потока Хантера–Сакстона [5], на более общие уравнения Калоджеро–Франсуаза (КФ)?

Ответ на этот вопрос оказывается определенно утвердительным. Соответствующая спектральная задача имеет тот же вид, что и задача, возникающая для периодических мультипиконных систем. (Это так, хотя в связанной с КФ-системой непрерывной модели и нет периодической структуры.) Таким образом, обратная спектральная задача аналогична обратной задаче для уравнения Хилла в теории периодических решений уравнения КдФ или периодических решеток Тоды.

Связь между КФ-системой и конечномерными редукциями уравнения Камасса–Холма в частных производных возникает следующим образом. Уравнение Камасса–Холма лучше всего представляется системой связанных уравнений в частных производных (см. ниже (2.4) или (4.2)). Уравнение, связывающее m и u , можно решить относительно u , используя функцию Грина. Если наложить граничные условия $u \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$, функция Грина будет иметь вид $e^{-2|x|}/2$, и тогда

$$u(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|x-y|} m(y) dy.$$

Если m является дискретной мерой $\sum m_j(t) \delta(x - x_j(t))$, то эволюция Камасса–Холма эквивалентна уравнениям Гамильтона для x_j и m_j с приведенным выше гамильтонианом при $F(x) = e^{-2|x|}/2$.

В более общем случае в качестве F можно взять любое четное фундаментальное решение уравнения $(4\nu^2 - D^2)Du = Dm$ (второго из уравнений (4.2), см. ниже). Общий вид такого фундаментального решения

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{2\nu} e^{2\nu|x|} + \frac{1+\beta}{2\nu} e^{-2\nu|x|} + \gamma, \quad \nu \neq 0; \\ \frac{1}{2} |x| + \beta x^2 + \delta, \quad \nu = 0. \end{aligned}$$

Функции (1.2) и (1.3) получены с точностью до мультипликативной константы путем рескейлинга $\nu \rightarrow i\nu/2$. Поскольку мультипликативную константу можно включить в выбор масштаба времени, мы приходим в точности к семейству гамильтонианов, открытых Калоджеро и Франсуазом. Однако в том случае, когда нулевых граничных условий при $\pm\infty$ нет, соответствующая спектральная задача является более сложной, чем в мультипиконном случае.

В настоящей работе мы выводим некоторые фундаментальные свойства спектральных задач в общем случае и получаем решения для случая двух частиц, когда потоки можно получить явно в терминах эллиптических функций Вейерштрасса (точнее, в

терминах соответствующих σ -функций). Для d частиц соответствующая инвариантная кривая является гиперэллиптической кривой рода $d - 1$; полное обсуждение общего случая мы отложим до будущей работы.

Как было упомянуто выше, имеется тесная связь между КФ-потоками и мультипиконными потоками для дискретного периодического потенциала m . Периодическое уравнение Камасса–Холма для d частиц мы рассмотрим в разделе 2. Случай $d = 2$, когда соответствующая кривая является эллиптической, подробно рассматривается в разделе 3. Решения этой задачи для аналогов конечнозонных решений уравнения КдФ (т.е. для гладких периодических m) получены с использованием спектральных методов Константином и МакКином [8]. Обсуждение бильярдных решений уравнений Камасса–Холма с периодическим m дано в работах Альбера и др. [9]. В разделе 4 мы рассматриваем потоки Калоджеро–Франсуаза, а детальные решения снова приводятся для случая рода 1.

2. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ МУЛЬТИПИКОНЫ/АНТИПИКОНЫ

Линейная спектральная задача, связанная с эволюцией Камасса–Холма, имеет вид

$$L(\lambda)\varphi \equiv D^2\varphi - \varphi - \lambda m(x)\varphi = 0, \quad D = \frac{d}{dx}. \quad (2.1)$$

Оператор такого вида совместим с обобщенной эволюцией Лакса

$$-\lambda m_t = \frac{d}{dt}L(\lambda) = [L(\lambda), A(\lambda)] + 2u_x L(\lambda), \quad (2.2)$$

где

$$A(\lambda) = \left\{ \frac{1}{\lambda} - u(x) \right\} D + \frac{1}{2} u_x(x). \quad (2.3)$$

В действительности уравнение (2.2) эквивалентно условиям

$$m_t = u_x m + (um)_x, \quad 2m_x = 4u_x - u_{xxx} \quad (2.4)$$

(ср. аргументацию в работе [10]). Если мы заменим второе уравнение на $2m = 4u - u_{xx}$ и подставим в первое, то получим эволюцию Камасса–Холма

$$4u_t - u_{xxx} = 2u_x(4u - u_{xx}) + u(4u_x - u_{xxx}). \quad (2.5)$$

Мультипиконные/антипиконные решения уравнения (2.5) на прямой соответствуют дискретным мерам

$$m(x, t) = \sum_{j=1}^d m_j(t) \delta(x - x_j(t)). \quad (2.6)$$

Здесь уравнение (2.4) и спектральную задачу (2.1) следует интерпретировать в смысле обобщенных функций (ср. [7]). Соответствующая функция u имеет вид

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d m_j(t) e^{-2|x-x_j(t)|}. \quad (2.7)$$

Эволюция Камасса–Холма в этом дискретном случае эквивалентна гамильтоновой системе с переменными x_j , двойственными переменными m_j и гамильтонианом

$$H(x_1, \dots, x_d, m_1, \dots, m_d) = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^d m_j m_k e^{-2|x_j - x_k|}. \quad (2.8)$$

Подробнее эта задача и ее связи с классической задачей момента, потоками Тоды и проблемами струн рассмотрены в работах [7] и [11].

Мы рассмотрим периодический вариант предыдущей задачи. Формализм здесь тот же, однако в качестве m выбирается периодическая дискретная мера с периодом 1. Начнем с изучения спектральной задачи, в которой нет временной зависимости. Предположим, что

$$m(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^d m_j \delta(x - x_j - n), \quad (2.9)$$

где

$$x_1 < x_2 < \dots < x_d < x_1 + 1. \quad (2.10)$$

Соответствующая функция u имеет вид

$$u(x) = \sum_{j=1}^d m_j G(x - x_j), \quad G(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2|x-n|}. \quad (2.11)$$

Ниже нам потребуются следующие тождества, выполняющиеся при $0 < x < 1$:

$$\begin{aligned} G(x) + \frac{1}{2} G'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{2x-2n} = \frac{e^{2x-1}}{e - e^{-1}}, \\ G(x) - \frac{1}{2} G'(x) &= \sum_{n=-\infty}^{-1} e^{2n-2x} = \frac{e^{1-2x}}{e - e^{-1}}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Из того, что функция G является четной, следует

$$G(x) = \frac{\operatorname{ch}(2|x| - 1)}{2 \operatorname{sh} 1}, \quad |x| < 1.$$

Периодическим вариантом уравнения (2.5) снова является гамильтонова система с гамильтонианом

$$H(x_1, \dots, x_d, m_1, \dots, m_d) = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^d m_j m_k G(x_j - x_k). \quad (2.13)$$

Предположим, что φ есть решение уравнения (2.1). На каждом интервале $I_j = (x_{j-1}, x_j)$ решение φ есть линейная комбинация $a_j e^x + b_j e^{-x}$. Само уравнение (2.1) переходит в уравнение непрерывности и условие скачков

$$\begin{aligned} a_{j+1} e^{x_j} + b_{j+1} e^{-x_j} &= a_j e^{x_j} + b_j e^{-x_j}, \\ a_{j+1} e^{x_j} - b_{j+1} e^{-x_j} &= a_j e^{x_j} - b_j e^{-x_j} + \lambda m_j (a_j e^{x_j} + b_j e^{-x_j}). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Таким образом, переход имеет вид

$$\begin{bmatrix} a_{j+1} \\ b_{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\lambda}{2} m_j & \frac{\lambda}{2} m_j e^{-2x_j} \\ -\frac{\lambda}{2} m_j e^{2x_j} & 1 - \frac{\lambda}{2} m_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_j \\ b_j \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Если обозначить матрицу перехода в уравнении (2.15) через $T_j(\lambda)$, то матрица Флоке для этой задачи будет представлять собой произведение

$$\Phi(\lambda) = T_d(\lambda) T_{d-1}(\lambda) \dots T_1(\lambda). \quad (2.16)$$

По индукции следует, что

$$\Phi(\lambda) = I + \frac{\lambda}{2} \begin{bmatrix} M & M_- \\ -M_+ & -M \end{bmatrix} + O(\lambda^2), \quad (2.17)$$

где

$$M = \sum_{j=1}^d m_j, \quad M_{\pm} = \sum_{j=1}^d m_j e^{\pm 2x_j}. \quad (2.18)$$

Матричные элементы $\Phi_{ij}(\lambda)$ представляют собой полиномы степени d по λ . Отметим, что $\det T_j = 1$, так что и $\det \Phi = 1$.

Заметим, что $\varphi(x+1) \equiv \varphi(x)$, если и только если коэффициенты φ относительно базиса e^x, e^{-x} на интервале $(x_d, x_1 + 1]$ те же, что и коэффициенты относительно базиса e^{x+1}, e^{-x-1} на интервале $(x_d - 1, x_1]$. Поэтому для сравнения волновых функций φ вблизи $x = x_1$ и вблизи $x = x_1 + 1$, учитывая периодичность, сделаем перенормировку на подинтервале $(x_d - 1, x_1]$, записывая φ в виде линейной комбинации e^{x+1} и e^{-x-1} , а не e^x и e^{-x} . Соответствующая матрица перехода, связывающая коэффициенты $\varphi(x_1)$ относительно этого базиса с коэффициентами $\varphi(x_1 + 1)$ относительно базиса e^x, e^{-x} , имеет вид

$$\Psi(\lambda) = \Phi(\lambda) E = \Phi(\lambda) \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

Тогда φ периодична с периодом 1, если и только если $\Psi\varphi = \varphi$. Отметим, что $\det \Psi = 1$.

Рассмотрим теперь эволюцию под действием потока. Из уравнения (2.2) следует, что

$$(D^2 - \lambda m - 1)(\dot{\varphi} + A(\lambda)\varphi) = 0, \quad (2.20)$$

где точка обозначает дифференцирование по времени. С помощью (2.3) получаем

$$\begin{aligned} A(\lambda)(ae^x + be^{-x}) &= \frac{1}{\lambda}(ae^x - be^{-x}) - \\ &- ae^x \sum_{j=1}^d m_j \left[G(x - x_j) - \frac{1}{2}G'(x - x_j) \right] + \\ &+ be^{-x} \sum_{j=1}^d m_j \left[G(x - x_j) + \frac{1}{2}G'(x - x_j) \right]. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Из (2.12) следует, что

$$\begin{aligned} G(x - x_j) + \frac{1}{2}G'(x - x_j) &= \begin{cases} e^{2x-2x_j} \frac{e}{e-e^{-1}}, & x_d - 1 < x < x_1, \\ e^{2x-2x_j} \frac{e^{-1}}{e-e^{-1}}, & x_d < x < x_1 + 1, \end{cases} \\ G(x - x_j) - \frac{1}{2}G'(x - x_j) &= \begin{cases} e^{2x_j-2x} \frac{e^{-1}}{e-e^{-1}}, & x_d - 1 < x < x_1, \\ e^{2x_j-2x} \frac{e}{e-e^{-1}}, & x_d < x < x_1 + 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Комбинируя уравнения (2.21) и (2.22), находим, что векторное представление для $A(\lambda)\varphi$ в терминах такого представления для φ имеет вид

$$A(\lambda) : \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \rightarrow A_-(\lambda) \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda} & \frac{M_- e}{e-e^{-1}} \\ -\frac{M_+ e^{-1}}{e-e^{-1}} & -\frac{1}{\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

при $x_d - 1 < x < x_1$ и

$$A(\lambda) : \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \rightarrow A_+(\lambda) \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda} & \frac{M_- e^{-1}}{e-e^{-1}} \\ -\frac{M_+ e}{e-e^{-1}} & -\frac{1}{\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

при $x_d < x < x_1 + 1$.

Возьмем решения $\varphi_1 = e^x$ и $\varphi_2 = e^{-x}$ на интервале $x_d - 1 < x < x_1$, так что два векторных представления дают единичную матрицу на интервале $(x_d - 1, x_1)$ и матрицу $\Phi(\lambda)$ на $(x_d, x_1 + 1)$. В свете сказанного выше, на интервале $(x_d, x_1 + 1)$ уравнение (2.20) приводит к

$$\dot{\Phi}(\lambda) + A_+(\lambda)\Phi(\lambda) = \Phi(\lambda)B(\lambda),$$

тогда как на $(x_d - 1, x_1)$ (2.20) — к $A_-(\lambda) = B(\lambda)$.

Заметим, что $A_-(\lambda) = E^{-1}A_+(\lambda)E$, так что два предыдущих уравнения можно комбинировать с уравнением (2.19), что дает

$$\dot{\Psi}(\lambda) = [\Psi(\lambda), A_+(\lambda)] = \Psi(\lambda)A_+(\lambda) - A_+(\lambda)\Psi(\lambda). \quad (2.25)$$

Одно из следствий состоит в том, что многочлен

$$P(\lambda) = \text{Tr } \Psi(\lambda) = \Psi_{11}(\lambda) + \Psi_{22}(\lambda) \quad (2.26)$$

является инвариантом движения.

Запишем элементы матрицы Ψ как Ψ_{jk} и отметим, в частности, эволюцию недиагональных элементов

$$\begin{aligned}\dot{\Psi}_{12} &= -\frac{2}{\lambda}\Psi_{12} + \frac{M_- e^{-1}}{e - e^{-1}}(\Psi_{11} - \Psi_{22}), \\ \dot{\Psi}_{21} &= \frac{2}{\lambda}\Psi_{21} + \frac{M_+ e}{e - e^{-1}}(\Psi_{11} - \Psi_{22}).\end{aligned}\tag{2.27}$$

Пусть λ_{1j} и λ_{2j} , $j = 1, \dots, d-1$, – ненулевые корни Ψ_{12} и Ψ_{21} , соответственно. Вычисляя (2.27) в точках этих корней, получаем

$$\begin{aligned}\dot{\Psi}_{12}(\lambda_{1j}) &= \frac{M_- e^{-2}}{1 - e^{-2}}(\Psi_{11} - \Psi_{22}), \\ \dot{\Psi}_{21}(\lambda_{2j}) &= \frac{M_+}{1 - e^{-2}}(\Psi_{11} - \Psi_{22}).\end{aligned}\tag{2.28}$$

С учетом (2.17) и (2.19) имеем

$$\begin{aligned}\Psi_{12}(\lambda) &= \lambda \frac{M_-}{2e} \prod_{k=1}^{d-1} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{1k}}\right), \\ \Psi_{21}(\lambda) &= -\lambda \frac{M_+ e}{2} \prod_{k=1}^{d-1} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{2k}}\right).\end{aligned}\tag{2.29}$$

Вычисляя в точках корней, получаем

$$\begin{aligned}\dot{\Psi}_{12}(\lambda_{1j}) &= \frac{M_-}{2e} \prod_{k \neq j} \left(1 - \frac{\lambda_{1j}}{\lambda_{1k}}\right) \dot{\lambda}_{1j}, \\ \dot{\Psi}_{21}(\lambda_{2j}) &= -\frac{M_+ e}{2} \prod_{k \neq j} \left(1 - \frac{\lambda_{2j}}{\lambda_{2k}}\right) \dot{\lambda}_{2j}.\end{aligned}\tag{2.30}$$

Комбинируя (2.28) и (2.30), получаем

$$\begin{aligned}\frac{\dot{\lambda}_{1j}}{2} &= \frac{1}{\prod_{k \neq j} \left(1 - \frac{\lambda_{1j}}{\lambda_{1k}}\right)} \frac{\Psi_{11}(\lambda_{1j}) - \Psi_{22}(\lambda_{1j})}{e - e^{-1}}, \\ \frac{\dot{\lambda}_{2j}}{2} &= -\frac{1}{\prod_{k \neq j} \left(1 - \frac{\lambda_{2j}}{\lambda_{2k}}\right)} \frac{\Psi_{11}(\lambda_{2j}) - \Psi_{22}(\lambda_{2j})}{e - e^{-1}}.\end{aligned}\tag{2.31}$$

Заметим, что поскольку $\det \Psi = 1$, то

$$(\Psi_{11} - \Psi_{22})^2 = P(\lambda)^2 - 4\Psi_{11}\Psi_{22} = P(\lambda)^2 - 4\tag{2.32}$$

при $\Psi_{12}\Psi_{21} = 0$. Поэтому уравнения (2.31) можно записать как

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_{1j} &= \frac{2}{\prod_{k \neq j} (1 - \frac{\lambda_{1j}}{\lambda_{1k}})} \sqrt{Q(\lambda_{1j})}, \\ \dot{\lambda}_{2j} &= -\frac{2}{\prod_{k \neq j} (1 - \frac{\lambda_{2j}}{\lambda_{2k}})} \sqrt{Q(\lambda_{2j})},\end{aligned}\tag{2.33}$$

где

$$Q(\lambda) \equiv \frac{P(\lambda)^2 - 4}{(e - e^{-1})^2}.\tag{2.34}$$

Из-за множителя 2 в (2.33) (и ниже в уравнении (2.38)) в качестве новой переменной удобно взять $s = \lambda/2$. Рассмотрим гиперэллиптическую кривую

$$X = \{(s, z): z^2 = Q(2s)\},\tag{2.35}$$

имеющую род $g = d - 1$. Пусть ξ_0 — точка на X , $\omega_1, \dots, \omega_{d-1}$ — нормированный базис абелевых дифференциалов для X и $\Lambda \subset \mathbb{C}^{d-1}$ — решетка периодов. Соответствующее отображение Абеля $A: X^{d-1} \rightarrow \mathbb{C}^{d-1}/\Lambda$ переводит точку $(\xi_1, \dots, \xi_{d-1}) \in X^{d-1}$ в точку, m -я координата которой есть

$$\sum_{k=1}^{d-1} \int_{\xi_0}^{\xi_k} \omega_m.$$

ТЕОРЕМА 2.1. *Отображение Абеля для кривой (2.35) линеаризует поток корней $\{\lambda_{1j}\}$ и $\{\lambda_{2j}\}$, т.е. если $\xi_j(t) \in X$ проектируется в $s_{1j} = \lambda_{1j}(t)/2$ (соответственно $s_{2j} = \lambda_{2j}(t)/2$), $j = 1, \dots, d - 1$, то*

$$\frac{d}{dt} A(\xi(t)) = \text{const}.\tag{2.36}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дифференциалы ω_m являются линейными комбинациями голоморфных дифференциалов $\alpha_m = s^m ds / \sqrt{Q(2s)}$, $m = 0, \dots, d - 2$. Поэтому достаточно доказать аналог уравнения (2.36) для всех α_m . Согласно (2.33), правильный выбор квадратного корня дает

$$\frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{d-1} \int_{\xi_0}^{\lambda_{1j}(t)} \frac{s^m ds}{\sqrt{Q(2s)}} = \sum_{j=1}^{d-1} \frac{s_{1j}^m}{\prod_{k \neq j} (1 - \frac{s_{1j}}{s_{1k}})}.\tag{2.37}$$

Пусть

$$R_m(s) = -s^{m-1} \prod_{k=1}^{d-1} \left(1 - \frac{s}{s_{1k}}\right)^{-1}, \quad m = 0, 1, \dots, d - 2.$$

Поскольку R_m имеет порядок $O(s^{m-d})$ при $s \rightarrow \infty$, сумма его вычетов равна нулю. При $m = 1, \dots, d - 2$ сумма в правой части (2.37) является этой суммой вычетов R_m , откуда

следует, что она равна нулю. При $m = 0$ R_m имеет дополнительный вычет -2 при $s = 0$, так что сумма в правой части (2.37) равна 2. Тот же аргумент применим к s_{2j} .

Импульс $M = \sum m_j$ является постоянным; это следует или из прямого вычисления с использованием уравнений Гамильтона с гамильтонианом (2.13), или из того, что коэффициент при линейном члене в инвариантном многочлене $P(\lambda)$ есть $(e - e^{-1})M$. Вычислим теперь поток членов $M_{\pm}$. Из выражений (2.29) следует, что

$$\frac{\dot{M}_-}{M_-} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\dot{\Psi}_{12}}{\Psi_{12}}, \quad \frac{\dot{M}_+}{M_+} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\dot{\Psi}_{21}}{\Psi_{21}}. \quad (2.38)$$

Чтобы вычислить пределы, обратимся к уравнению (2.27). Отметим, что из (2.17) и (2.19) следует

$$\Psi_{11} - \Psi_{22} = e - e^{-1} + (e + e^{-1})\frac{M}{2}\lambda + O(\lambda^2).$$

Из этого выражения и (2.29) получаем

$$\begin{aligned} \frac{M_- e^{-2}}{1 - e^{-2}} \frac{\Psi_{11} - \Psi_{22}}{\Psi_{12}} &= \frac{2}{\lambda} \left\{ \frac{1 + (e + e^{-1})(e - e^{-1})^{-1} M \frac{\lambda}{2} + \dots}{1 - \lambda \sum \lambda_{ij}^{-1} + \dots} \right\}, \\ \frac{M_+}{1 - e^{-2}} \frac{\Psi_{11} - \Psi_{22}}{\Psi_{21}} &= -\frac{2}{\lambda} \left\{ \frac{1 + (e + e^{-1})(e - e^{-1})^{-1} M \frac{\lambda}{2} + \dots}{1 - \lambda \sum \lambda_{2j}^{-1} + \dots} \right\}. \end{aligned}$$

Комбинируя эти уравнения с (2.27), получаем, что (2.38) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\dot{M}_-}{M_-} &= \frac{e + e^{-1}}{e - e^{-1}} M + 2 \sum_{j=1}^{d-1} \frac{1}{\lambda_{1j}}, \\ \frac{\dot{M}_+}{M_+} &= -\frac{e + e^{-1}}{e - e^{-1}} M - 2 \sum_{j=1}^{d-1} \frac{1}{\lambda_{2j}}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

3. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ДВУХ ЧАСТИЦ

В этом разделе мы рассмотрим периодическое уравнение Камасса–Холма в случае $d = 2$. Гамильтониан имеет вид

$$\begin{aligned} H(x_1, x_2, m_2, m_2) &= \frac{1}{2} m_1^2 G(0) + m_1 m_2 G(x_2 - x_1) + \frac{1}{2} m_2^2 G(0) = \\ &= \frac{1}{2} M^2 G(0) + m_1 m_2 [G(x_1 - x_2) - G(0)]. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Поскольку H и M являются константами движения, произведение $m_1 m_2 [G(x_1 - x_2) - G(0)]$ также является константой. Поэтому m_j не меняет знака нигде, кроме сингулярности, где $x_2 - x_1$ с необходимостью равно нулю или единице, $m_1 m_2$ становится сингулярным, а оба m_j меняют знак. Более того, если m_j имеют одинаковые знаки, то в некоторый момент выполняется $|m_j| \leq |M|$, так что сингулярности нет и расстояние

$x_2 - x_1$ не может лежать в окрестности значений 0 и 1. Случай $m_1, m_2 > 0$ является случаем пикон/пикон, $m_1, m_2 < 0$ — случаем антипикон/антипикон, а $m_1 m_2 < 0$ — случаем пикон/антипикон. Основной результат в каждом из этих трех случаев одинаков, хотя и имеется важное различие между первыми двумя и третьим.

Пусть $y_j = e^{2x_j}$. Тогда

$$M = m_1 + m_2, \quad M_+ = m_1 y_1 + m_2 y_2, \quad M_- = \frac{m_1}{y_1} + \frac{m_2}{y_2}. \quad (3.2)$$

Матрица рассеяния Φ имеет вид

$$\Phi(\lambda) = I + \frac{\lambda}{2} \begin{bmatrix} M & M_- \\ -M_+ & -M \end{bmatrix} + \frac{\lambda^2 m_1 m_2}{4} \begin{bmatrix} 1 - \frac{y_1}{y_2} & \frac{1}{y_1} - \frac{1}{y_2} \\ y_1 - y_2 & 1 - \frac{y_2}{y_1} \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Обозначим диагональные коэффициенты при $\lambda^2/4$ через N_1, N_2 :

$$N_1 = m_1 m_2 \left(1 - \frac{y_1}{y_2}\right), \quad N_2 = m_1 m_2 \left(1 - \frac{y_2}{y_1}\right). \quad (3.4)$$

Тогда инвариантный многочлен $\text{Tr } \Psi$ имеет вид

$$P(\lambda) = e + e^{-1} + M(e - e^{-1})\frac{\lambda}{2} + (N_1 e + N_2 e^{-1})\frac{\lambda^2}{4}. \quad (3.5)$$

Пусть Q — многочлен (2.34). В этом случае он имеет четвертую степень и кривая X является эллиптической. Прямое вычисление показывает, что корни Q являются вещественными и различными. (Исключение составляет случай, когда $x_2 - x_1 = 1/2$ и $m_1 = m_2$, однако это просто случай $d = 1$ с периодом $1/2$.)

ТЕОРЕМА 3.1. *Положим $d = 2$. Можно выбрать $x_1(t)$ и $x_2(t)$ так, что $0 < x_2(t) - x_1(t) < 1$,*

$$m(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \{m_1(t) \delta(x - x_1(t) - n) + m_2(t) \delta(x - x_2(t) - n)\},$$

где $m_1(t)$, $m_2(t)$, $x_2(t) - x_1(t)$ и $x_1(t) + x_2(t) - Kt$ периодичны с периодом $2\omega_1$, а K — константа. Каждую из этих функций можно выразить в терминах эллиптических функций Вейерштрасса с периодами $2\omega_1$ и $2\omega_2$, задаваемыми уравнениями (3.16) (см. ниже).

Доказательство состоит из двух частей: анализа эволюции корней Ψ_{12} и Ψ_{21} и $M_{\pm}$ и восстановления m_j и x_j по этим данным. Начнем с задачи восстановления.

Пусть N обозначает коэффициент при $\lambda^2/4$ в инвариантном многочлене $\text{Tr } \Psi$. Тогда

$$eN_1 + e^{-1}N_2 = N, \quad N_1 + N_2 = M^2 - M_+M_-. \quad (3.6)$$

Эти уравнения позволяют выразить N_j в терминах инвариантов N и M и произведения M_+M_- . Чтобы решить обратную задачу, необходимо по крайней мере еще одно выражение, эволюция которого может быть решена явно. Заметим, что как Ψ_{12} , так и Ψ_{21} имеют по одному ненулевому корню; обозначим их соответственно λ_1 и λ_2 . Из (3.3) следует, что

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -\frac{2M_-y_1y_2}{m_1m_2(y_2-y_1)} = -2\frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1m_2(y_2-y_1)}, \\ \lambda_2 &= -\frac{2M_+}{m_1m_2(y_2-y_1)} = -2\frac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1m_2(y_2-y_1)}.\end{aligned}\quad (3.7)$$

ЛЕММА 3.1. *Величины m_j и $y_j = e^{2x_j}$, $j = 1, 2$, можно выразить в терминах инвариантов M и N и величин M_+ , M_- , λ_1 и λ_2 следующим образом:*

$$y_1 = -\frac{\lambda_1}{2} \frac{N_1}{M_-}; \quad y_2 = -\frac{2}{\lambda_2} \frac{M_+}{N_1}; \quad (3.8)$$

$$m_1 = \frac{M - M_-y_2}{1 + N_2N_1^{-1}}; \quad m_2 = \frac{M - M_-y_1}{1 + N_1N_2^{-1}}. \quad (3.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнения (3.8) следуют из уравнений (3.7). Из (3.4) вытекает, что

$$\frac{y_1}{y_2} = -\frac{N_1}{N_2}. \quad (3.10)$$

Комбинируя это выражение с уравнением (3.2), получаем уравнения (3.9). Из (3.7) следует, что

$$y_1y_2 = \frac{\lambda_1M_+}{\lambda_2M_-}. \quad (3.11)$$

Проанализируем теперь эволюцию λ_j и $M_{\pm}$. Как мы отмечали выше, вычисление показывает, что инвариантный многочлен (3.5) имеет четыре различных вещественных корня $r_1 < r_2 < r_3 < r_4$. Эти корни отрицательны в случае пикон/пикон и положительны в случае антипикон/антипикон, а в случае пикон/антипикон два являются отрицательными, а два положительными. Полином четвертой степени Q положителен в интервале (r_2, r_3) , и его внимательное рассмотрение показывает, что в каждом случае λ_1 и λ_2 лежат в замыкании этого интервала.

При $d = 2$ как Φ_{12} , так и Φ_{21} имеют только по одному ненулевому корню, которые мы обозначим соответственно как λ_1 и λ_2 . Произведения в уравнениях (2.31) становятся пустыми, и уравнения упрощаются к виду

$$\dot{\lambda}_1 = 2\sqrt{Q(\lambda_1)}, \quad \dot{\lambda}_2 = -2\sqrt{Q(\lambda_2)} \quad (3.12)$$

при подходящем выборе квадратного корня. Отсюда следует, что λ_j являются периодическими функциями вещественного t и в каждом периоде имеется момент времени, когда $\lambda_1 = \lambda_2$. После трансляции вдоль x и t мы можем считать, что

$$\lambda_1(0) = \lambda_2(0), \quad x_1(0) + x_2(0) = 0. \quad (3.13)$$

Согласно (3.7)

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{2}{m_1} - \frac{2}{m_2}.$$

Равенство верно, только когда $m_1 = m_2$ или m_1 и m_2 сингулярны. Первое не может иметь места, если $m_1 m_2 < 0$, а последнее – если $m_1 m_2 > 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} m_1(0) = m_2(0), \quad \text{если } m_1 m_2 > 0, \\ m_1, m_2 \text{ сингулярны при } t = 0, \quad \text{если } m_1 m_2 < 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Уравнения (2.39) показывают, что мы также желаем работать с двойственными величинами $\mu_j = 2/\lambda_j$. Из уравнений (3.12) следует, что

$$\dot{\mu}_1 = -\sqrt{\tilde{Q}(\mu_1)}, \quad \dot{\mu}_2 = \sqrt{\tilde{Q}(\mu_2)}, \quad (3.15)$$

где $\tilde{Q}$ – полином четвертой степени

$$\tilde{Q}(\mu) = \mu^4 Q\left(\frac{2}{\mu}\right).$$

Можно показать, еще раз используя уравнения Гамильтона, что вблизи $t = 0$ подходящим выбором в каждом из этих уравнений является положительный квадратный корень.

Пусть $s_1 < s_2 < s_3 < s_4$ – корни $\tilde{Q}$. Тогда $\tilde{Q}$ является положительным на интервале (s_2, s_3) и отрицательным на интервалах (s_1, s_2) и (s_3, s_4) . Эллиптическая кривая $\tilde{X} = \{(z, \mu): z^2 = \tilde{Q}(\mu)\}$ имеет периоды

$$2\omega_1 = 2 \int_{s_2}^{s_3} \frac{ds}{\sqrt{\tilde{Q}(s)}}, \quad 2\omega_2 = 2i \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{\sqrt{-\tilde{Q}(s)}}. \quad (3.16)$$

(Замена переменных интегрирования показывает, что они являются также периодами эллиптической кривой (2.35).) Выбирая точку $p_0 \in \mathbb{C}$, проинтегрируем (3.15) и получим

$$-t - a = \int_{p_0}^{\mu_1(t)} \frac{ds}{\sqrt{\tilde{Q}(s)}}, \quad t - a = \int_{p_0}^{\mu_2(t)} \frac{ds}{\sqrt{\tilde{Q}(s)}}, \quad (3.17)$$

где

$$a = \int_{\mu_1(0)}^{p_0} \frac{ds}{\sqrt{\tilde{Q}(s)}}. \quad (3.18)$$

Можно восстановить μ_j в терминах функции Вейерштрасса $\wp$ с периодами $2\omega_j$, полагая, что p_0 в уравнении (3.17) является корнем $\tilde{Q}$, а именно $p_0 = s_2$. Действительно, при таком выборе (3.17) можно представить как

$$\mu_1(t) = s_2 + \frac{c}{\wp(t+a) - \wp(b)}, \quad (3.19)$$

$$\mu_2(t) = s_2 + \frac{c}{\wp(t-a) - \wp(b)}, \quad (3.20)$$

где $\wp(b) = \tilde{Q}''(s_2)/24$, $c = \tilde{Q}'(s_2)/4$ (см. [12], с. 439). (В уравнении (3.19) мы использовали тот факт, что функция $\wp$ является четной.)

Напомним здесь, что $\wp$ связана с функциями Вейерштрасса σ и ζ соотношениями

$$\wp = -\zeta', \quad \zeta = \frac{\sigma'}{\sigma}. \quad (3.21)$$

Функция ζ имеет простой полюс с вычетом 1 в каждой точке периодической решетки $\Lambda = \{2m\omega_1 + 2n\omega_2\}$ и не имеет других полюсов. Следовательно, $\wp$ имеет двойные полюсы на Λ и не имеет других полюсов. Поскольку $\wp$ является дважды периодической, разности $\delta_j = \zeta(z + 2\omega_j) - \zeta(z)$, $j = 1, 2$, постоянны.

Имеются два полюса для каждого из выражений (3.19) и (3.20) в каждом параллелограмме периодов. Поскольку $\wp$ является четной, полюсы появляются при $t = \pm a \pm b$ по модулю Λ . Согласно (3.19) и (3.20) имеем

$$b = \int_{s_2}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{\tilde{Q}(s)}}. \quad (3.22)$$

Беря интеграл вдоль вещественной оси, находим $b - \bar{b} = \pm 2\omega_2$. Отсюда следует, что функция $\wp(s \pm b)$ является вещественной для вещественного s :

$$\overline{\wp(s + b)} = \wp(s + \bar{b}) = \wp(s + b \mp 2\omega_2) = \wp(s + b). \quad (3.23)$$

Вычислим вычеты выражений (3.19) и (3.20) следующим образом. Заметим, что $\tilde{Q}$ имеет старший коэффициент 1, так что из (3.17) и (3.22) следует

$$t - a - b = - \int_{\mu_2(t)}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{\tilde{Q}(s)}} \sim - \frac{1}{\mu_2(t)} \quad (3.24)$$

при $\mu_2(t) \rightarrow +\infty$. Отсюда видно, что μ_2 имеет вычет -1 при $t = a+b$, так что $c/\wp'(b) = 1$. Вычетом при $t = a - b$ является $c/\wp'(-b) = -c/\wp'(b) = 1$. Следовательно, μ_1 имеет вычет 1 при $-t = a + b$ и вычет -1 при $-t = a - b$. Функции μ_j являются дважды периодическими. Поэтому с точностью до аддитивных констант они равны соответствующим линейным комбинациям $\mp [\zeta(\pm t - a - b) - \zeta(\pm t - a + b)]$.

Аддитивные константы можно вычислить, полагая $t = \pm a$. Поскольку ζ является нечетной, результат можно записать как

$$\begin{aligned} \mu_1(t) &= s_2 + \zeta(t + a + b) - \zeta(t + a - b) - 2\zeta(b), \\ \mu_2(t) &= s_2 + \zeta(t - a + b) - \zeta(t - a - b) - 2\zeta(b). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Эти функции имеют период $2\omega_1$ как функции вещественного t .

Поскольку ζ есть логарифмическая производная функции Вейерштрасса σ , можно проинтегрировать (2.39), используя периодичность μ_j :

$$\begin{aligned} M_- &= M_-(0) e^{-\kappa t} \frac{\sigma(t + a + b)\sigma(a - b)}{\sigma(t + a - b)\sigma(a + b)}, \\ M_+ &= M_+(0) e^{\kappa t} \frac{\sigma(t - a - b)\sigma(-a + b)}{\sigma(t - a + b)\sigma(-a - b)}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

где $\kappa = 2\zeta(b) - s_2 - M \operatorname{cth} 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1. Из (3.26) следует, что M_-M_+ имеет вещественный период $2\omega_1$. Тогда из уравнений (3.6) и (3.10) следует, что N_1 , N_2 и $x_2 - x_1 = \ln(y_2/y_1)/2$ имеют вещественный период $2\omega_1$. Из уравнений (3.7) получаем

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\frac{y_2}{y_1} + \frac{m_2}{m_1}}{1 + (\frac{m_2}{m_1})(\frac{y_2}{y_1})}.$$

Отсюда следует, что m_2/m_1 имеет вещественный период $2\omega_1$. Поскольку $m_1 + m_2 = M$ постоянна, то и m_1 , и m_2 имеют вещественный период $2\omega_1$. Наконец, производная

$$\dot{x}_1 + \dot{x}_2 = M\{G(0) + G(x_2 - x_1)\}$$

имеет вещественный период $2\omega_1$ и, следовательно, выражение

$$x_1 + x_2 - t \int_0^{2\omega_1} M\{G(0) + G(x_2(s) - x_1(s))\} ds$$

также имеет вещественный период $2\omega_1$. Это завершает доказательство теоремы 3.1.

Как было отмечено выше, корни λ_1 и λ_2 заключены в замкнутом интервале $[r_2, r_3]$, конечными точками которого являются два средних корня Q . В случаях пикон/пикон и антипикон/антипикон $m_1 m_2 > 0$ и все корни Q являются, соответственно, отрицательными или положительными, так что λ_j остается вне нуля. Поэтому μ_j и $M_{\pm}$ являются регулярными и не обращаются в нуль. Это подтверждает упомянутое в начале данного раздела наблюдение, что в этих случаях решение является регулярным, а разность $(x_2 - x_1)$ не может лежать в окрестности нуля. Наоборот, в случае пикон/антипикон $m_1 m_2 < 0$, а μ_j имеют простые полюсы при $t = 0$. В этом случае m_j имеют простые полюсы при $t = 0$, тогда как $x_2 - x_1$ имеет двойной нуль при $t = 0$. Последнее компенсирует первое, и отсюда следует, что решение

$$u(x, t) = m_1(t)G(x - x_1(t)) + m_2(t)G(x - x_2(t))$$

равномерно непрерывно по x и t ; аргументы здесь те же, что и в работе [7].

4. ПОТОКИ КАЛОДЖЕРО–ФРАНСУАЗА

Как было отмечено во введении, Калоджеро и Франсуаз [1], [3] ввели семейство полностью интегрируемых конечномерных гамильтоновых систем с гамильтонианами в виде, обобщающем (2.8) и (3.1). Мы свяжем с этими потоками спектральную задачу, которая является обобщением уравнения (2.1). Фиксируем комплексный параметр $\nu \neq 0$ и рассмотрим потоки оператора

$$L(\lambda, \nu) = D^2 - \nu^2 - \lambda m(x), \quad (4.1)$$

которые снова являются совместными с обобщенной эволюцией Лакса (2.2), где $A(\lambda)$ дается уравнением (2.3). Здесь (2.2) эквивалентно условиям

$$m_t = u_x m + (um)_x, \quad 2m_x = 4\nu^2 u_x - u_{xxx}. \quad (4.2)$$

Интегрирование второго из уравнений (2.4) дает эволюцию (4.2).

Предположим, что m является дискретной мерой вида (2.6), $x_1 < \dots < x_d$. Любое четное фундаментальное решение уравнения $(-D^3 + 4\nu^2 D)m = 2Du$ имеет вид

$$F(x) = \frac{\beta_+}{2\nu} e^{2\nu|x|} + \frac{\beta_-}{2\nu} e^{-2\nu|x|} + \gamma, \quad (4.3)$$

где β_- , β_+ и γ являются константами и

$$\beta_- - \beta_+ = 1. \quad (4.4)$$

Уравнение (4.2) для u вновь эквивалентно уравнению Гамильтона с гамильтонианом

$$H(x, m) = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^d m_j m_k F(x_j - x_k). \quad (4.5)$$

Общую задачу можно редуцировать к случаю $\gamma = 0$ следующим образом. Легко видеть, что $M = \sum m_j$ является константой движения. Временно обозначим зависимость от γ с помощью нижнего индекса. Заметим, что

$$H_\gamma(x, m) = H_0(x, m) + \frac{1}{2} M^2 \gamma.$$

Отсюда следует, что если $\{x_j(t), m_j(t)\}$ есть решение уравнений Гамильтона для H_0 , то $\{x_j(t) + \gamma M t, m_j(t)\}$ есть решение для H_γ . Предположим, начиная с данного момента, что $\gamma = 0$. Возьмем u в виде, аналогичном (2.7):

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^d m_j(t) F(x - x_j(t)). \quad (4.6)$$

По аналогии с периодической задачей, рассмотренной в предыдущем разделе, положим

$$M_\pm = \sum_{j=1}^d e^{\pm 2\nu x_j} m_j. \quad (4.7)$$

Тогда u , заданное уравнением (4.6), имеет точные асимптотики:

$$u(x) = \begin{cases} \frac{\beta_-}{2\nu} M_- e^{2\nu x} + \frac{\beta_+}{2\nu} M_+ e^{-2\nu x}, & x < x_1, \\ \frac{\beta_+}{2\nu} M_- e^{2\nu x} + \frac{\beta_-}{2\nu} M_+ e^{-2\nu x}, & x > x_d. \end{cases} \quad (4.8)$$

Заметим, что M снова является константой относительно действия потока.

Спектральную задачу

$$D^2\varphi - \nu^2\varphi = \lambda\varphi t \quad (4.9)$$

можно проанализировать так же, как и в описанном выше периодическом случае. Положим $x_0 = -\infty$, $x_{d+1} = +\infty$. На каждом интервале (x_j, x_{j+1}) решение уравнения (4.9) является линейной комбинацией $a_j e^{\nu x} + b_j e^{-\nu x}$. Уравнение (2.1) преобразуется в

$$\begin{aligned} a_{j+1} e^{\nu x_j} + b_{j+1} e^{-\nu x_j} &= a_j e^{\nu x_j} + b_j e^{-\nu x_j}, \\ a_{j+1} e^{\nu x_j} - b_{j+1} e^{-\nu x_j} &= a_j e^{\nu x_j} - b_j e^{-\nu x_j} + \lambda m_j (a_j e^{\nu x_j} - b_j e^{-\nu x_j}); \end{aligned} \quad (4.10)$$

переход задается как

$$\begin{bmatrix} a_{j+1} \\ b_{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\lambda}{2\nu} m_j & \frac{\lambda}{2\nu} m_j e^{-2\nu x_j} \\ -\frac{\lambda}{2\nu} m_j e^{2\nu x_j} & 1 - \frac{\lambda}{2\nu} m_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_j \\ b_j \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Обозначив матрицу перехода в (4.11) через $T_j(\lambda)$, мы видим, что матрица рассеяния для этой задачи имеет вид произведения

$$\Phi(\lambda) = T_d(\lambda) T_{d-1}(\lambda) \dots T_1(\lambda) = I + \frac{\lambda}{2\nu} \begin{bmatrix} M & M_- \\ -M_+ & -M \end{bmatrix} + O(\lambda^2). \quad (4.12)$$

Элементы $\Phi_{ij}(\lambda)$ снова являются многочленами степени d по λ , а определитель Φ равен 1.

Рассмотрим теперь эволюцию под действием потока. Из уравнения (2.2) вытекает уравнение (2.20). Из (4.8) и аргументов, подобных использованным в разделе 2, следует, что векторное представление $A(\lambda)\varphi$ имеет вид

$$A(\lambda): \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \rightarrow A_-(\lambda) \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\nu}{\lambda} & \beta_- M_- \\ -\beta_+ M_+ & -\frac{\nu}{\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \quad x < x_1, \quad (4.13)$$

$$A(\lambda): \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \rightarrow A_+(\lambda) \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\nu}{\lambda} & \beta_+ M_- \\ -\beta_- M_+ & -\frac{\nu}{\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \quad x > x_d. \quad (4.14)$$

Возьмем решения $\varphi_1 = e^{\nu x}$, $\varphi_2 = e^{-\nu x}$ при $x < x_1$, так что два векторных представления дают единичную матрицу при $x < x_1$ и матрицу $\Phi(\lambda)$ при $x > x_d$. Как и ранее, мы получаем

$$\dot{\Phi}(\lambda) + A_+(\lambda)\Phi(\lambda) = \Phi(\lambda)A_-(\lambda).$$

Если $\beta_- \beta_+ = 0$, то задача упрощается и ее можно рассматривать так же, как соответствующую задачу Камасса–Холма [7]. Предположим теперь, что $\beta_- \beta_+ \neq 0$. Заметим, что

$$A_-(\lambda) = B^{-1} A_+(\lambda) B, \quad B = \begin{bmatrix} \beta_- & 0 \\ 0 & \beta_+ \end{bmatrix},$$

и, полагая $\Psi = \Phi B$, получим

$$\dot{\Psi}(\lambda) = [\Psi(\lambda), A(\lambda)] = \Psi(\lambda)A_+(\lambda) - A_+(\lambda)\Psi(\lambda). \quad (4.15)$$

Следовательно, многочлен

$$P(\lambda) = \Psi_{11}(\lambda) + \Psi_{22}(\lambda) = \beta_- \Phi_{11}(\lambda) + \beta_+ \Phi_{22}(\lambda) \quad (4.16)$$

является инвариантом движения. Эволюция внедиагональных элементов дается уравнениями

$$\dot{\Psi}_{12} = -\frac{2\nu}{\lambda} \Psi_{12} + \beta_+ M_- (\Psi_{11} - \Psi_{22}), \quad (4.17)$$

$$\dot{\Psi}_{21} = \frac{2\nu}{\lambda} \Psi_{21} + \beta_- M_+ (\Psi_{11} - \Psi_{22}). \quad (4.18)$$

Это показывает, что задачу можно проанализировать точно так же, как и периодическую задачу Камасса–Холма: отображение Абеля для соответствующей гиперэллиптической кривой линеаризует эволюцию корней Φ_{12} и Φ_{21} .

При $d = 2$ решения можно выразить в терминах функций Вейерштрасса, как и в разделе 3. В этом случае матрица перехода Φ имеет вид (2.17), где $\lambda/2$ заменяется на $\lambda/2\nu$ и $y_j = e^{2\nu x_j}$.

Динамическое поведение критически зависит от ν и β_- , а также от начальных условий. Мы обсудим здесь задачу при $d = 2$, $m_1 m_2 > 0$ в двух специальных случаях:

$$\nu = 1, \quad \beta_- = -\beta_+ = \frac{1}{2}: \quad F(x) = -\frac{1}{2} \operatorname{sh}(2|x|), \quad (4.19)$$

$$\nu = i, \quad \beta_- = -\beta_+ = \frac{1}{2}: \quad F(x) = -\frac{1}{2} \sin(2|x|). \quad (4.20)$$

ТЕОРЕМА 4.1. *При предположениях (4.19) система Калоджеро–Франсуаза при $d = 2$ и $m_1 m_2 > 0$ развивает сингулярность за конечное время как в положительном, так и в отрицательном временных направлениях.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При предположениях (4.19) инвариантный многочлен имеет вид

$$P(\lambda) = M \frac{\lambda}{2} + m_1 m_2 \operatorname{sh} 2(x_2 - x_1) \frac{\lambda^2}{4}.$$

Здесь $-4\beta_- \beta_+ = 1$, так что соответствующий полином четвертого порядка

$$Q(\lambda) = P(\lambda)^2 + 1$$

положителен на вещественной оси. Корни λ_1 и λ_2 матричных элементов Φ_{12} и Φ_{21} даются уравнениями (3.7) (где $y_j = e^{2x_j}$), так что они отрицательны, если m_j положительны, и положительны, если m_j отрицательны. Из эволюционных уравнений (3.12) следует, что каждый корень сходится к нулю и к бесконечности за конечное время как в положительном, так и в отрицательном временных направлениях. Из уравнений (3.7) следует, что

$$\frac{\lambda_1 \lambda_2}{4} = \frac{M^2}{2(m_1 m_2)^2 (\operatorname{ch} 2(x_2 - x_1) - 1)} + \frac{1}{m_1 m_2} > \frac{1}{m_1 m_2} \geq \frac{4}{M^2}.$$

Поэтому, если одно из λ_j сходится к 0, то другое сходится к $\pm\infty$. С другой стороны,

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{m_1 e^{2(x_2 - x_1)} + m_2}{m_2 e^{2(x_2 - x_1)} + m_1}.$$

Отсюда следует, что когда отношение сходится к 0 или к ∞ , разность $(x_2 - x_1)$ сходится к $+\infty$ за конечное время как в положительном, так и в отрицательном временных направлениях.

ТЕОРЕМА 4.2. *При предположениях (4.20), $d = 2$ и $m_1 m_2 > 0$ функции $m_1(t)$, $m_2(t)$, $x_2(t) - x_1(t)$ и $x_1(t) + x_2(t) - Kt$ с некоторой константой K являются периодическими с периодом, равным вещественному периоду полинома четвертой степени $-\tilde{Q}(\mu) = \mu^4[P(2/\mu)^2 + 1]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При предположениях (4.20) имеем

$$P(\lambda) = -iM \frac{\lambda}{2} - im_1 m_2 \sin 2(x_2 - x_1) \frac{\lambda^2}{4}.$$

Коэффициенты многочлена P постоянны; $m_1 m_2 \leq M^2/4$. Отсюда следует, что множитель $\sin 2(x_2 - x_1)$ и, следовательно, разность $(x_2 - x_1)$ не может лежать в окрестности нуля. Корни многочлена $P \pm i$ вещественны и различны, так что полином четвертой степени Q имеет четыре различных вещественных корня.

С другой стороны, нули функции $\Phi_{12}\Phi_{21}$ теперь комплексны, и из уравнения (3.7) (соответствующим образом модифицированного для этого случая путем замены множителя 2 на $2\nu = 2i$) следует, что

$$\operatorname{Re} \lambda_1 = \operatorname{Re} \lambda_2 = \frac{M \cos(x_2 - x_1)}{m_1 m_2 \sin(x_1 - x_2)}.$$

Поскольку P является инвариантным многочленом под действием потока, $m_1 m_2 \times \sin 2(x_2 - x_1)$ есть константа движения; а поскольку $2 \sin 2(x_2 - x_1) = \sin(x_2 - x_1) \times \cos(x_2 - x_1) \neq 0$, получаем, что ни $\sin(x_2 - x_1)$, ни $\cos(x_2 - x_1)$ не обращаются в нуль. Соответственно, ни одно из λ_j не обращается в нуль, и их двойственные элементы ограничены периодической функцией t . Величины x_j , m_j несингулярны и имеют те же свойства периодичности, что и в теореме 3.1.

Благодарности. Авторы благодарны Ф. Калоджеро за комментарии по поводу данной работы. Исследования Р. Билса поддержаны NSF (грант DMS-9800605), Д. Х. Саттинджера – NSF (грант DMS-9996396), Й. Шмигельски – NSERC Канады.

Список литературы

- [1] *F. Calogero*. Phys. Lett. A. 1995. V. 201. P. 306–310.
- [2] *R. Camassa, D. D. Holm*. Phys. Rev. Lett. 1993. V. 71. P. 1661–1664; *R. Camassa, D. D. Holm, J. M. Hyman*. Adv. Appl. Mech. 1994. V. 31. P. 1–33.
- [3] *F. Calogero, J. P. Francoise*. J. Math. Phys. 1996. V. 37. P. 2863–2871.
- [4] *F. Calogero*. Classical Many-Body Problems Amenable to Exact Treatments. Lect. Notes Phys. V. 66. New York: Springer, 2001.
- [5] *R. Beals, D. H. Sattinger, J. Szmigielski*. Appl. Anal. 2001. V. 78. P. 255–269.
- [6] *J. K. Hunter, R. Saxton*. SIAM J. Appl. Math. 1991. V. 51. P. 1498–1521; *J. K. Hunter, Y. Zheng*. Physica D. 1994. V. 79. P. 361–386.
- [7] *R. Beals, D. H. Sattinger, J. Szmigielski*. Adv. Math. 2000. V. 154. P. 229–257.
- [8] *A. Constantin, H. P. McKean*. Commun. Pure Appl. Math. 1999. V. 52. P. 949–982.
- [9] *M. S. Alber, R. Camassa, Y. Fedorov, D. D. Holm, J. E. Marsden*. Phys. Lett. A. 1999. V. 264. P. 171–178; *M. S. Alber, R. Camassa, M. E. Gekhtman*. On billiard weak solutions of nonlinear PDE's and Toda flows. In: SIDE III-Symmetries and Integrability of Difference Equations. CRM Proc. Lecture Notes. V. 25. Eds. D. Levi, O. Ragnisco. Providence, RI: AMS, 2000. P. 1–11.
- [10] *R. Beals, D. H. Sattinger, J. Szmigielski*. Adv. Math. 1998. V. 140. P. 190–206.
- [11] *R. Beals, D. H. Sattinger, J. Szmigielski*. Commun. Pure Appl. Math. 2001. V. 54. P. 91–106; *O. Ragnisco, M. Bruschi*. Physica A. 1996. V. 228. P. 150–159.
- [12] *Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон*. Курс современного анализа. В 2-х частях. М.: Физматгиз, 1962.