Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Босколо, С. К. Турицын, В. Ю. Новокшенов, Й. Нийхоф, Самоподобные параболические оптические уединенные волны, *ТМФ*, 2002, том 133, номер 3, 386–397

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf405>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 17:50:52

© 2002 г.

С. Босколо*, С. К. Турицын*,
В. Ю. Новокшенов†, Й. Х. Б. Нийхоф‡

САМОПОДОБНЫЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ ОПТИЧЕСКИЕ УЕДИНЕННЫЕ ВОЛНЫ

Исследованы решения нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) с усилением, которое описывает оптический импульс, распространяющийся в усиливающей среде. Построено квазиклассическое самоподобное решение с параболической временной вариацией, соответствующее энергосодержащему ядру асимптотически распространяющегося импульса в усиливающей среде. Самоподобное ядро сшивается с помощью функций Пенлеве с решением линеаризованного уравнения, которое соответствует низкоамплитудным хвостам импульса. Оказывается, что аналитическое решение в точности воспроизводит численно полученное решение НУШ.

Ключевые слова: нелинейная оптика, самоподобие, генерация параболических импульсов.

1. ВВЕДЕНИЕ

Самоподобие является фундаментальным физическим свойством, которое широко исследовалось во многих областях физики [1]. В оптике методы самоподобия были недавно применены к изучению распространения импульса в волоконных усилителях с нормальной дисперсией. Было показано, что параболические импульсы с квадратичной по времени фазой являются приближенно самоподобными решениями нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) с усилением в пределе высокой интенсивности [2]. Эти результаты были подтверждены экспериментально в работе [3] и обобщили предыдущие теоретические исследования по распространению параболических импульсов в оптических волокнах [4].

В работах [2] и [4] вывод решений параболической формы основан на допущении о том, что линейным дисперсионным членом в уравнении для амплитуды поля по сравнению с нелинейным членом можно пренебречь аналогично квазиклассическому приближению в квантовой механике. Хотя центральное ядро решения уже было описано в литературе для некоторых физических задач [2], [4], исчерпывающей теории пока нет. Настоящая

*Photonics Research Group, School of Engineering and Applied Science, Aston University, Birmingham, UK

†Институт математики Уфимского научного центра РАН, Уфа, Россия

‡Marconi Solstis, Stratford-Upon-Avon, UK

работа посвящена подробному математическому анализу решений НУШ с усилением. Отправной точкой является анализ эволюции параметра, определяемого как отношение линейного члена к нелинейному, в плоскости время–расстояние. Это позволяет выделить три области на временной оси, которые соответствуют ядру, хвостам и узкой зоне перехода во временном профиле импульса, асимптотически распространяющегося в усилителе. НУШ далее решается в каждой из этих областей. Во внутренней области для нахождения самоподобного решения с параболическим временным профилем применяется квазиклассическое приближение. Во внешней области мы решаем линейризованное НУШ. Квазиклассическое параболическое решение в центральной части при этом сшивается с линейным в небольшой промежуточной переходной области. Следуя работе [5], уравнение для амплитуды поля в переходной области можно редуцировать ко второму уравнению Пенлеве (РП). Асимптотическое поведение трансцендентов Пенлеве и задачи связи для уравнений Пенлеве были рассмотрены во многих работах (см., например, [6], [7] и приведенную в них библиографию). В данной работе, используя асимптотические результаты для РП, мы решаем задачу сшивки амплитуд. Построение решений завершается сшивкой фазы поля. Наш анализ дает обоснование сделанного в работах [2] и [4] интуитивного предположения о том, что параболическая аппроксимация формы импульса справедлива в центральной части асимптотического импульса. Более того, это дает полное описание формы и основных свойств импульсов высокой мощности, порожденных в усиливающей среде.

Работа построена следующим образом. В начале мы представляем основную модель, управляющую распространяющимся в усиливающей среде оптическим импульсом. В разделе 2 мы даем обзор вывода самоподобных параболических решений НУШ в пределе высокой интенсивности и сравниваем эти решения с результатами численного моделирования. В разделе 3 мы формулируем и аналитически решаем задачу сшивки. Показано, что построенные таким способом решения точно воспроизводят свойства импульса, наблюдаемые при численном моделировании. В заключительном разделе приводятся полученные результаты.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим эволюцию локализованного оптического импульса в усиливающей среде в отсутствие насыщения усиления для падающих импульсов с меньшей спектральной шириной линий, чем ширина линии усиления. В этом случае распространение импульса можно описывать при помощи НУШ с усиливающим членом [8]

$$i\psi_z - \frac{\beta_2}{2}\psi_{tt} + \sigma|\psi|^2\psi = i\frac{g(z)}{2}\psi, \quad (1)$$

где $\psi(z, t)$ – медленно изменяющаяся огибающая импульса в движущейся вместе с импульсом системе координат, β_2 и σ – параметры соответственно дисперсии групповой скорости и нелинейности, а $g(z)$ – профиль усиления вдоль волокна. Мы ищем решение уравнения (1) в виде

$$\psi(z, t) = a(z)F(\eta, \xi)e^{iC(z)t^2}, \quad (2)$$

где введены новые самоподобные переменные

$$\xi = \frac{t}{\tau(z)}, \quad \frac{d\eta}{dz} = \sigma a^2(z). \quad (3)$$

Здесь $a(z)$ имеет ту же размерность, что и $\psi(z, t)$, и описывает эволюцию пика амплитуды импульса с изменением расстояния, $\tau(z)$ – характеристическая ширина, $C(z)$ – параметр нелинейного изменения частоты, а $F(\eta, \xi)$ – нормированная безразмерная функция, которая описывает эволюцию временного профиля через его ξ -зависимость; мы также допускаем зависимость от η для учета вкладов в пик амплитуды и фазу. Преобразования (2) и (3) дают связанные уравнения для a , τ , C , и F :

$$\frac{a_z}{a} = \beta_2 C + \frac{g}{2}, \quad (4)$$

$$\frac{\tau_z}{\tau} = -2\beta_2 C, \quad (5)$$

$$(C_z - 2\beta_2 C^2) \tau^2 = -\lambda \sigma a^2, \quad (6)$$

$$iF_\eta + (|F|^2 + \lambda \xi^2)F - \frac{1}{c(\eta)}F_{\xi\xi} = 0, \quad c = \frac{2\sigma a^2 \tau^2}{\beta_2}, \quad (7)$$

где λ – произвольный параметр, связанный с мощностью импульса. Уравнения (4)–(6) можно переписать таким образом, чтобы получить соотношение между a и τ :

$$a^2(z)\tau(z) = a^2(z_0)\tau(z_0) \exp \int_{z_0}^z dz' g(z'), \quad (8)$$

а также записать уравнение второго порядка для τ

$$\tau_{zz} = \frac{2\beta_2 \sigma \lambda a^2}{\tau} \quad (9)$$

с дополнительным граничным условием $(\tau_z)_{z=z_0} = -2\beta_2 C(z_0)\tau(z_0)$. Здесь z_0 – произвольная начальная точка.

Разделяя функцию F на вещественную амплитуду A и фазу Φ ,

$$F(\eta, \xi) = A(\eta, \xi) e^{i\Phi(\eta, \xi)}, \quad (10)$$

из уравнения (7) получаем “гидродинамическую” систему уравнений:

$$(A^2)_\eta - \frac{2}{c(\eta)}(A^2 \Phi_\xi)_\xi = 0, \quad (11a)$$

$$\Phi_\eta + \frac{1}{c(\eta)} \left(\frac{A_{\xi\xi}}{A} - (\Phi_\xi)^2 \right) - (A^2 + \lambda \xi^2) = 0. \quad (11b)$$

3. ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ ИМПУЛЬСЫ ВЫСОКОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ

Рассмотрим сначала возможность приближенного описания энергосодержащего ядра. Определим параметр ϵ как отношение члена с линейной дисперсией к нелинейному члену в уравнении (11б):

$$\epsilon(\eta, \xi) = \left| \frac{A_{\xi\xi}}{c(\eta)A^3} \right|. \quad (12)$$

В этом разделе мы сконцентрируемся на свойствах распространения импульсов высокой интенсивности или, другими словами, на решениях, удовлетворяющих условию

$$\epsilon \ll 1, \quad (13)$$

которое соответствует так называемому квазиклассическому пределу уравнения (1). Когда оно выполнено, можно пренебречь членом, соответствующим линейной дисперсии в уравнении (11б), и получающаяся тогда система уравнений для A и Φ принимает вид

$$\begin{aligned} (A^2)_\eta - \frac{2}{c(\eta)}(A^2\Phi_\xi)_\xi &= 0, \\ \Phi_\eta - \frac{1}{c(\eta)}(\Phi_\xi)^2 - (A^2 + \lambda\xi^2) &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Мы ищем решение уравнений (14), имеющее самоподобную форму, т.е. $A = A(\xi)$. Более того, если мы полагаем $\Phi_\xi = 0$, то легко найти решение с параболическим распределением интенсивности

$$\begin{aligned} A(\xi) &= [\lambda(1 - \xi^2)]^{1/2}, \quad |\xi| \leq 1, \\ \Phi(\eta) &= \lambda\eta, \end{aligned} \quad (15)$$

которое приводит к следующей зависимости энергии импульса от его параметров:

$$U = \int_{-\infty}^{+\infty} dt |\psi|^2 = \frac{4}{3} \lambda a^2 \tau. \quad (16)$$

Теперь можно обобщить уравнения, моделирующие динамическую эволюцию решения уравнения (1) как импульс высокой интенсивности. Из вида члена, соответствующего амплитуде:

$$\begin{aligned} |\psi(z, t)| &= \left(\frac{3U(z)}{4\tau(z)} \right)^{1/2} \left[1 - \left(\frac{t}{\tau(z)} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad |t| \leq \tau(z), \\ |\psi(z, t)| &= 0, \quad |t| > \tau(z), \end{aligned} \quad (17)$$

ясно, что решение соответствует импульсу с параболическим профилем интенсивности, причем точка пересечения с нулем $\tau(z)$ определяет эффективную ширину импульса. В фазовом члене

$$\arg \psi(z, t) = \lambda\eta(z) + C(z)t^2 \quad (18)$$

решения $\eta(z)$ и $C(z)$ имеют вид

$$\eta(z) = \eta(z_0) + \left(\frac{3\sigma}{4\lambda}\right) \int_{z_0}^z dz' \frac{U(z')}{\tau(z')}, \quad (19)$$

$$C(z) = -(2\beta_2)^{-1} \left(\frac{d}{dz}\right) \ln \tau(z). \quad (20)$$

В уравнениях (17)–(20) скейлинг амплитуды и ширины импульса из их начальных значений можно вычислить, исходя из уравнений

$$U(z) = U(z_0) \exp \int_{z_0}^z dz' g(z'), \quad (21)$$

$$\frac{d^2 \tau}{dz^2} = \frac{3\beta_2 \sigma U(z)}{2\tau^2}. \quad (22)$$

Отметим, что вывод такого решения основан на допущении (13). Эту аппроксимацию можно обосновать апостериори для параболического импульса, задаваемого уравнениями (17)–(20), поскольку $\epsilon \approx 2\beta_2/3\sigma\tau U \ll 1$ за исключением области вблизи краев импульса.

Теоретические предсказания, следующие из уравнений (17)–(22), сравнивались с результатами численного моделирования уравнения (1). Мы моделировали распространение гауссова импульса полной ширины при полуширине импульса 0.5 пс с энергией 70 пДж в волоконном усилителе длиной 4 м, интегрированным усилением 25 дБ, $\sigma = 6 \times 10^{-3} \text{ Вт}^{-1} \text{ м}^{-1}$ и $\beta_2 = 35 \times 10^{-3} \text{ пс}^2 \text{ м}^{-1}$ [3]. Поскольку определяемое уравнениями (17)–(20) решение находится для любого профиля усиления $g(z)$, причем функциональный вид $g(z)$ определяет только самоподобный скейлинг распространяющегося в усилителе импульса (см. уравнения (21) и (22)), без потери общности во всей статье мы сосредоточимся на случае постоянного профиля усиления $g(z) = g_a$ при $g_a = 1.44 \text{ м}^{-1}$.

Рис. 1. Эволюция импульса в усилителе. В левой части в линейном масштабе показана эволюция профиля интенсивности, а в правой профили интенсивности нанесены в логарифмическом масштабе с шагом 0.5 м.

На рис. 1 показана эволюция импульса, полученная при моделировании НУШ, показывающая эволюцию профиля интенсивности с изменением расстояния распространения. Можно видеть, что когда падающий гауссов импульс усилен до высокой интенсивности, он эволюционирует к параболическому импульсу во второй половине усилителя. Интересное свойство, видное из графика в логарифмическом масштабе, состоит в том, что асимптотический импульс демонстрирует самоподобное энергосодержащее параболическое ядро, окруженное крыльями с низкой амплитудой. Эти хвосты начинают развиваться на импульсе вблизи точек $t = \pm\tau$, т.е. в области, где отброшенный при теоретическом рассмотрении линейный член становится важным. Поэтому их описание требует более тщательного анализа формы импульса, которое мы представим в следующем разделе.

Рис. 2. Эволюция эффективной ширины импульса $\tau(z)$ (вверху слева), пиковой амплитуды $|\psi(z, 0)|$ (вверху справа) и параметра нелинейного изменения частоты $C(z)$ (внизу). Сплошные линии показывают результаты вычислений, а крестики – теоретические предсказания при $z \geq 2.5$ м.

Говоря об асимптотическом параболическом режиме, возникающем после некоторого исходного переходного периода, в данном случае после прохождения расстояния 2.5 м, можно количественно сравнить эволюцию параметров импульса, полученную с помощью численного моделирования, с теорией. На рис. 2 сплошными линиями показаны изменения эффективной ширины $\tau(z)$, пиковая амплитуда $|\psi(z, 0)|$ и параметр нелинейно-

Рис. 3. Интенсивность (левая шкала) и нелинейное изменение частоты (правая шкала) импульса, выходящего из усилителя. Сплошные линии показывают результаты вычислений, а окружности – теоретические предсказания.

го изменения частоты $C(z)$, определенные подгонкой к распространяющемуся импульсу, полученному с помощью численного моделирования. Эти значения хорошо согласуются с ожидаемыми результатами (обозначенными на рисунке крестиками), полученными из решений уравнений (22), (17) и (20) при $z \geq 2.5$ м. Кроме того, сплошными кривыми на рис. 3 показаны результаты моделирования для интенсивности и нелинейного изменения частоты (первая производная фазы по времени) импульса, выходящего из усилителя, в сравнении с результатами, получаемыми при решении уравнений (17)–(22) (обозначены окружностями). Эти результаты подтверждают квадратичную зависимость от времени для фазы параболического выходного импульса. Однако мы заметили изменение коэффициента при t^2 в фазе на “хвостах” параболической части импульса (см. врезку на рис. 3), т.е. там, где нельзя пренебрегать линейным членом в уравнении (1). Это изменение мы учтем в нашем анализе в следующем разделе.

4. ЗАДАЧА СПИВКИ

В предыдущем разделе было показано, что параболическое приближение для формы импульса может описывать центральную часть асимптотически распространяющегося импульса в усиливающей среде. Теперь нашей целью является включение в описание хвостов импульса. Для этого мы прежде всего исследовали эволюцию параметра ϵ , определяемого уравнением (116), на плоскости время–расстояние. На рис. 4 показана эволюция параметра ϵ как функция расстояния распространения z и нормированного времени ξ , вычисленная с помощью численного моделирования уравнения (1). Изменение интенсивности цвета соответствует изменению значений от 0 до 1, а значения, боль-

шие 1, показаны тем же цветом, который соответствует 1. Наверху слева представлена вариация ϵ на плоскости (ξ, z) ; наверху справа показана в увеличенном виде более узкая область ξ , где ясно видны начальные точки асимптотического режима. На нижнем рисунке показана вариация ϵ в асимптотическом режиме, начиная с расстояния распространения 2.5 м. Видно, что переход ϵ от значений, меньших 1, к значениям, большим 1, происходит в узкой области вокруг точек $\xi = \pm 1$, что согласуется с нашими интуитивными ожиданиями. Можно также видеть, что в асимптотическом режиме переходная область (выраженная в самоподобных переменных) не движется с расстоянием.

Рис. 4. Эволюция параметра ϵ как функции расстояния распространения z и нормированного времени ξ . Вверху слева – полная плоскость (ξ, z) ; вверху справа – область $-1.5 \leq \xi \leq 1.5$; внизу – область $-1.5 \leq \xi \leq 1.5$ и $z \geq 2.5$ м.

Рис. 5. Схема областей переменной ξ , в которых решается уравнение (7).

На основании этих результатов мы определяем три области на оси ξ , как показано на рис. 5. Поскольку задача симметрична по ξ , можно ограничиться полуосью $\xi \geq 0$. Область I, $0 \leq \xi \leq 1 - \Delta_1$, соответствует центральной части асимптотического импульса, где $\epsilon \ll 1$. Область III, $\xi \geq 1 + \Delta_2$, соответствует хвостам импульса, где $\epsilon \gg 1$. Наконец, область II, $1 - \Delta_1 \leq \xi \leq 1 + \Delta_2$, является переходной зоной, где $\epsilon \approx 1$. Ее размер параметризован с помощью $\Delta_1, \Delta_2 \ll 1$. Мы вводим два различных Δ -интервала для левой и правой областей вокруг точки $\xi = 1$, поскольку решения очевидным образом асимметричны относительно этой точки. В каждой из областей мы строим приближенное решение уравнения (7) или, что эквивалентно, системы (11а) при фиксированном η и далее сшиваем решения на границах.

В области I рассмотрим квазиклассическое решение, выведенное в разделе 3, а именно

$$\begin{aligned} A &= A_I(\xi) = [\lambda(1 - \xi^2)]^{1/2}, & 0 \leq \xi \leq 1 - \Delta_1, \\ \Phi &= \Phi_I(\eta) = \lambda\eta, & 0 \leq \xi \leq 1 - \Delta_1. \end{aligned} \quad (23)$$

В области II мы ищем решение в виде

$$\begin{aligned} A &= A_{II}(\eta, \xi), & 1 - \Delta_1 \leq \xi \leq 1 + \Delta_2, \\ \Phi &= \Phi_{II}(\eta, \xi) = \begin{cases} \lambda\eta, & \xi = 1 - \Delta_1, \\ \lambda\eta + \Phi_1(\eta, \xi), & 1 - \Delta_1 < \xi \leq 1 + \Delta_2. \end{cases} \end{aligned} \quad (24)$$

Используя уравнения (24) и предполагая, что A_{II}^2 никогда не приближается к нулю, получаем из уравнения (11а)

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi}(\eta, \xi) = \frac{c(\eta)}{2A_{II}^2(\eta, \xi)} \int_{1-\Delta_1}^{\xi} d\xi' \frac{\partial A_{II}^2}{\partial \eta}(\eta, \xi'), \quad (25)$$

$$\Phi_1(\eta, \xi) = \frac{c(\eta)}{2} \int_{1-\Delta_1}^{\xi} d\xi' \frac{1}{A_{II}^2(\eta, \xi')} \int_{1-\Delta_1}^{\xi'} d\xi'' \frac{\partial A_{II}^2}{\partial \eta}(\eta, \xi''). \quad (26)$$

Подставляя (24) в уравнение (11б), получаем

$$\frac{1}{c(\eta)} \frac{1}{A_{II}} \frac{\partial^2 A_{II}}{\partial \xi^2} - A_{II}^2 + \lambda(1 - \xi^2) + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} - \frac{1}{c(\eta)} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} \right)^2 = 0. \quad (27)$$

Из-за малой вариации A_{II}^2 и c при η , соответствующем асимптотическому режиму, из уравнений (25) и (26) легко следует, что $\Phi_{1\eta}$ и $(\Phi_{1\xi})^2$ являются по крайней мере $O(\Delta_{1,2}^2)$. Поэтому, пренебрегая членами порядка не меньше 2 в выражении для $\Delta_{1,2}$, перепишем уравнение (27) в виде [5]

$$[2\lambda(\xi - 1) + A_{II}^2] A_{II} - \frac{1}{c(\eta)} \frac{\partial^2 A_{II}}{\partial \xi^2} = 0. \quad (28)$$

С помощью замены переменных

$$x = (2\lambda c)^{1/3}(\xi - 1), \quad \phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{c}{4\lambda^2} \right)^{1/6} A_{II} \quad (29)$$

уравнение (28) можно переписать как специальный случай второго уравнения Пенлеве

$$(x + 2\phi^2)\phi - \phi_{xx} = 0. \quad (30)$$

Граничные условия для уравнения (28) можно сформулировать в терминах асимптотического поведения второго трансцендента Пенлеве. При конкретном выборе свободных параметров асимптотики имеют вид [7]

$$\phi \sim \left(-\frac{x}{2}\right)^{1/2}, \quad x \rightarrow -\infty, \quad (31)$$

$$\phi \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{e^{-2x^{3/2}/3}}{x^{1/4}}, \quad x \rightarrow +\infty. \quad (32)$$

Эти формулы соответствуют следующим граничным условиям для A_{II} :

$$A_{II} = [-\lambda(\xi^2 - 1)]^{1/2} \simeq [-2\lambda(\xi - 1)]^{1/2}, \quad \xi = 1 - \Delta_1, \quad (33)$$

$$A_{II} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\lambda}{2c}\right)^{1/4} \frac{e^{-2(2\lambda c)^{1/2}(\xi-1)^{3/2}/3}}{(\xi-1)^{1/4}}, \quad \xi = 1 + \Delta_2. \quad (34)$$

Решение граничной задачи, заданной уравнениями (28), (33), (34), дает $A_{II}(\eta, \xi)$ (при фиксированном η). Окончательно, используя $A_{II}(\eta, \xi)$ в уравнении (26), получаем $\Phi_{II}(\eta, \xi)$.

В области III мы пренебрегаем нелинейным членом в уравнении (11б) и решаем соответствующее линеаризованное уравнение

$$iF_\eta + \lambda\xi^2 F - \frac{1}{c(\eta)} F_{\xi\xi} = 0, \quad (35)$$

а именно, ищем решение в виде

$$F(\eta, \xi) = A_{III}(\eta, \xi) e^{i\Phi_{III}(\eta, \xi)} = \alpha(\eta) G(\eta, \theta) e^{iR(\eta)\xi^2}, \quad \theta = \beta(\eta)\xi, \quad \xi \geq 1 + \Delta_2. \quad (36)$$

Подставляя это выражение в уравнение (35), находим, что

$$iG_\eta - \frac{\beta^2(\eta)}{c(\eta)} G_{\theta\theta} = 0 \quad (37)$$

выполняется при условиях

$$\frac{\beta_\eta}{\beta} = \frac{4R}{c}, \quad \frac{\alpha_\eta}{\alpha} = \frac{2R}{c}, \quad R_\eta = \frac{4R^2}{c} + \lambda. \quad (38)$$

Из-за граничного условия (34), следующего из определения области II, G имеет асимптотику

$$G(\eta, \theta) \sim \alpha^{-1}(\eta) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\lambda}{2c(\eta)}\right)^{1/4} \frac{e^{-2(2\lambda c(\eta))^{1/2}(\theta/\beta(\eta)-1)^{3/2}/3}}{(\frac{\theta}{\beta(\eta)} - 1)^{1/4}} \times \\ \times e^{i[\Phi_{II}(\eta, \theta/\beta(\eta)) - R(\eta)\theta^2/\beta^2(\eta)]}, \quad \theta \rightarrow \beta(\eta) + 0. \quad (39)$$

Здесь мы применяем условие сшивки фаз $\Phi_{\text{III}}(\eta, \xi) = \Phi_{\text{II}}(\eta, \xi)$ при $\xi \rightarrow 1 + 0$. Параболическое уравнение (37) с граничным условием (39) решается с помощью формулы двойного потенциала [9]

$$G(\eta, \theta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{b(\eta)} d\eta' G(\eta', \beta(\eta)(1 + \Delta_2)) \frac{\theta}{(b(\eta) - \eta')^{3/2}} e^{-i\theta^2/(4(b(\eta) - \eta'))}, \quad (40)$$

где $db(\eta)/d\eta = \beta^2(\eta)/c(\eta)$.

Это завершает построение функции $F(\eta, \xi)$ для всех ξ при фиксированном η . Условия сшивки требуют подходящего выбора Δ_1 и Δ_2 . Они должны быть достаточно малыми, чтобы обеспечить сшивку между областями I и II и областями II и III:

$$|x| = (2\lambda c(\eta))^{1/3} |\xi - 1| \gg 1, \quad |\xi - 1| \ll 1. \quad (41)$$

Таким образом, можно выбрать $\Delta_{1,2}$ из интервала

$$0 < \Delta_{1,2} < (2\lambda c(\eta))^{-1/3+\epsilon}, \quad 0 < \epsilon < \frac{1}{3}. \quad (42)$$

Рис. 6. Амплитуда A как функция от ξ на выходе усилителя. Штриховая линия показывает численное решение, сплошная линия – решение задачи сшивки при $\Delta_1 = 0.2$ и $\Delta_2 = 0.15$, а пунктирная кривая – параболическое решение при $\Delta_1 = 0$. На врезке показаны численное решение и решение задачи сшивки в линейном масштабе.

Мы сравнили решение задачи сшивки с численным решением уравнения (1). Пример представлен на рис. 6, где показана амплитуда A для F как функция ξ при $0 \leq \xi \leq 1 + \Delta_2$ на выходе усилителя. Численное решение можно сравнить с решением задачи сшивки, заданным первым из уравнений (23) и решением уравнения (28). Приведено также параболическое решение первого из уравнений (23) при $\Delta_1 = 0$. Заметим, что параметр Δ_1 следует выбрать так, чтобы это параболическое решение первого из уравнений (23) не

отклонялось от численного в точке $\xi = 1 - \Delta_1$. Пример на рис. 6 соответствует $\Delta_1 = 0.2$ и $\Delta_2 = 0.15$. Можно видеть, что имеется хорошее согласие между аналитическими и численными результатами и различие между ними имеет порядок $\Delta_{1,2}^2$, что не противоречит нашим ожиданиям, поскольку члены, которыми мы пренебрегли в уравнении (28), имеют порядок $O(\Delta_{1,2}^2)$. Более точный выбор параметров Δ_1, Δ_2 и λ должен улучшить точность теоретических результатов.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы исследовали решения НУШ с усилением, которое управляет оптическим импульсом, распространяющимся в волоконной усиливающей среде. Квазиклассические решения с параболическим временным профилем в энергосодержащем ядре были аккуратно проанализированы теоретически и численно. Мы представили сшивку параболического решения с линейными низкоамплитудными хвостами импульса. Было показано, что теоретический анализ хорошо воспроизводит решение, полученное путем численного моделирования НУШ.

Список литературы

- [1] *G. I. Barenblatt*. Scaling, Self-Similarity, and Intermediate Asymptotics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996.
- [2] *V. I. Kruglov, A. C. Peacock, J. M. Dudley, J. D. Harvey*. Opt. Lett. 2000. V. 25. P. 1753.
- [3] *M. E. Fermann, V. I. Kruglov, B. C. Thomsen, J. M. Dudley, J. D. Harvey*. Phys. Rev. Lett. 2000. V. 84. P. 6010.
- [4] *D. Anderson, M. Desaix, M. Karlsson, M. Lisak, M. L. Quiroga-Teixeiro*. J. Opt. Soc. Am. B. 1993. V. 10. P. 1185.
- [5] *В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов*. ЖЭТФ. 1986. Т. 91. С. 1310.
- [6] *N. Joshi, M. D. Kruskal*. Phys. Lett. A. 1988. V. 130. P. 129; *P. A. Clarkson, J. B. McLeod*. Arch. Rat. Mech. Anal. 1988. V. 103. P. 97; *N. Joshi*. Asymptotic studies of the Painlevé equations. In: The Painlevé Property, One Century Later. CRM Series in Mathematical Physics. Ed. R. Conte. New York: Springer-Verlag, 1999. P. 181–227.
- [7] *A. R. Its, V. Yu. Novokshenov*. The Isomonodromic Deformation Method in the Theory of Painlevé Equations. Lecture Notes in Math. V. 1191. Berlin: Springer, 1986; *S. P. Hastings, J. B. McLeod*. Arch. Rat. Mech. Anal. 1980. V. 73. P. 31.
- [8] *E. Desurvire*. Erbium-Doped Fiber Amplifiers: Principles and Applications. New York: Wiley, 1994.
- [9] *O. A. Ladyzhenskaja, V. A. Solonnikov, N. N. Ural'ceva*. Linear and Quasi-Linear Equations of Parabolic Type. Transl. of Math. Monographs. V. 23. Providence, RI: AMS, 1968.