Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Брежнев, Конечнозонные потенциалы с тригональными кривыми, *ТМФ*, 2002, том 133, номер 3, 398–404

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf406>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 12:10:22

КОНЕЧНОЗОННЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ С ТРИГОНАЛЬНЫМИ КРИВЫМИ

Для конечнозонных операторов с тригональными кривыми построены уравнения Дубровина и формулы следов. Приведены примеры.

Ключевые слова: конечнозонные потенциалы, спектральные задачи, формулы следов.

1. ВВЕДЕНИЕ

Теория конечнозонного интегрирования для оператора Шредингера достаточно хорошо развита. Для этой задачи в 70-е годы были разработаны почти все атрибуты алгебро-геометрического интегрирования: спектр и монодромия [1], [2], Ψ -функция [2], [3] и абелевы многообразия [4], уравнения на нули и полюсы Ψ -функции [5] как аналоги данных рассеяния и восстановление потенциала по ним в периодическом случае [5], [6]. Позднее многие из этих результатов были получены и для других уравнений (для уравнения синус-Гордон, модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ), нелинейного уравнения Шредингера) и матричных операторов [6]. В конце 80-х и в 90-х годах были проведены многочисленные исследования проблемы эффективизации общих Θ -функциональных формул и вещественности решений [7], [8] и, что важно с прикладной точки зрения, редукции к эллиптическим решениям [9]. Библиография по этой тематике обширна, мы укажем лишь недавний обзор [10] и готовящуюся монографию [11].

В то же время для ряда нелинейных уравнений и соответствующих им спектральных задач не разработаны или даже отсутствуют некоторые составляющие алгебро-геометрического интегрирования. Это касается уравнений Буссинеска и Цицейки, системы спаренных уравнений Шредингера (системы Манакова) и вообще уравнений с размерностью L – A -пар, больше или равной трем. Многие из этих уравнений имеют важные физические приложения.

Причины такого отсутствия как чисто технические, связанные с повышением порядка спектральной задачи, так и более существенные – переход от гиперэллиптических к более общим алгебраическим кривым. Например, для иерархии уравнения Буссинеска,

* Калининградский государственный университет, Калининград, Россия.
E-mail: brezhnev@mail.ru

а точнее связанной с ним спектральной задачи

$$\Psi''' + u(x)\Psi' + v(x)\Psi = \lambda\Psi, \quad (1)$$

формализм стационарных уравнений и полиномиальная λ -техника описаны сравнительно недавно [12]. Сказанное выше относится и к решениям из области эллиптических солитонов [9]. Что касается явной временной динамики, то таких решений еще меньше [13], [14].

Как известно, еще в работе Новикова [1] было отмечено, что стационарные уравнения КдФ (уравнения Новикова) являются конечномерными гамильтоновыми (в переменных Остроградского $u, u_x, \dots$ [15]) системами, интегрируемыми по Лиувиллю. Окончательные выражения динамики по x и t в виде линейных фаз $kx + ct$ дают, как известно, знаменитые тождества следов, выражающие потенциал спектральной задачи через координаты $\gamma_k(x, t)$ нулей Ψ -функции. Эволюция величин γ_k описывается системой нелинейных обыкновенных автономных дифференциальных уравнений – уравнениями Дубровина (УД), которые после преобразования Абеля сводятся к обращению абелевых интегралов первого рода (задача Якоби).

Гельфанд и Дикий показали [16], что для уравнения КдФ в процедуре интегрирования по Лиувиллю переход от переменных Остроградского к каноническим переменным фактически может быть стандартизирован на уровне полиномиальной техники. С другой стороны, собственно в теории конечномерных гамильтоновых систем УД чаще возникают уже в виде спектральной (алгебраической) кривой и задачи обращения Якоби для нее. Связь этих объектов с явным представлением потенциала как симметрической функции с линейной зависимостью от x, t точки на якобиане кривой дает формулы следов.

Однако применительно к спектральным задачам порядка выше двух или к общим операторным λ -пучкам указанные конструкции не разрабатывались. Отметим задачу Ковалевской и ее эллиптические решения [17] как наиболее показательный пример, в котором формулы следов и УД в форме задачи обращения Якоби одинаково необходимы. Недавно были опубликованы примеры более непосредственной связи упомянутых атрибутов со стационарными уравнениями Буссинеска и негиперэллиптическими кривыми [18].

В данной работе показано, что УД и формулы следов существуют и в тригональном случае. Из приведенных примеров очевидно, что n -гональные обобщения (иерархия Гельфанда–Дикого) тоже имеют место. Схема решения следует из построений.

2. Ψ -ФУНКЦИЯ И УРАВНЕНИЯ ДУБРОВИНА

Воспользуемся двумя ключевыми моментами, анонсированными в работах [19], [20]: фундаментальным свойством конечнозонных операторов и УД на общие операторные пучки. Пусть потенциал (u, v) в задаче (1) конечнозонный. Мы не обсуждаем здесь различия между устоявшимся термином спектральной теории операторов “конечнозонный (конечно-лакунный) потенциал” и термином “алгебро-геометрический потенциал”.

Критерием конечнозонности может выступать наличие парного коммутирующего оператора [3]. Поскольку коммутация подразумевается на решениях уравнения (1), то сразу отождествим коммутирующий оператор с λ -пучком. Обозначим его собственное значение как μ :

$$A(\lambda; x)\Psi'' + B(\lambda; x)\Psi' + C(\lambda; x)\Psi = \mu\Psi, \quad (2)$$

где

$$C = \frac{1}{3}A'' - B' + \frac{2}{3}uA.$$

Выражение для $C(\lambda; x)$ следует из совместности (2) и (1). Полиномы A и B определяют иерархию.

ЛЕММА 1. *Конечнозонная Ψ -функция имеет вид¹⁾*

$$\frac{\Psi'}{\Psi} = \frac{(A' + B)(\mu - C) - vA^2 + AC'}{3A\mu + AA'' + uA^2 + 3B(A' + B)}. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО сводится к последовательному исключению производных Ψ в уравнениях (1) и (2).

ЛЕММА 2. *Алгебраическая кривая, соответствующая Ψ -функции (3), имеет вид²⁾*

$$\mu^3 + \frac{1}{3}(AA^{(IV)} + (2A' + 3B)A''' + 3AB''' - A''^2 - \dots)\mu + (\dots) = 0. \quad (4)$$

Формула (4) получается подстановкой (3) в (1). Рекуррентные формулы для полиномов (по λ) A, B приведены в работе [12], там же имеются леммы 1 и 2 и нижеследующее предложение 1, хотя и без доказательств и в довольно громоздких обозначениях. Определим $\gamma_k(x)$ как нули Ψ -функции, зависящие от λ . Пусть $\mu_k(x)$ — корни уравнения (4) при $\lambda = \gamma_k(x)$, записанного в виде

$$\mu_k^3 + Q(\gamma_k)\mu_k + R(\gamma_k) = 0. \quad (5)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Дивизор (γ_k, μ_k) нулей Ψ -функции удовлетворяет системе уравнений, записанной в форме дифференциалов:*

$$\frac{d\gamma_k}{3\mu_k^2 + Q(\gamma_k)} = \frac{3A(\gamma_k; x)}{a \prod_{j \neq k} (\gamma_k - \gamma_j)} dx, \quad (6)$$

$$\frac{d\mu_k}{Q'(\gamma_k)\mu_k + R'(\gamma_k)} = -\frac{3A(\gamma_k; x)}{a \prod_{j \neq k} (\gamma_k - \gamma_j)} dx. \quad (7)$$

¹⁾Мы не пишем очевидную экспоненту от интеграла, так как далее нам понадобится формула в виде (3).

²⁾Многоточием в скобках обозначены оставшиеся слагаемые с низшими производными от A, B .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обращаем в полином правую часть (3) как рациональную функцию по μ в силу уравнения кривой (4). В результате получаем формулу

$$\frac{\Psi'}{\Psi} = \frac{3A\mu^2 - (AA'' + uA^2 + 3B^2 + 3BA')\mu + \dots}{(3v - u')A^3 + (3Bu + 2A'u + 2A''' + 3B'')A^2 + \dots}. \quad (8)$$

Обозначим знаменатель как

$$П(\lambda; x) = (3v - u')A^3 + (3Bu + 2A'u + 2A''' + 3B'')A^2 + 3(A'' + B')BA + 3B^2(A' + B). \quad (9)$$

Все нули функции Ψ являются полюсами для Ψ'/Ψ . Определим их, факторизуя $П$:

$$П(\lambda; x) = a(\lambda - \gamma_1) \dots (\lambda - \gamma_g), \quad (10)$$

где a — числовая константа. Используя (3), при $\lambda \rightarrow \gamma_k$ получаем важное соотношение — вторую координату нуля:

$$\mu_k = \frac{F(\gamma_k; x)}{A(\gamma_k; x)}, \quad (11)$$

где введено обозначение

$$-3F = A'' + uA^2 + 3B(A' + B).$$

В результате имеем

$$\frac{\Psi'}{\Psi} = \frac{(A' + B)(\mu - C) + AC' - vA^2}{A\mu - F} = -3 \frac{(\mu^2 + Q)A^2 + AF\mu + F^2}{АП} + \frac{A' + B}{A}.$$

В пределе $\lambda \rightarrow \gamma_k$ с учетом (11) приходим к формуле (6). Формула (7) получается дифференцированием уравнения (5) с использованием соотношения (6).

3. ЦЕНТРАЛЬНАЯ ФОРМУЛА СЛЕДОВ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДУБРОВИНА

Тригональные кривые проявляют бóльшую нестандартность, чем гиперэллиптические, что проявляется на структуре УД. В самом деле, УД (6), (7) содержат потенциал в функции A и поэтому в такой форме теряют смысл. Формулы следов становятся, таким образом, неизбежным атрибутом придания УД автономной формы с последующим интегрированием. В свою очередь, потенциал (u, v) , как абелева функция, будет симметричной комбинацией, вообще говоря, обеих координат (γ_k, μ_k) :

$$u(x) = S_1(\gamma_k, \mu_k), \quad v(x) = S_2(\gamma_k, \mu_k). \quad (12)$$

Высшие производные будут выражаться через (γ_k, μ_k) в силу самих УД (6), (7) и (12). По этой причине мы будем называть соотношения (12) центральными формулами следов. Другие тождества следов становятся их следствиями. Общая техника вывода этих формул, по всей видимости, должна использовать теорию симметрических функций от двух переменных. Здесь мы ограничимся характерными примерами.

4. ПРИМЕРЫ

Приводя примеры, мы будем исходить из спектральной задачи (1), не комментируя связанные с ней нелинейные уравнения, так как они хорошо известны. Это уравнения Савади–Котера и Буссинеска. Заметим, что все они укладываются в общую иерархию уравнения Буссинеска [12], но с различными редукциями на потенциал (u, v) . Из стационарной иерархии хорошо известных L - A -пар для этих уравнений мы получаем и коммутирующие операторные пучки.

ПРИМЕР 1. $v = 0$. Коммутирующий пучок имеет вид

$$(-9\lambda + 3u')\Psi'' + (u^2 - u'' + c)\Psi' - 6\lambda u\Psi = \mu\Psi.$$

Здесь и далее через c мы обозначаем первую константу c_j , нумерующую члены иерархии. Получаем далее

$$A(\gamma_k; x) = -9\gamma_k + 3u'.$$

Полином (9) приобретает вид

$$3^{-7}\Pi(\lambda; x) = \lambda^4 - \frac{2}{3}u'\lambda^3 + \frac{1}{9}(u^{(IV)} + 3uu'' + 2u'^2 + u^3 + cu)\lambda^2 + (\dots).$$

Используя (10) и эту формулу, получаем одно из тождеств следов:

$$u' = \frac{2}{3} \sum_{j=1}^4 \gamma_j, \quad (13)$$

которое сразу приводит УД (6), (7) к автономной форме

$$\frac{2 \cdot 81 d\gamma_k}{3\mu_k^2 + Q(\gamma_k)} = \frac{\sum_{j=1}^4 \gamma_j - 2\gamma_k}{\prod_{j \neq k} (\gamma_k - \gamma_j)} dx. \quad (14)$$

Выпишем формулу для кривой (4):

$$\mu^3 + (27c\lambda^2 + E_1)\mu + 729\lambda^5 + 81E_2\lambda^3 + E_3\lambda = 0, \quad (15)$$

где E_j – дифференциальные полиномы по $u(x)$. Имеет место следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Уравнения (14) эквивалентны задаче обращения Якоби для кривой (15)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^4 \int^{(\gamma_k, \mu_k)} \frac{d\lambda}{3\mu^2 + Q(\lambda)} &= a_1, & \sum_{k=1}^4 \int^{(\gamma_k, \mu_k)} \frac{\lambda d\lambda}{3\mu^2 + Q(\lambda)} &= a_2, \\ \sum_{k=1}^4 \int^{(\gamma_k, \mu_k)} \frac{\mu d\lambda}{3\mu^2 + Q(\lambda)} &= a_3, & \sum_{k=1}^4 \int^{(\gamma_k, \mu_k)} \frac{\lambda^2 d\lambda}{3\mu^2 + Q(\lambda)} &= a_4 - \frac{1}{81}x, \\ Q(\lambda) &= 27c\lambda^2 + E_1. \end{aligned} \quad (16)$$

Центральная формула следов (12) имеет вид

$$u = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^4 \gamma_k \mu_k \frac{\sum_{j=1}^4 \gamma_j - 2\gamma_k}{\prod_{j \neq k} (\gamma_k - \gamma_j)}. \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое, второе и четвертое соотношения в (16) проверяются непосредственным домножением правых частей (14) на единицу, γ_k и γ_k^2 , соответственно, с последующим суммированием и интегрированием. Таким образом, они являются простыми тождествами в теории симметрических функций по переменным γ_k . Для доказательства третьего равенства в (16) необходимо воспользоваться формулой для второй координаты (11)

$$\mu_k = \frac{1}{3u' - 9\gamma_k} \{ 27u\gamma_k^2 - 9(u''' + 2uu')\gamma_k + 3u'''u' - 2u''^2 + (c + u^2)(u'' + u^2 + c) + 3uu'^2 \}. \quad (18)$$

Подставляя (18) в сумму

$$\sum_{k=1}^4 \frac{\mu_k d\gamma_k}{3\mu_k + Q(\gamma_k)},$$

убеждаемся, что она равна выражению

$$3 \frac{(u^2 + 2u'' + c)(u^2 - u'' + c)(3 \sum_{k=1}^4 \gamma_k - 2u')}{\prod_{k=1}^4 (3\gamma_k - u')},$$

которое в силу (13) равно нулю. Домножая правую часть (14) на $\gamma_k \mu_k$, суммируя и используя (18), получаем формулу (17).

ПРИМЕР 2. Спектральная задача (1) с коммутирующим пучком вида

$$u\Psi''' + (3\lambda + v - u' + c)\Psi' + \left(\frac{2}{3}u'' - v' + \frac{2}{3}u^2 \right) \Psi = \mu\Psi.$$

Этот пример более показателен, так как здесь мы имеем два потенциала u и v :

$$A = u, \quad B = 3\lambda + v - u' + c,$$

род $g = 3$. Факторизуя $\Pi(\lambda; x)$ (числовая константа $a = 81$):

$$3^{-4}\Pi(\lambda; x) = \lambda^3 + \left(v + c - \frac{2}{3}u' \right) \lambda^2 + \frac{1}{9} \left(\frac{2}{3}u^3 + uv' + u'^2 + 3(v + c)^2 - 4(v + c)u' \right) \lambda + (\dots),$$

получаем тождество следов $v + c - 2u'/3 = -\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3$, из которого можно считать v найденным, если будет найдено u (а следовательно, и u'). Найдем его. Уравнения (6), (7) и вторая координата (11) имеют вид

$$\gamma'_k = \frac{3\mu_k^2 + Q(\gamma_k)}{27 \prod_{j \neq k} (\gamma_k - \gamma_j)},$$

$$\mu_k = \frac{27\gamma_k^2 + 9(2v - u' + 2c)\gamma_k + uu'' + u^3 + 3(c + v)(c + v - 3u')}{3u}.$$

Кривая (4) и задача обращения Якоби выписываются с очевидностью, и мы их не приводим. Используя последнюю формулу, находим однозначно u, v :

$$\frac{9}{u} = - \sum_{k=1}^3 \frac{\mu_k}{\prod_{j \neq k} (\gamma_k - \gamma_j)}, \quad v = \frac{2}{3} u' - c - \sum_{k=1}^3 \gamma_k.$$

Нам не удалось придать компактный вид формуле для v без u через λ, μ .

Благодарности. Автор выражает признательность проф. К. Эйлбеку и В. Энольскому за многочисленные обсуждения. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 00-01-00782) и Королевского общества Великобритании.

Список литературы

- [1] *С. П. Новиков.* Функци. анализ и его прилож. 1974. Т. 8. № 3. С. 54–66.
- [2] *А. Р. Итс, В. Б. Матвеев.* Функци. анализ и его прилож. 1975. Т. 9. № 1. С. 69–70.
- [3] *И. М. Кривевер.* Функци. анализ и его прилож. 1976. Т. 10. № 2. С. 75–76.
- [4] *Б. А. Дубровин.* Функци. анализ и его прилож. 1977. Т. 11. № 4. С. 28–41.
- [5] *Б. А. Дубровин.* Функци. анализ и его прилож. 1975. Т. 9. № 3. С. 41–51.
- [6] *Б. А. Дубровин, В. Б. Матвеев, С. П. Новиков.* УМН. 1976. Т. 31. № 1. С. 55–136.
- [7] *Б. А. Дубровин, С. М. Натанзон.* Функци. анализ и его прилож. 1982. Т. 16. № 1. С. 27–43.
- [8] *С. П. Новиков.* Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1984. Т. 133. С. 177–196.
- [9] *А. О. Смирнов.* Матем. заметки. 1995. Т. 58. № 1. С. 86–97.
- [10] *F. Gesztesy, R. Weikard.* Bull. Amer. Math. Soc., New Ser. 1998. V. 35. № 4. P. 271–317.
- [11] *F. Gesztesy, H. Holden.* Hierarchies of Soliton Equations and their Algebro-Geometric Solutions. V. 1. In: Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2002. (in press).
- [12] *F. Gesztesy, R. Ratnaseelan.* Rev. Math. Phys. 1998. V. 10. P. 345–391.
- [13] *D. V. Chudnovsky.* J. Math. Phys. 1979. V. 20. № 12. P. 2416–2422.
- [14] *Yu. V. Brezhnev.* Rep. Math. Phys. 2001. V. 48. № 1/2. P. 39–46.
- [15] *M. Blaszak.* Multi-Hamiltonian Theory of Dynamical Systems. Berlin: Springer, 1998.
- [16] *И. М. Гельфанд, Л. А. Дикий.* Функци. анализ и его прилож. 1979. Т. 13. № 1. С. 8–20.
- [17] *В. З. Энольский.* ДАН СССР. 1984. Т. 278. № 2. С. 305–308.
- [18] *M. Blaszak.* Rep. Math. Phys. 2000. V. 46. № 1/2. P. 35–46.
- [19] *Н. В. Устинов, Ю. В. Брежнев.* УМН. 2002. Т. 57. № 1. С. 167–168; nlin.SI/0012039.
- [20] *Ю. В. Брежнев.* УМН. 2002. Т. 57. № 2. С. 191–192; nlin.SI/0106024.