Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Р. Гилсон, Обобщение иерархий КП: пфаффианизованные иерархии, *ТМФ*, 2002, том 133, номер 3, 405–418

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf407>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 13:48:27

ОБОБЩЕНИЕ ИЕРАРХИЙ КП: ПФАФФИАНИЗОВАННЫЕ ИЕРАРХИИ

Выведены пфаффианизованные аналоги уравнений однокомпонентной иерархии Кадомцева–Петвиашвили (КП) и модифицированной иерархии КП. Приведен пример системы, полученной путем редукции некоторых из уравнений таких пфаффианизованных иерархий.

Ключевые слова: солитоны, интегрируемые системы, пфаффианы, билинейные тождества.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работах Мивы, Джимбо, Даты и Кашивары [1], [2], относящихся к началу 80-х годов, были получены билинейные представления для различных иерархий Кадомцева–Петвиашвили (КП). Кроме собственно иерархий были построены многочисленные как хорошо, так и менее хорошо известные системы как редукции уравнений соответствующих иерархий. Эти работы заложили основу подхода, использованного в большинстве последующих работ по исследованию билинейных уравнений. Для многих иерархий решения уравнений принимают вид тау-функций, имеющих структуру детерминантов. Часто оказывается возможно представить эти тау-функции как вронскианы или граммианы некоторых детерминантов. Однако решения иерархий B -КП и D -КП выражаются не в терминах детерминантов, а в терминах пфаффианов с переменными нечетных весов.

В ряде работ [3] исследовались обобщения некоторых специальных билинейных систем, в которых уравнения с детерминантными решениями обобщались до уравнений с пфаффианными решениями. В данной работе предлагается объединяющий подход, в котором все уравнения иерархий КП (включая модифицированные иерархии КП) приводятся к пфаффианизованному виду. Некоторые из получающихся при этом уравнений оказываются известными, например уравнения, получаемые при *пфаффианизации* иерархии КП. Они представляют собой часть связанной системы КП [4]. Некоторые уравнения можно найти в работах Адлера, Шиоты и ван Мербеке [5] и в посвященной заряженным иерархиям B -КП и другим иерархиям работе Каца и ван де Лера [6], где получены подобные уравнения с использованием подхода свободных фермионов.

*Department of Mathematics, University of Glasgow, Glasgow, UK

Данная работа преследует две цели. Во-первых, предложить простой метод пфаффианизации уравнений, используемый как для обобщения известных уравнений с детерминантными решениями, так и для построения новых уравнений, естественным образом возникающих из пфаффианных тождеств. Во-вторых, после построения этих уравнений задача состоит в том, чтобы наложить такие условия редукции на некоторые из уравнений этих обобщенных иерархий, чтобы получить наряду с известными также и новые системы с пфаффианизованными решениями.

В разделе 2 исследование начинается с изучения иерархий КП с явными решениями в терминах граммианов. В разделах 3 и 4 приводятся общие свойства пфаффианов, в том числе пфаффианов граммианового типа, и показано, как вернуться от этих пфаффианов назад к обычным граммианам. В разделе 5 исследуется вид пфаффианизованных иерархий, а в разделе 6 приводится пример редукции этих обобщенных уравнений, а именно уравнений пфаффианизованной системы Каупа–Купершмидта.

2. БИЛИНЕАРИЗОВАННЫЕ ИЕРАХИИ КП

Билинеаризованные иерархии КП содержат многочисленные системы уравнений. Основное уравнение, лежащее в основе иерархии КП, – это собственно уравнение КП, имеющее в билинеаризованной форме записи вид

$$(D_1^4 - 4D_1D_3 + 3D_2^2)\tau_n \cdot \tau_n = 0. \quad (1)$$

Несколько следующих уравнений иерархии имеют вид

$$\begin{aligned} (D_1^3D_2 + 2D_3D_2 - 3D_1D_4)\tau_n \cdot \tau_n &= 0, \\ (D_1^6 - 20D_1^3D_3 - 80D_3^2 + 144D_1D_5 - 45D_1^2D_2^2)\tau_n \cdot \tau_n &= 0, \\ (D_1^6 + 4D_1^3D_3 - 32D_3^2 - 9D_1^2D_2^2 + 36D_2D_4)\tau_n \cdot \tau_n &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь D – билинейный дифференциальный оператор Хироты

$$\begin{aligned} D_1^{m_1}D_2^{m_2} \dots a \cdot b &= \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x'_1} \right)^{m_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x'_2} \right)^{m_2} \dots a(x_1, x_2, \dots) b(x'_1, x'_2, \dots) \Big|_{x'_i = x_i}. \end{aligned}$$

В дополнение к собственно иерархии КП существуют также и модифицированные иерархии, содержащие уравнения вида $P(D)\tau_n \cdot \tau_{n+i} = 0$ при $i \geq 1$, а также многокомпонентные иерархии. Первая модифицированная иерархия КП состоит из уравнений, содержащих две тау-функции: τ_n и τ_{n+1} . Несколько первых уравнений этой иерархии имеют вид

$$\begin{aligned} (D_1^2 + D_2)\tau_n \cdot \tau_{n+1} &= 0, \\ (D_1^3 - 4D_3 - 3D_1D_2)\tau_n \cdot \tau_{n+1} &= 0, \\ (D_1^4 + 8D_1D_3 + 3D_1^2D_2 - 6D_2^2)\tau_n \cdot \tau_{n+1} &= 0, \\ (-D_1^2D_2 + D_2^2 + 2D_4)\tau_n \cdot \tau_{n+1} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

В свою очередь, несколько низших уравнений второй модифицированной иерархии представляются в виде

$$(D_1^3 + 2D_3 + 3D_1D_2)\tau_n \cdot \tau_{n+2} = 0, \quad (4)$$

$$(D_1^4 - 4D_1D_3 - 3D_2^2 - 6D_4)\tau_n \cdot \tau_{n+2} = 0, \quad (5)$$

$$(D_1^5 - 10D_1^2D_3 - 24D_5 - 5D_1^3D_2 + 20D_3D_2)\tau_n \cdot \tau_{n+2} = 0, \quad (6)$$

а низшее уравнение третьей модифицированной иерархии есть

$$(D_1^4 + 8D_1D_3 + 6D_1^2D_2 + 36D_2^2 + 6D_4)\tau_n \cdot \tau_{n+3} = 0.$$

В данной статье для простоты ограничимся рассмотрением проблемы пфаффианизации уравнений только лишь для этих однокомпонентных иерархий.

Тау-функции, которые удовлетворяют уравнениям в однокомпонентных иерархиях, могут быть представлены в виде вронскианов или граммовых детерминантов. Мы будем исследовать только случай граммианов. Такие тау-функции можно рассматривать как узлы одномерной решетки (см. рис. 1).

Рис. 1

Грамовы детерминанты. Решения иерархий КП и модифицированных иерархий КП могут быть представлены в виде граммианов. Это детерминанты специального вида:

$$G = \left| c_{ij} + \int \phi_i \psi_j dx_1 \right| = |\mathcal{G}|. \quad (7)$$

Здесь ϕ_i и ψ_j суть функции от переменных $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots)$, удовлетворяющие условиям

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x_n} = \frac{\partial^n \phi_i}{\partial x_1^n}, \quad \frac{\partial \psi_i}{\partial x_n} = (-1)^{n+1} \frac{\partial^n \psi_i}{\partial x_1^n}.$$

Для того чтобы получить солитонные решения, надо положить

$$\phi_i = \alpha_i e^{p_i x_1 + p_i^2 x_2 + p_i^3 x_3 + \dots}, \quad \psi_i = \beta_i e^{-(q_i x_1 + q_i^2 x_2 + q_i^3 x_3 + \dots)},$$

где α_i, β_i представляют собой произвольные фазовые переменные.

Дифференцируя G по переменным x_i , получим так называемые граничные детерминанты, например

$$\frac{\partial G}{\partial x_1} = \frac{\partial |\mathcal{G}|}{\partial x_1} = - \begin{vmatrix} \mathcal{G} & \phi \\ \psi^T & 0 \end{vmatrix}.$$

Удобное сокращенное обозначение для таких граничных детерминантов есть $\left| \begin{array}{cc} \mathcal{G} & \phi \\ \psi^T & 0 \end{array} \right| = [\phi \mid \psi]$. Другие производные можно вычислить достаточно легко. Приведем здесь лишь некоторые производные низших порядков:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2} &= - \left| \begin{array}{cc} \mathcal{G} & \phi^{(1)} \\ \psi^T & 0 \end{array} \right| - \left| \begin{array}{cc} \mathcal{G} & \phi \\ \psi^{(1)T} & 0 \end{array} \right| = -[\phi^{(1)} \mid \psi] - [\phi \mid \psi^{(1)}], \\ \frac{\partial G}{\partial x_2} &= - \left| \begin{array}{cc} \mathcal{G} & \phi^{(1)} \\ \psi^T & 0 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} \mathcal{G} & \phi \\ \psi^{(1)T} & 0 \end{array} \right| = -[\phi^{(1)} \mid \psi] + [\phi \mid \psi^{(1)}], \\ \frac{\partial^3 G}{\partial x_1^3} &= - \left| \begin{array}{cc} \mathcal{G} & \phi^{(2)} \\ \psi^T & 0 \end{array} \right| - 2 \left| \begin{array}{cc} \mathcal{G} & \phi^{(1)} \\ \psi^{(1)T} & 0 \end{array} \right| - \left| \begin{array}{cc} \mathcal{G} & \phi \\ \psi^{(2)T} & 0 \end{array} \right| = \\ &= -[\phi^{(2)} \mid \psi] - 2[\phi^{(1)} \mid \psi^{(1)}] - [\phi \mid \psi^{(2)}], \end{aligned}$$

где $\phi^{(k)} = \partial^k \phi / \partial x_1^k$. Видно, что производные граммианов имеют простой вид. Это свойство граммианов позволяет легко доказать, что детерминант G удовлетворяет билинеаризованным уравнениям иерархии КП. Например, $\tau_0 = G$ оказывается решением уравнений иерархии КП. Для построения модифицированной иерархии необходимы две тау-функции. Если $\tau_0 = G$, то τ_1 и τ_{-1} оказываются граничными детерминантами:

$$\begin{aligned} \tau_1 = G_1 &= \left| \begin{array}{cc} \mathcal{G} & \phi \\ \psi^{(-1)T} & 1 \end{array} \right| = [\cdot] + [\phi \mid \psi^{(-1)}], \\ \tau_{-1} = G_{-1} &= \left| \begin{array}{cc} \mathcal{G} & \phi^{(-1)} \\ \psi^T & 1 \end{array} \right| = [\cdot] + [\phi^{(-1)} \mid \psi], \end{aligned}$$

где индекс (-1) обозначает интегрирование по x_1 , а $[\cdot]$ – сокращенное обозначение для $|\mathcal{G}|$, т.е. для основного неграничного граммиана. Как правило, при описании граничных детерминантов будут использоваться обозначения фробениусова типа [7]:

$$[\phi^{(\alpha_1)}, \dots, \phi^{(\alpha_p)} \mid \psi^{(\beta_1)}, \dots, \psi^{(\beta_p)}] := \left| \begin{array}{cccc} \mathcal{G} & \phi^{(\alpha_1)} & \dots & \phi^{(\alpha_p)} \\ \psi^{(\beta_1)T} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi^{(\beta_p)T} & 0 & \dots & 0 \end{array} \right|. \quad (8)$$

Есть две причины, по которым граммианы удобны: во-первых, их производные оказываются суммами граничных детерминантов, а во-вторых, поскольку граммианы представляют собой детерминанты, они удовлетворяют билинейным тождествам. При этом важную роль играют тождества Якоби [8]. Комбинации этих тождеств образуют билинеаризованные уравнения для (модифицированных) иерархий КП.

3. ПФАФФИАНЫ

Пфаффиан представляет собой квадратный корень из детерминанта кососимметричной матрицы. Во многих отношениях пфаффианы ведут себя очень похоже на детерминанты, но они гораздо менее изучены [9]. Пфаффиан может быть записан как треугольный массив функций $A = (a_{ij})$, где $1 \leq i < j \leq n$. Пфаффиан массива A , $\text{pf } A$, определен

следующим образом. При нечетных n $\text{pf } A = 0$, а для четных n имеет место формула

$$\text{pf } A = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{n-1n} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma} \text{sgn } \sigma a_{i_1 i_2} a_{i_3 i_4} \dots a_{i_{n-1} i_n}, \quad (9)$$

где суммирование ведется по всем перестановкам $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$, удовлетворяющим условиям $i_1 < i_2, i_3 < i_4, \dots, i_{n-1} < i_n, i_1 < i_3 < \dots < i_{n-1}$, и $\text{sgn } \sigma = \pm 1$ обозначает четность перестановки σ . Например, при $n = 2$ получим $\text{pf } A = a_{12}$, а при $n = 4$

$$\text{pf } A = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ & a_{23} & a_{24} \\ & & a_{34} \end{vmatrix} = a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23}.$$

Для пфаффианов существует компактное обозначение. Рассмотрим набор меток $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ и кососимметричное спаривание $(\cdot, \cdot)$. Если m четно, то

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) := \begin{vmatrix} (\alpha_1, \alpha_2) & (\alpha_1, \alpha_3) & \dots & (\alpha_1, \alpha_m) \\ & (\alpha_2, \alpha_3) & \dots & (\alpha_2, \alpha_m) \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & (\alpha_{m-1}, \alpha_m) \end{vmatrix},$$

и если m нечетно, то $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) := 0$. Например, можно записать $\text{pf } A = (1, 2, \dots, n)$, где $(i, j) := a_{ij}$.

Из определения пфаффиана (9) следует, что при перестановке меток α_i и α_j четность каждой перестановки σ в сумме меняет знак. Таким образом, при $1 \leq i \leq j \leq m$ получим

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_m) = -(\alpha_1, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_m), \quad (10)$$

т.е. $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ для любого m оказывается антисимметричным выражением, обращающимся в нуль, если какие-либо две метки одинаковы.

Важным свойством пфаффианов, как и детерминантов, является то, что они удовлетворяют билинейным тождествам, схожим с тождествами Якоби или с разложениями Лапласа для детерминантов. Но выписать общий вид пфаффианного тождества намного легче, чем общий вид детерминантного тождества.

Рассмотрим два набора меток $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ и $\beta_1, \dots, \beta_q$. Используя краткие обозначения, получим

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^q (-1)^i (\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_i) (\beta_1, \dots, \hat{\beta}_i, \dots, \beta_q) + \\ & + \sum_{j=1}^p (-1)^j (\alpha_1, \dots, \hat{\alpha}_j, \dots, \alpha_p) (\beta_1, \dots, \beta_q, \alpha_j) = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где запись $\hat{\alpha}_j$ ($\hat{\beta}_j$) означает, что величина α_j (β_j) отсутствует.

Наиболее часто используемый пример применения этого тождества получается при выборе первого набора меток в виде $1, 2, \dots, n, \alpha, \beta, \gamma$, а второго в виде $1, 2, \dots, n, \delta$. Поскольку эти два набора имеют много совпадающих меток, то большинство членов в формуле (11) обращаются в нуль, и в результате получается тождество

$$(1, 2, \dots, n, \alpha, \beta, \gamma, \delta)(1, 2, \dots, n) - (1, 2, \dots, n, \alpha, \beta)(1, 2, \dots, n, \gamma, \delta) + \\ + (1, 2, \dots, n, \alpha, \gamma)(1, 2, \dots, n, \beta, \delta) - (1, 2, \dots, n, \alpha, \delta)(1, 2, \dots, n, \beta, \gamma) = 0. \quad (12)$$

Это соотношение называется соотношением Плюккера пфаффианова типа. Заметим, что в нем встречаются четыре билинейных члена, в то время как в простейшем детерминантном тождестве встречаются три билинейных члена.

Подобно детерминантам пфаффианы оказываются решениями некоторых интегрируемых, или солитонных, билинейных уравнений. Наиболее известным примером является уравнение B -КП [1]

$$(9u_{x_5} + 15u_x(u_{xxx} - u_{x_3}) + 15u_x^3 + u_{xxxxx} - 5u_{xxx_3})_x - 5u_{x_3x_3} = 0.$$

Это уравнение в представлении Хироты имеет вид

$$(D_1^6 - 5D_1^3 D_3 - 5D_3^2 + 9D_1 D_5)\tau \cdot \tau = 0, \quad x = x_1,$$

если обозначить $u = 2(\ln \tau)_x$. Класс решений, включающий N -солитонное решение, может быть записан в виде пфаффиана $\tau = (1, 2, \dots, 2N)$ со следующими матричными элементами:

$$a_{ij} = (i, j) = c_{ij} + \int \left[\left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x_1} \right) \phi_j - \phi_i \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x_1} \right) \right] dx_1, \quad c_{ij} = -c_{ji}. \quad (13)$$

В этом частном примере присутствуют только переменные x_1, x_3, x_5 , имеющие нечетные веса. Существуют примеры, в которых встречаются переменные как нечетных, так и четных весов. Важным примером, в котором имеются переменные нечетных и четных весов, являются связанные иерархии КП [4]. В них можно выделить пфаффианы двух различных типов, которые удовлетворяют уравнениям связанных иерархий КП, а именно пфаффианы типа вронскианов и пфаффианы граммианова типа. В двух последующих разделах будут рассматриваться пфаффианы граммианова типа. Более подробное изложение можно найти в работе [4].

4. ПФАФФИАНЫ ГРАММИАНОВА ТИПА И ИХ РЕДУКЦИЯ К ГРАММИАНАМ

Пфаффианы граммианова типа — это пфаффианы с матричными элементами вида

$$(i, j) = d_{ij} + \int (f_i g_j - f_j g_i) dx_1, \quad d_{ij} = -d_{ji}, \quad (14)$$

где функции f_i и g_i удовлетворяют линейным дифференциальным уравнениям

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_n} = \frac{\partial^n f_i}{\partial x_1^n}, \quad \frac{\partial g_i}{\partial x_n} = (-1)^{n-1} \frac{\partial^n g_i}{\partial x_1^n}.$$

Один из примеров такого пфаффиана – это уже упоминавшийся пфаффиан B -КП (см. уравнение (13)). В этом частном случае получим

$$f_i = \frac{\partial \phi_i}{\partial x_1}, \quad g_i = \phi_i,$$

и в этом пфаффиане присутствуют переменные только нечетных весов. В общем случае встречаются переменные как нечетных, так и четных весов.

Производные матричных элементов пфаффиана имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_n}(i, j) = & \left(\frac{\partial^{n-1} f_i}{\partial x_1^{n-1}} g_j - \frac{\partial^{n-2} f_i}{\partial x_1^{n-2}} \frac{\partial g_j}{\partial x_1} + \frac{\partial^{n-3} f_i}{\partial x_1^{n-3}} \frac{\partial^2 g_j}{\partial x_1^2} - \dots + (-1)^{n-1} f_i \frac{\partial^{n-1} g_j}{\partial x_1^{n-1}} \right) - \\ & - \left(\frac{\partial^{n-1} f_j}{\partial x_1^{n-1}} g_i - \frac{\partial^{n-2} f_j}{\partial x_1^{n-2}} \frac{\partial g_i}{\partial x_1} + \frac{\partial^{n-3} f_j}{\partial x_1^{n-3}} \frac{\partial^2 g_i}{\partial x_1^2} - \dots + (-1)^{n-1} f_j \frac{\partial^{n-1} g_i}{\partial x_1^{n-1}} \right). \end{aligned}$$

Для переменных низших весов получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1}(i, j) &= f_i g_j - f_j g_i = -(i, j, f^{(0)}, g^{(0)}), \\ \frac{\partial}{\partial x_2}(i, j) &= \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1} g_j - f_i \frac{\partial g_j}{\partial x_1} \right) - \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_1} g_i - f_j \frac{\partial g_i}{\partial x_1} \right) = \\ &= (i, j, f^{(0)}, g^{(1)}) - (i, j, f^{(1)}, g^{(0)}), \\ \frac{\partial}{\partial x_3}(i, j) &= \left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_1^2} g_j - \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \frac{\partial g_j}{\partial x_1} + f_i \frac{\partial^2 g_j}{\partial x_1^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 f_j}{\partial x_1^2} g_i - \frac{\partial f_j}{\partial x_1} \frac{\partial g_i}{\partial x_1} + f_j \frac{\partial^2 g_i}{\partial x_1^2} \right) = \\ &= -(i, j, f^{(0)}, g^{(2)}) + (i, j, f^{(1)}, g^{(1)}) - (i, j, f^{(2)}, g^{(0)}), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} (i, f^{(n)}) &= \frac{\partial^n f_i}{\partial x_1^n}, \quad (i, g^{(n)}) = \frac{\partial^n g_i}{\partial x_1^n}, \\ (f^{(n)}, f^{(m)}) &= (g^{(n)}, g^{(m)}) = (f^{(n)}, g^{(m)}) = 0. \end{aligned}$$

Можно свести пфаффианы к граммаианам, которые являются решениями стандартной иерархии КП, если наложить ограничения на функции f_i и g_i . Положим

$$\begin{aligned} f_i &= \begin{cases} \phi_i, & 1 \leq i \leq N, \\ 0, & N < i \leq 2N, \end{cases} \quad g_i = \begin{cases} 0, & 1 \leq i \leq N, \\ \psi_{i-N}, & N < i \leq 2N, \end{cases} \\ d_{ij} &= \begin{cases} 0, & i, j \leq N, \\ 0, & i, j > N, \\ c_{ij}, & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \end{aligned}$$

тогда матричные элементы пфаффиана примут вид

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & 1 \leq i, j \leq N, \\ 0, & N < i, j \leq 2N, \\ c_{i,j-N} + \int \phi_i \psi_j dx, & 1 \leq i \leq N < j \leq 2N. \end{cases}$$

Таким образом, при этих ограничениях пфаффиан граммианова типа $(1, 2, 3, \dots, 2N)$ можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & c_{11} + \int \phi_1 \psi_1 dx & \dots & c_{1N} + \int \phi_1 \psi_N dx \\ & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & 0 & \vdots & & \vdots \\ & & & c_{N1} + \int \phi_N \psi_1 dx & \dots & c_{NN} + \int \phi_N \psi_N dx \\ & & & 0 & \dots & 0 \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{N-1} |\mathcal{G}|,$$

а граничные пфаффианы могут быть записаны как граничные граммианы:

$$\begin{aligned} & (1, 2, \dots, 2N, f^{(\alpha_1)}, \dots, f^{(\alpha_p)}, g^{(\beta_1)}, \dots, g^{(\beta_q)}) = \\ & = \begin{cases} (-1)^{(N+1)(r+1)} \begin{vmatrix} \mathcal{G} & \phi^{(\alpha_1)} & \dots & \phi^{(\alpha_r)} \\ \psi^{(\beta_1)\top} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi^{(\beta_r)\top} & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}, & r = q = p, \\ 0, & p \neq q. \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

Тем самым, если ввести обозначение $(\phi^{(\alpha_1)}, \dots, \phi^{(\alpha_p)} \mid \psi^{(\beta_1)}, \dots, \psi^{(\beta_q)})$ для $(1, 2, \dots, 2N, f^{(\alpha_1)}, \dots, f^{(\alpha_p)}, g^{(\beta_1)}, \dots, g^{(\beta_q)})$, можно переписать формулу (15) в виде

$$\begin{aligned} & (\phi^{(\alpha_1)}, \dots, \phi^{(\alpha_p)} \mid \psi^{(\beta_1)}, \dots, \psi^{(\beta_q)}) = \\ & = \begin{cases} (-1)^{(N+1)(r+1)} [\phi^{(\alpha_1)}, \dots, \phi^{(\alpha_r)} \mid \psi^{(\beta_1)}, \dots, \psi^{(\beta_r)}], & r = q = p, \\ 0, & p \neq q. \end{cases} \end{aligned} \quad (16)$$

Заметим, что в этих формулах объекты в круглых скобках суть пфаффианы, в то время как объекты в квадратных скобках представляют собой граммианы.

Таким образом, при такой редукции граничные пфаффианы типа

$$(1, 2, \dots, 2N, f^{(p)}, f^{(q)}), \quad (1, 2, \dots, 2N, g^{(p)}, g^{(q)}) \quad (17)$$

обращаются в нуль, в то время как до редукции они были ненулевыми. В этом подходе можно рассматривать граммианы как непосредственные редукции (или ограничения) пфаффианов. Это позволяет работать только с пфаффианами и рассматривать граммианы как класс решений, содержащихся внутри множества пфаффианов. Однако пфаффианы сами по себе не являются решениями билинейных уравнений стандартных иерархий КП. Они являются решениями уравнений с дополнительными билинейными членами, что и будет показано в следующем разделе. Эти дополнительные билинейные члены содержат пфаффианы вида (17).

5. ПФАФФИАНИЗОВАННЫЕ ИЕРАРХИИ

Вид уравнений пфаффианизованных иерархий оказывается одним и тем же для иерархий обоих типов: вронскианного и граммианного типов. В данной работе рассматриваются только иерархии граммианного типа.

Иерархия КП. Несколько первых уравнений стандартной иерархии КП имеют вид (1), (2). Если граммианные решения этих уравнений заменить на пфаффианы граммианова типа, то уравнения перестают выполняться. Тем не менее, добавляя дополнительные билинейные члены в уравнения, можно добиться того, что эти уравнения будут удовлетворяться и для пфаффианов. Для каждого уравнения процедура, в сущности, оказывается одинаковой, так что достаточно рассмотреть подробно только низшее уравнение иерархии (собственно уравнение КП) и лишь сформулировать результаты для старших членов иерархии.

Заменяем решение граммианного типа $G = [\cdot]$ в уравнении КП пфаффианом $\tau_0 = (1, 2, 3, \dots, 2N) = (\cdot)$, тем самым получим уравнение

$$\begin{aligned} (D_1^4 - 4D_1D_3 + 3D_2^2)\tau_0 \cdot \tau_0 &= 2\{(\partial_1^4 - 4\partial_1\partial_3 + 3\partial_2^2)\tau_0\}\tau_0 - \\ &- 2\{(4\partial_1^3 - 4\partial_3)\tau_0\}\{\partial_1\tau_0\} + 6\{(\partial_1^2 - \partial_2)\tau_0\}\{(\partial_1^2 + \partial_2)\tau_0\} = \\ &= -24(1, 2, \dots, 2N, f^{(0)}, f^{(1)}, g^{(0)}, g^{(1)})(1, 2, \dots, 2N) - \\ &- 24(1, 2, \dots, 2N, f^{(1)}, g^{(1)})(1, 2, \dots, 2N, f^{(0)}, g^{(0)}) + \\ &+ 24(1, 2, \dots, 2N, f^{(0)}, g^{(1)})(1, 2, \dots, 2N, f^{(1)}, g^{(0)}). \end{aligned}$$

Используя тождество (12), в котором надо положить $n = 2N$, $\alpha = f^{(0)}$, $\beta = f^{(1)}$, $\gamma = g^{(0)}$ и $\delta = g^{(1)}$, получим

$$(D_1^4 - 4D_1D_3 + 3D_2^2)\tau_0 \cdot \tau_0 = -24(1, 2, \dots, 2N, f^{(0)}, f^{(1)})(1, 2, \dots, 2N, g^{(0)}, g^{(1)}).$$

Выбор $\tilde{\sigma}_0 = (1, 2, \dots, 2N, f^{(0)}, f^{(1)})$ и $\sigma_0 = -(1, 2, \dots, 2N, g^{(0)}, g^{(1)})$ дает

$$(D_1^4 - 4D_1D_3 + 3D_2^2)\tau_0 \cdot \tau_0 - 24\tilde{\sigma}_0\sigma_0 = 0.$$

В самом деле, при подходящем определении величин σ_n и $\tilde{\sigma}_n$ имеем

$$(D_1^4 - 4D_1D_3 + 3D_2^2)\tau_n \cdot \tau_n - 24\tilde{\sigma}_n\sigma_n = 0. \quad (18)$$

Применяя сходную процедуру к старшим членам иерархии, получим

$$(D_1^3D_2 + 2D_3D_2 - 3D_1D_4)\tau_n \cdot \tau_n - 12D_1\tilde{\sigma}_n \cdot \sigma_n = 0, \quad (19)$$

$$(D_1^6 - 20D_1^3D_3 - 80D_3^2 + 144D_1D_5 - 45D_1^2D_2^2)\tau_n \cdot \tau_n + 360D_1^2\tilde{\sigma}_n \cdot \sigma_n = 0, \quad (20)$$

$$(D_1^6 + 4D_1^3D_3 - 32D_3^2 - 9D_1^2D_2^2 + 36D_2D_4)\tau_n \cdot \tau_n + 72(D_1^2 - 2D_2)\tilde{\sigma}_n \cdot \sigma_n = 0. \quad (21)$$

Рис. 2

Можно расширить одномерную решетку таким образом, чтобы включить узлы, соответствующие σ_n и $\tilde{\sigma}_n$. Вышеприведенные уравнения связывают функции в вертикальном направлении решетки, как показано на рис. 2. Эти уравнения представляют собой часть уравнений связанных иерархий КП и могут быть найдены в работе [4].

Пфаффианная версия уравнений первой модифицированной иерархии КП. Несколько первых уравнений первой модифицированной иерархии КП задаются уравнениями (3). Пфаффианские версии этих уравнений получаются тем же способом, что и уравнения иерархии КП. Для каждого уравнения иерархии надо использовать различные тождества вида (11). Несколько первых уравнений модифицированной пфаффианской иерархии КП имеют вид

$$\begin{aligned}
 (D_1^2 + D_2)\tau_n \cdot \tau_{n+1} - 2\tilde{\sigma}_n \sigma_{n+1} &= 0, \\
 (D_1^3 - 4D_3 - 3D_1D_2)\tau_n \cdot \tau_{n+1} + 6D_1\tilde{\sigma}_n \cdot \sigma_{n+1} &= 0, \\
 (D_1^4 + 8D_1D_3 + 3D_1^2D_2 - 6D_2^2)\tau_n \cdot \tau_{n+1} + 6(D_1^2 - 2D_2)\tilde{\sigma}_n \cdot \sigma_{n+1} &= 0, \\
 (-D_1^2D_2 + D_2^2 + 2D_4)\tau_n \cdot \tau_{n+1} + 2D_1^2\tilde{\sigma}_n \cdot \sigma_{n+1} &= 0.
 \end{aligned} \tag{22}$$

Эти уравнения связывают между собой различные комбинации функций на решетке (см. рис. 3).

Рис. 3

Вторая модифицированная иерархия КП и другие уравнения. Пфаффианская версия первого уравнения второй модифицированной иерархии КП (4) имеет вид

$$(D_1^3 + 2D_3 + 3D_1D_2)\tau_n \cdot \tau_{n+2} + 6(\tilde{\sigma}_{n+1}\mu_{n+1} + \sigma_{n+1}\tilde{\mu}_{n+1}) = 0, \tag{23}$$

где μ_{n+1} и $\tilde{\mu}_{n+1}$ представляют собой новые граничные пфаффианы. Непонятно, можно ли получить эти пфаффианы из комбинаций производных от уже известных величин из теории интегрируемых систем или они представляют собой новые объекты.

Имеются также пфаффианные тождества на величины τ_n и σ_n , которые невозможно получить непосредственно с помощью пфаффианизации какого-либо известного грамм-ианного уравнения (см. рис. 4), например

$$\begin{aligned} (D_1^3 + 2D_3 + 3D_1D_2)\sigma_n \cdot \tau_n &= 0, \\ (D_1^4 - 4D_1D_3 - 3D_2^2 - 6D_4)\sigma_n \cdot \tau_n &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Также имеют место аналогичные соотношения на τ_n и $\tilde{\sigma}_n$:

$$\begin{aligned} (D_1^3 + 2D_3 - 3D_1D_2)\tilde{\sigma}_n \cdot \tau_n &= 0, \\ (D_1^4 - 4D_1D_3 - 3D_2^2 + 6D_4)\tilde{\sigma}_n \cdot \tau_n &= 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Рис. 4

Уравнения (24), (25) образуют уравнения старших порядков в связанных иерархиях КП. В этих уравнениях также можно узнать уравнения вторых модифицированных иерархий КП, несмотря на то что эти уравнения допускают пфаффианные решения, в отличие от обычных детерминантных решений.

Описанная выше решеточная структура может быть расширена до полностью двумерной решетки. Уравнения (24), (25) при этом выполняются всюду на решетке. Однако, поскольку мы собираемся исследовать сравнительно простой пример, это расширение не будет рассматриваться.

В действительности имеется еще больше возможностей для обобщений уравнений. Например, если ввести поля $\chi_0 = (1, 2, \dots, 2N-1, g^{(0)})$ и $\tilde{\chi}_0 = (1, 2, \dots, 2N-1, f^{(0)})$, то в результате можно получить уравнение

$$(D_1^2 + D_2)\tau_0 \cdot \tilde{\chi}_0 - 2\tilde{\sigma}_0\chi_0 = 0.$$

Если поместить эти новые поля χ и $\tilde{\chi}$ в уже построенную решетку, то наиболее уместно это сделать, расположив их между узлами τ и σ и между узлами τ и $\tilde{\sigma}$, как показано на рис. 5 (подробнее см. [10]).

Рис. 5

6. РЕДУКЦИИ

Итак, мы построили обобщение билинейных уравнений иерархии КП на билинейные пфаффианизованные уравнения. Это дает уравнения, связывающие между собой функции в различных узлах двумерной решетки. Основной вопрос, возникающий в этой связи: можно ли выбрать такой набор этих уравнений, что в результате редукции получится новая интегрируемая система? Для того чтобы ответить на этот вопрос, исследуем лишь один пример, а именно пфаффианизованную систему Каупа–Купершмидта.

Стандартная (непфаффианизованная) редукция иерархии КП в систему Каупа–Купершмидта. Стандартная система Каупа–Купершмидта получается при наложении условия C -редукции с последующей 3-редукцией некоторых из уравнений иерархии КП. Поскольку при этом в игру включается только одна тау-функция, правильно описывать C -редукцию, налагая на тау-функцию условие инвариантности относительно замены переменных $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) \rightarrow \hat{\mathbf{x}} = (x_1, -x_2, x_3, -x_4, \dots)$, т.е. $\tau(\mathbf{x}) = \tau(\hat{\mathbf{x}})$. Тем самым тау-функция оказывается четной функцией от переменных четных порядков, что явно следует из разложения по переменным четных порядков:

$$\begin{aligned} \tau(\mathbf{x}) &= F(x_1, x_3, \dots) + x_2 F_2(x_1, x_3, \dots) + \\ &\quad + x_4 F_4(x_1, x_3, \dots) + \dots + x_2^2 J(x_1, x_3, \dots) + \dots, \\ \tau(\hat{\mathbf{x}}) &= F(x_1, x_3, \dots) - x_2 F_2(x_1, x_3, \dots) - \\ &\quad - x_4 F_4(x_1, x_3, \dots) + \dots + x_2^2 J(x_1, x_3, \dots) + \dots. \end{aligned}$$

Наложение условия $\tau(\mathbf{x}) = \tau(\hat{\mathbf{x}})$ при этом дает

$$\tau(\mathbf{x}) = F(x_1, x_3, \dots) + x_2^2 J(x_1, x_3, \dots) + \dots.$$

Рассматривая первое уравнение иерархии КП и одно из уравнений шестого порядка, получим

$$(D_1^4 - 4D_1 D_3 + 3D_2^2) \tau_n \cdot \tau_n = 0 \rightarrow (D_1^4 - 4D_1 D_3) F \cdot F + 6JF = 0$$

и

$$\begin{aligned} (D_1^6 - 20D_1^3 D_3 - 80D_3^2 + 144D_1 D_5 - 45D_1^2 D_2^2) \tau_n \cdot \tau_n &= 0 \rightarrow \\ \rightarrow (D_1^6 - 20D_1^3 D_3 - 80D_3^2 + 144D_1 D_5) F \cdot F - 90D_1^2 F \cdot J &= 0. \end{aligned}$$

Выполним теперь 3-редукцию, что в рассматриваемых уравнениях сводится к отбрасыванию переменных веса 3, и в результате получим

$$\begin{aligned}(D_1^4)F \cdot F + 6JF &= 0, \\ (D_1^6 + 144D_1^2D_5)F \cdot F - 90D_1^2F \cdot J &= 0.\end{aligned}$$

Выбирая $u = (\ln F)_{xx}$, $x_1 = x$ и $x_5 = t$, получим уравнение Каупа–Купершмидта

$$36u_t + (4u_{xxxx} + 60uu_{xx} + 60u^3 + 45u_x^2)_x = 0.$$

Пфаффианизованная версия уравнения Каупа–Купершмидта. Пфаффианизованная версия требует введения трех “тау-функций” τ , σ и $\tilde{\sigma}$. При этом C -редукция дает

$$\begin{aligned}\tau(\mathbf{x}) &= \tau(\widehat{\mathbf{x}}), \\ \sigma(\mathbf{x}) &= -\tilde{\sigma}(\widehat{\mathbf{x}}), \\ \tilde{\sigma}(\mathbf{x}) &= -\sigma(\widehat{\mathbf{x}}).\end{aligned}$$

Из этой редукции следует, что указанные функции могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned}\tau(\mathbf{x}) &= F(x_1, x_3, \dots) + x_2^2 J(x_1, x_3, \dots) + \dots, \\ \sigma(\mathbf{x}) &= G(x_1, x_3, \dots) + x_2 H(x_1, x_3, \dots) + \dots, \\ \tilde{\sigma}(\mathbf{x}) &= -G(x_1, x_3, \dots) + x_2 H(x_1, x_3, \dots) + \dots.\end{aligned}$$

После подстановки этих выражений в билинейные уравнения (18), (20) получим

$$\begin{aligned}(D_1^4 - 4D_1D_3)F \cdot F + 6JF + 24G^2 &= 0, \\ (D_1^6 - 20D_1^3D_3 - 80D_3^2 + 144D_1D_5)F \cdot F - 90D_1^2F \cdot J - 360D_1^2G \cdot G &= 0.\end{aligned}\tag{26}$$

Как и в других случаях пфаффианизации, число полей опять намного больше числа уравнений. Поэтому необходимо вводить новые билинейные уравнения. Наиболее очевидные уравнения – это уравнения вида $P(D)\sigma \cdot \tau$:

$$\begin{aligned}(D_1^3 + 2D_3 + 3D_1D_2)\sigma \cdot \tau &= 0 \rightarrow (D_1^3 + 2D_3)G \cdot F + 3D_1H \cdot F = 0, \\ (D_1^5 - 10D_1^2D_3 + 24D_5 - 5D_1^3D_2 + 20D_3D_2)\sigma \cdot \tau &= 0 \rightarrow \\ \rightarrow (D_1^5 - 10D_1^2D_3 + 24D_5)G \cdot F - (5D_1^3 - 20D_3)H \cdot F &= 0.\end{aligned}\tag{27}$$

Как и ранее, при 3-редукции следует убрать зависимость от переменной x_3 , при этом уравнения (26), (27) принимают вид

$$\begin{aligned}(D_1^4)F \cdot F + 6JF + 24G^2 &= 0, \\ (D_1^6 + 144D_1D_5)F \cdot F - 90D_1^2J \cdot F - 360D_1^2G \cdot G &= 0, \\ (D_1^3)G \cdot F + 3D_1H \cdot F &= 0, \\ (D_1^5 + 24D_5)G \cdot F - 5D_1^3H \cdot F &= 0.\end{aligned}\tag{28}$$

Чтобы превратить эту систему обратно в нелинейную систему, используем преобразования

$$u = (\ln F)_{xx}, \quad v = \frac{G}{F}, \quad x = x_1, \quad t = x_5,$$

что дает

$$\begin{aligned} 36u_t + (4u_{xxxx} + 60uu_{xx} + 60u^3 + 45u_x^2)_x + 360v_x v_{xx} &= 0, \\ 36v_t + 4v_{xxxx} + 60uv_{xx} + 30u_x v_{xx} + 30(u_{xx} + 6u^2)v_x &= 0. \end{aligned}$$

Эта система представляет собой пфаффианизованную версию уравнения Каупа–Купершмидта.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе исследовались однокомпонентные иерархии КП, которые имеют детерминантные решения. Эти иерархии были обобщены на иерархии, имеющие пфаффианные решения. Целью этой процедуры было построить как можно более общий подход к процедуре пфаффианизации, для того чтобы получать новые интегрируемые системы с помощью редукций уравнений, входящих в пфаффианизованные иерархии. Эта процедура была проиллюстрирована на одном примере – пфаффианизованном уравнении Каупа–Купершмидта.

Полученные нами пфаффианизованные уравнения связаны с алгебрами Ли типов B и D [5], [6]. Некоторые из этих уравнений уже были ранее получены с использованием подхода свободных фермионов.

Практический интерес представляет вопрос, можно ли с помощью этого метода получить новые простые интегрируемые системы. Мы не претендовали на то, чтобы получить полный список возможных уравнений, поскольку существует множество уравнений, допускающих пфаффианные решения. Кроме того, не рассматривался многокомпонентный случай. Эти вопросы заслуживают отдельного исследования.

Список литературы

- [1] *M. Jimbo, T. Miwa.* Publ. RIMS Kyoto Univ. 1983. V. 19. P. 943–1001.
- [2] *E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara, T. Miwa.* J. Phys. Soc. Japan. 1981. V. 50. P. 3813–3818.
- [3] *Y. Ohta, J. J. C. Nimmo, C. R. Gilson.* Glasgow Math. J. A. 2001. V. 43. P. 99–108; *К.Р. Гилсон, Дж. Дж. К. Ниммо.* ТМФ. 2001. Т. 128. № 1. С. 43–55; *C. R. Gilson, J. J. C. Nimmo, S. Tsujimoto.* J. Phys. A. 2001. V. 34. P. 10569–10575.
- [4] *R. Hirota, Y. Ohta.* J. Phys. Soc. Japan. 1991. V. 60. P. 798–801.
- [5] *M. Adler, T. Shiota, P. van Moerbeke.* Pfaff τ -functions. solv-int/9909010; *M. Adler, P. van Moerbeke.* Symmetric random matrices and the Pfaff lattice. solv-int/9903009.
- [6] *V. Kac, J. van de Leur.* CRM Proc. Lect. Notes. 1998. V. 14. P. 159–202.
- [7] *C. R. Gilson, J. J. C. Nimmo, Y. Ohta.* Determinantal and Pfaffian solutions of Hirota bilinear equations. Chapter in “The Bilinear Handbook”. (to be published).
- [8] *A. C. Aitken.* Determinants and Matrices. Edinburgh: Oliver and Boyd, 1952.
- [9] *E. R. Caianiello.* Combinatorics and Renormalisation in Quantum Field Theory. Reading, MA: Benjamin, 1973.
- [10] *C. R. Gilson.* Bilinear Pfaffian equations and the KP hierarchies. (in preparation).