Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. А. Калякин, Асимптотическое решение задачи об авторезонансе, *ТМФ*, 2002, том 133, номер 3, 429–438

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf409>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 12:37:45

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ АВТОРЕЗОНАНСЕ

Исследуется задача о вынужденных колебаниях вблизи устойчивого положения равновесия для двумерной нелинейной гамильтоновой системы уравнений. Заданная вынуждающая сила представляет собой быстро осциллирующие колебания с малой амплитудой и медленно меняющейся частотой. Выясняются условия, при которых фазовая траектория системы под влиянием такого возмущения уходит от начальной точки равновесия на расстояние порядка единицы. Исследование задачи проводится путем построения асимптотического решения с использованием малого амплитудного параметра. Решение представляется для не слишком малых времен вне начального пограничного слоя.

Ключевые слова: нелинейные колебания, резонанс, асимптотика, усреднение.

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Постановка задачи. Рассмотрим систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром ε :

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \Omega(\mathbf{u}) = \varepsilon \mathbf{F}\left(\frac{\Phi(\tau)}{\varepsilon}; \tau\right), \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \tau = \varepsilon t, \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (1.1)$$

Здесь $\Omega(\mathbf{u})$, $\mathbf{F}(\varphi; \tau) \in \mathbb{R}^2$ – заданные гладкие (бесконечно дифференцируемые) вектор-функции; $\mathbf{F}(\varphi; \tau)$ является 2π -периодической функцией по быстрой переменной $\varphi = \Phi(\tau)/\varepsilon$ с $\Phi(0) = 0$. Переменная $\tau = \varepsilon t$ обычно называется медленным временем. Система предполагается гамильтоновой с голоморфным гамильтонианом $H(u, v)$, $\mathbf{u} = (u, v)$. Считается, что невозмущенные уравнения имеют в начале координат устойчивое положение равновесия типа “центр” общего положения; таким образом, $\Omega(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, собственные значения матрицы $\partial_{\mathbf{u}}\Omega(\mathbf{0})$ являются чисто мнимыми и не равны нулю. Начальные данные задаются в точке равновесия, либо вблизи нее:

$$\mathbf{u}(t; \varepsilon)|_{t=0} = \varepsilon \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad \alpha_1, \alpha_2 = \text{const}. \quad (1.2)$$

*Институт математики Уфимского научного центра РАН, Уфа, Россия. E-mail: klen@imat.rb.ru

Мы ставим задачу о построении асимптотики решения $\mathbf{u}(t; \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, пригодной на большом временном интервале $0 < t \leq \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$. Интерес представляет случай авторезонанса, когда амплитуда решения $|\mathbf{u}(t; \varepsilon)|$ вырастает со временем до величины порядка единицы при том, что вынуждающая сила (накачка) остается малой: $\varepsilon \mathbf{F}(\varphi; \tau) = \mathcal{O}(\varepsilon)^1$. Данная работа посвящена выяснению условий возникновения этого явления путем исследования асимптотического решения уравнения (1.1).

1.2. Уточнение исходных данных. Структура рассматриваемой точки равновесия подразумевает, что в ее окрестности невозмущенная система (при $\varepsilon \mathbf{F} \equiv \mathbf{0}$) имеет двухпараметрическое семейство периодических по t решений $\mathbf{u}^0(t + \psi; E)$, $\psi, E = \text{const}$. Считается, что точка равновесия соответствует нулевому значению параметра E : $\mathbf{u}^0(t + \psi; 0) \equiv \mathbf{0}$. Этот параметр, как первый интеграл системы, отождествляется с энергией: $E = H(u^0, v^0)$, которая может принимать значения на некотором промежутке $E \in (0, e_0) \subset \mathbb{R}$. Период невозмущенных (собственных) колебаний $T = T(E)$ и частота $\omega = 2\pi/T(E)$ в нелинейной системе, как правило, зависят от энергии E . В дальнейшем считается, что зависимость от E существенная, так что $T'(E) \neq 0$, $\omega'(E) \neq 0$.

1.3. Известные результаты для похожих задач. Возмущение периодических движений с давних пор представляет собой одну из популярных задач нелинейной механики и теории колебаний. В качестве возмущений чаще всего рассматриваются функции $\mathbf{F}(\mathbf{u}; \tau)$, зависящие от искомого движения $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t; \varepsilon)$ и, может быть, от медленного времени $\tau = \varepsilon t$. Известно, что при таких возмущениях главный член асимптотики описывается решением невозмущенной системы $\mathbf{u}(t; \varepsilon) \approx \mathbf{u}^0([\varepsilon^{-1}S(\tau) + \Psi(\tau)]/\omega(E); E(\tau))$, в котором медленно меняются как фазовые функции $S, \Psi(\tau)$, так и энергия $E(\tau)$. При этом энергия изменяется на конечную величину порядка $\mathcal{O}(1)$ за большой промежуток времени $0 < t \leq \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$, если начальная точка находится вдали от положения равновесия (см. [1]–[3]). Если начальная точка берется вблизи устойчивого положения равновесия на расстоянии $\mathcal{O}(\varepsilon)$, то решение остается в малой окрестности порядка $\mathcal{O}(\varepsilon)$ в течение долгого времени $0 < t \leq \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$ [4].

Задачи с возмущениями, которые явно зависят от быстрого времени, $\mathbf{F}(t; \tau)$, обычно связываются с изучением нелинейного резонанса и синхронизации колебаний. В случае периодических по t возмущений здесь возможен резонанс со значительным ростом амплитуды вынужденных колебаний. В частности, известно, что для решений, начинающихся из положения равновесия, амплитуда может вырасти до величины порядка $\mathcal{O}(\varepsilon^{1/2})$. При фиксированной частоте накачки больший рост невозможен, поскольку нарушается резонансное условие из-за изменения собственной частоты системы с ростом

¹⁾Значительный по сравнению с вынуждающей силой рост амплитуды вынужденных колебаний обычно связывается с резонансом. Простейшая математическая модель такого явления представляется линейным уравнением гармонического осциллятора $u'' + \omega^2 u = \cos \nu t$. В случае, когда накачка осциллирует с собственной частотой: $\omega^2 = \nu^2$, амплитуда вынужденных колебаний неограниченно растет: $u = (2t/\nu) \sin \nu t$. Подобное явление в случае нелинейных систем связывается с понятием авторезонанса.

энергии [2], [3]. Иная ситуация складывается при медленном изменении частоты накачки. Амплитуда вынужденных колебаний здесь может достигать величины порядка единицы. Первоначально идея использования такой накачки была выдвинута физиками и разрабатывалась в связи с созданием ускорителей [5]. В последние годы найдены другие области нелинейных явлений, в которых обнаруживаются похожие эффекты [6], [7]. Были проведены численные эксперименты и аналитические исследования ряда моделей такого явления, названного авторезонансом [7]. Все аналитические исследования в этом направлении так или иначе используют асимптотические приближения. Однако последовательный асимптотический анализ задач об авторезонансе до сих пор не проводился даже для простых моделей, и условия авторезонанса не были отчетливо сформулированы.

1.4. Основной результат. Для рассматриваемой нами задачи (1.1), (1.2) основной результат выглядит довольно естественно. Вынужденные колебания в главном члене асимптотики описываются решением невозмущенной системы

$$\mathbf{u}(t; \varepsilon) = \mathbf{u}^0 \left(\frac{\varepsilon^{-1} \Phi(\tau) + \Psi(\tau)}{\omega}; E(\tau) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (1.3)$$

с медленно деформирующимися параметрами $\Psi(\tau)$, $E(\tau)$, $\omega(E(\tau))$, $\tau = \varepsilon t$. Деформация энергии $E(\tau)$ определяется из резонансного требования совпадения собственной и вынуждающей частот

$$\omega(E) = \Phi'(\tau), \quad E(0) = 0. \quad (1.4)$$

Сдвиг фазы Ψ находится из нелинейного уравнения, которое является следствием секулярного условия для первой поправки. Это уравнение выписывается с использованием среднего от кососкалярного произведения двух векторов:

$$\frac{1}{T(E)} \int_0^T [\partial_\sigma \mathbf{u}^0(\sigma; E), \mathbf{F}(\sigma\omega(E) - \Psi; \tau)] d\sigma = \frac{\Phi''(\tau)}{\omega'(E)}. \quad (1.5)$$

Требования разрешимости этой пары уравнений относительно E , Ψ представляют собой основные условия на исходные данные, при которых только и существует асимптотическое решение в форме (1.3). Выполнения одного резонансного условия (1.4) недостаточно. Исследования ряда моделей [7] выявили принципиальные отличия нелинейной системы от линейной: было обнаружено, что для возникновения авторезонанса необходимо превышение амплитуды накачки над некоторым пороговым значением. Ограничения порогового характера обнаруживаются в уравнении (1.5) для сдвига фазы Ψ . Дальнейшее изложение посвящено выводу уравнений (1.4), (1.5) и конструкции полного асимптотического решения при $\varepsilon \rightarrow 0$ с указанием области применимости по времени.

2. БЫСТРЫЕ И МЕДЛЕННЫЕ ДВИЖЕНИЯ

2.1. Анзац. В этом разделе мы будем следовать стандартной процедуре построения асимптотического решения в форме анзаца Крылова–Боголюбова–Кузмака [1]. В основе обсуждаемого подхода лежит простое соображение, что главный член асимптотики можно представить в виде решения невозмущенной системы $\mathbf{u}(t; \varepsilon) = \mathbf{u}^0(\sigma; E) + \mathcal{O}(\varepsilon)$ при подходящем выборе фазы $\sigma = [\varepsilon^{-1}\Phi(\tau) + \Psi(\tau)]/\omega(E)$ и при подходящей деформации параметра $E = E(\tau)$. Функции $E(\tau)$, $\Psi(\tau)$ зависят от медленного времени $\tau = \varepsilon t$, и их требуется найти.

В новых переменных выражение для правой части уравнений (1.1) можно привести к виду функции $\mathbf{F}(\varphi; \tau) = \mathbf{F}(\omega(E)\sigma - \Psi; \tau)$, T -периодической по переменной σ . При таком представлении обнаруживается, помимо зависимости от быстрой переменной σ , зависимость от неопределенных пока функций $E(\tau)$, $\Psi(\tau)$, а также явная зависимость от медленного времени τ . Решение возмущенной задачи ищется в подобной форме, как вектор-функция четырех независимых переменных $\mathbf{u}(t; \varepsilon) = \mathbf{U}(\sigma, E, \Psi, \tau; \varepsilon)$ с периодической зависимостью по быстрой переменной σ . Полное формальное асимптотическое решение (ФАР) строится в виде ряда

$$\mathbf{u}(t; \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \mathbf{U}_n(\sigma, E, \Psi, \tau), \quad \varepsilon \rightarrow 0; \quad \sigma = \frac{\varepsilon^{-1}\Phi(\tau) + \Psi}{\omega(E)}. \quad (2.1)$$

Коэффициенты ряда, а также функции $E(\tau)$, $\Psi(\tau)$ определяются из рекуррентной системы задач. Так, для ряда хорошо изученных задач известно, что функции медленного времени $E(\tau)$, $\Psi(\tau)$ определяются из дифференциальных уравнений, которые иногда называются усредненными уравнениями [1], [2]. Для задачи об авторезонансе здесь возникают принципиальные отличия: эти функции определяются из функциональных уравнений.

2.2. Разделение движений. Процедура разделения задач для быстрых и медленных переменных основана на анализе системы, которая получается для вектор-функции $\mathbf{U}(\sigma, E, \Psi, \tau; \varepsilon)$. В уравнениях содержатся производные E' , Ψ' в виде коэффициентов, которые остаются неопределенными, пока не определены сами функции $E(\tau)$, $\Psi(\tau)$. Они определяются при вычислении полной производной по времени:

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \frac{\Phi'}{\omega} \partial_{\sigma} \mathbf{U} + \varepsilon E' \left[\partial_E \mathbf{U} - \sigma \frac{\omega'}{\omega} \partial_{\sigma} \mathbf{U} \right] + \varepsilon [\Psi' (\partial_{\sigma} \mathbf{U} + \partial_{\Psi} \mathbf{U}) + \partial_{\tau} \mathbf{U}].$$

В последнем выражении содержится пара непериодических по σ слагаемых, которые, однако, в сумме дают периодическую функцию. В частности, ввиду зависимости периода от параметра E непериодической оказывается частная производная $\partial_E \mathbf{U}$. Такие слагаемые удобно объединить, введя так называемую усеченную производную $\hat{\partial}_E \mathbf{U} = \partial_E \mathbf{U} - \sigma(\omega'/\omega) \partial_{\sigma} \mathbf{U}$, для которой сохраняется свойство периодичности. В разложении

Фурье такая производная соответствует дифференцированию по E только коэффициентов ряда. При использовании усеченной производной исходные уравнения принимают вид

$$\frac{\Phi'}{\omega(E)} \partial_\sigma \mathbf{U} + \Omega(\mathbf{U}) = \varepsilon \mathbf{F} - \varepsilon [E' \hat{\partial}_E + \Psi'(\partial_\sigma \mathbf{U} + \partial_\Psi \mathbf{U}) + \varepsilon \partial_\tau] \mathbf{U}. \quad (2.2)$$

3. РЕКУРРЕНТНАЯ СИСТЕМА ОТНОСИТЕЛЬНО БЫСТРОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Цель данного раздела – выписать рекуррентную систему на коэффициенты ФАР (2.1) и сформулировать секулярные условия, при которых этот ряд будет асимптотическим при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно по быстрой переменной $\sigma \in \mathbb{R}$.

В качестве главного члена ФАР берется невозмущенное решение: $\mathbf{U}_0 = \mathbf{u}^0(\sigma; E)$. В таком случае множитель в левой части уравнения (2.2) должен быть равен единице: $\Phi'/\omega(E) = 1$, что соответствует требованию (1.4). Поправки следующих порядков находятся из неоднородных линейаризованных уравнений:

$$\partial_\sigma \mathbf{U}_n + \partial_u \Omega(\mathbf{u}^0) \mathbf{U}_n = \mathbf{G}_n(\sigma, E, \Psi, \tau), \quad (3.1)$$

где правые части определяются через предыдущие приближения с участием коэффициентов Тейлора вектор-функции $\Omega(\mathbf{u})$ в точке $\mathbf{u} = \mathbf{u}^0$. Например, на первых двух шагах имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_1 &= \mathbf{F} - [E' \hat{\partial}_E + \Psi' \partial_\sigma] \mathbf{u}^0, \\ \mathbf{G}_2 &= -\frac{1}{2} \partial_u^2 \Omega(\mathbf{u}^0) \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1 - [E' \hat{\partial}_E + \Psi'(\partial_\sigma + \partial_\Psi) + \partial_\tau] \mathbf{U}_1. \end{aligned}$$

Для фундаментальной системы решений однородных уравнений удобно использовать пару периодических вектор-функций, составленных из производных: $\mathbf{V}_0(\sigma; E) = \hat{\partial}_E \mathbf{u}^0(\sigma; E)$, $\mathbf{V}_1(\sigma; E) = \partial_\sigma \mathbf{u}^0(\sigma; E)$. При этом одним из решений является $\mathbf{V}_1$, а второе выписывается через комбинацию $\mathbf{V}_0$ и $\mathbf{V}_1$: $\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_0 + (\omega'/\omega)\sigma \mathbf{V}_1$, и не будет периодическим, если $\omega'(E) \neq 0$. Вронскиан выражается через кососкалярное произведение, $W = [\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2]$, и равен единице, $W = 1$.

На каждом шаге решение выписывается через интегралы от кососкалярных произведений базисных решений с правой частью:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_n &= +\mathbf{V}_0 \int_0^\sigma [\mathbf{V}_1, \mathbf{G}_n] d\sigma + \mathbf{V}_1 \int_0^\sigma \left([\mathbf{G}_n, \mathbf{V}_0] + \frac{\omega'}{\omega} \left(C_n + \int_0^\sigma [\mathbf{V}_1, \mathbf{G}_n] d\sigma \right) \right) d\sigma + \\ &+ C_n \mathbf{V}_0 + D_n \mathbf{V}_1. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Дополнительные слагаемые с произвольными функциями медленных переменных $C_n(E, \Psi, \tau)$, $D_n(E, \Psi, \tau)$ соответствуют структуре общего решения.

В общем случае решение не будет периодическим. В формуле (3.2) нетрудно усмотреть наличие членов, которые растут линейно $\mathcal{O}(\sigma)$ и квадратично $\mathcal{O}(\sigma^2)$ при $\sigma \rightarrow \infty$.

Исключение таких секулярных слагаемых приводит к двум условиям на правую часть уравнения. При их выполнении решение оказывается периодическим. Ограничения на правые части $\mathbf{G}_n$ формулируются в виде условий ортогональности:

$$\langle [\mathbf{V}_1, \mathbf{G}_n] \rangle = 0, \quad \frac{\omega'}{\omega} C_n + \left\langle [\mathbf{G}_n, \mathbf{V}_0] + \frac{\omega'}{\omega} \int_0^\sigma [\mathbf{V}_1, \mathbf{G}_n] d\sigma \right\rangle = 0. \quad (3.3)$$

Здесь и далее угловые скобки используются для обозначения среднего по периоду. В частности, на первом шаге эти два требования выглядят следующим образом:

$$E'(\tau) = \langle \mathbf{V}_1, \mathbf{F} \rangle, \quad \frac{\omega'}{\omega} C_1 = \Psi' - \langle \mathbf{F}, \mathbf{V}_0 \rangle + \frac{\omega'}{\omega} \left\langle \int_0^\sigma (E' - [\mathbf{V}_1, \mathbf{F}]) d\sigma \right\rangle. \quad (3.4)$$

4. МЕДЛЕННАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ГЛАВНОГО ЧЛЕНА ФАР

На основе анализа главного члена ФАР и первой поправки получаются три уравнения, приведенные в (1.4), (3.4). Из условия (1.4) определяется медленная деформация энергии $E = E(\tau)$. Корней уравнения может быть много; нужный корень выделяется начальным условием $E(0) = 0$. Требование разрешимости такой задачи определяет класс вынуждающих частот Φ' , при которых только и возможен авторезонанс. Приведем условия, которые представляются более доступными для проверки, чем резонансное условие в общей форме.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\omega'(0) \neq 0$. Уравнение (1.4) с условием $E(0) = 0$ имеет единственное решение $E = E(\tau)$ на некотором промежутке $\tau \in [0, \tau_0]$ тогда и только тогда, когда частота накачки в начальный момент совпадает с собственной: $\Phi'(0) = \omega(0)$, и совпадают направления изменения частот: $\text{sgn } \Phi''(\tau) = \text{sgn } \omega'(0)$, $\tau > 0$.

Первое из требований (3.4) дает уравнение для сдвига фазы $\Psi(\tau)$. С учетом уравнения (1.4) оно записывается в форме (1.5). Это уравнение можно несколько преобразовать:

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\mathbf{u}^0 \left(\frac{s}{\omega(E)}; E \right), \partial_s \mathbf{F}(s - \Psi; \tau) \right] ds = \frac{\Phi''(\tau)}{\Phi'(\tau)\omega'(E)}. \quad (4.1)$$

Здесь в качестве $E = E(\tau)$ берется решение уравнения (1.4). Нетрудно установить условия его разрешимости в общем случае.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\omega'(E) \neq 0$ и уравнение (1.4) разрешимо на отрезке $\tau \in [0, \tau_0]$. Тогда существует пара функций $M_-(\tau)$, $M_+(\tau)$ таких, что уравнение (1.5) разрешимо тогда и только тогда, когда правая часть соотношения (4.1) удовлетворяет неравенствам

$$M_-(\tau) \leq \frac{\Phi''(\tau)}{\Phi'(\tau)\omega'(E(\tau))} \leq M_+(\tau). \quad (4.2)$$

При выполнении строгих неравенств решение будет неединственно.

В качестве функций $M_{\pm}(\tau)$ берутся максимум и минимум по Ψ функции из левой части (4.1), они полностью определяются возмущением $\mathbf{F}(s; \tau)$. В конечном счете требование разрешимости в форме (4.2) представляет собой условия на исходные данные $\mathbf{F}(s; \tau)$, $\Phi(\tau)$. Если уточнить класс возмущений $\mathbf{F}(s; \tau)$, то условия разрешимости можно свести к более понятной форме. Так, если вектор накачки имеет одну гармонику:

$$\mathbf{F}(\varphi; \tau) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \cos \varphi, \quad \alpha = \alpha(\tau), \quad \beta = \beta(\tau), \quad (4.3)$$

то уравнение для Ψ можно свести к тригонометрическому уравнению, в котором участвуют два коэффициента Фурье от комбинации компонент $u_0 = u_0(s/\omega(E), E)$, $v_0 = v_0(s/\omega(E), E)$ невозмущенного решения

$$a(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\beta u_0 - \alpha v_0) \sin s \, ds, \quad b(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\beta u_0 - \alpha v_0) \cos s \, ds.$$

Эти коэффициенты известны постольку, поскольку известны компоненты невозмущенного решения ($u_0(\sigma, E)$, $v_0(\sigma, E)$) и энергия $E(\tau)$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть правая часть в исходной задаче (1.1) задана в форме (4.3) и $\operatorname{sgn} \Phi''(\tau) = \operatorname{sgn} \omega'(0)$. Уравнение (1.5) разрешимо тогда и только тогда, когда амплитуда и фаза накачки связаны неравенством

$$[a^2(\tau) + b^2(\tau)]^{1/2} \geq \frac{\Phi''(\tau)}{|\Phi'(\tau)|\omega'(E(\tau))}. \quad (4.4)$$

Существуют два и только два решения $\Psi = \Psi_{\pm}(\tau)$. Решения различны $\Psi_+(\tau) \neq \Psi_-(\tau)$, если неравенство (4.4) строгое.

Вывод. Полученные в вышеприведенных теоремах условия разрешимости уравнений (1.4), (1.5) можно интерпретировать как условия возникновения авторезонанса. Эти условия состоят из двух частей. Во-первых, требуется правильный выбор направления деформации частоты накачки в соответствии с изменением собственной частоты. Во-вторых, требуется достаточно большая величина отношения амплитуды накачки к скорости изменения частоты.

5. МЕДЛЕННЫЕ ДЕФОРМАЦИИ ПОПРАВОК

В старших поправках ФАР $U_n(\sigma, E, \Psi, \tau)$, $n \geq 1$, зависимость от медленного времени проявляется как в явной форме, так и через функции $E(\tau)$, $\Psi(\tau)$. Явная зависимость от τ находится при решении быстрых уравнений (3.1) с учетом подстановки в правые части выражений для производных $E'(\tau)$, $\Psi'(\tau)$. Выражения для самих функций E , Ψ на этом этапе можно не подставлять. В каждой поправке имеется пара медленных функций $C_n(E, \Psi, \tau)$, $D_n(E, \Psi, \tau)$, которые находятся из секулярных условий (3.3). Все

уравнения для C_n, D_n являются линейными и решаются тривиально. Наиболее просто получаются выражения для C_n :

$$C_n(E, \Psi, \tau) = \frac{\omega}{\omega'} \langle \mathbf{G}_n, \mathbf{V}_0 \rangle + \left\langle \int_0^\sigma [\mathbf{V}_1, \mathbf{G}_n] d\sigma \right\rangle.$$

Однако прежде чем воспользоваться этой формулой при $n > 1$, следует ликвидировать неопределенность в коэффициенте D_{n-1} , который входит в $\mathbf{G}_n$ посредством предыдущего приближения $\mathbf{U}_{n-1}$. Для этого используется секулярное условие $\langle [\mathbf{V}_1, \mathbf{G}_n] \rangle = 0$. Это условие дает уравнение для D_{n-1} , которое выглядит столь же тривиально:

$$-\omega \partial_\Psi \langle [\mathbf{V}_1, \mathbf{F}] \rangle D_{n-1} = g_{n-1}(E, \Psi, \tau).$$

Правая часть g_{n-1} здесь вычисляется через известные функции и не содержит неопределенностей. Выражение для коэффициента в левой части получено с учетом свойств первого приближения $\mathbf{U}_1$ и специфики матрицы линеаризованной системы (3.1). В общей ситуации этот коэффициент не обращается в нуль и имеет место

ТЕОРЕМА 4. *Если для сдвига фазы Ψ в главном члене ФАР выбран простой корень уравнения (1.5), то все коэффициенты C_n, D_n в старших поправках ФАР определяются однозначно из секулярных условий (3.3).*

Вывод. ФАР в форме (2.1) строится однозначно с коэффициентами $\mathbf{U}_n(\sigma, E, \Psi, \tau)$, периодическими по быстрой переменной σ . Эти коэффициенты будут гладкими вектор-функциями для тех значений E, Ψ, τ , для которых являются гладкими невозмущенное решение $\mathbf{u}^0(\sigma, E)$ и выбранные простые корни уравнений (1.4), (1.5).

Требование гладкости (бесконечной дифференцируемости) связано с присутствием производных по E, Ψ, τ в правых частях рассмотренной выше рекуррентной системы уравнений.

6. АСИМПТОТИКА ПО МАЛОЙ ЭНЕРГИИ

При построении ФАР в форме (2.1) использовались лишь дифференциальные уравнения (1.1); выполнение начальных условий (1.2) при $\tau = 0$ не гарантируется. На самом деле ситуация с начальным значением для ФАР оказывается сложнее. Коэффициенты ФАР $\mathbf{U}_n(\sigma, \tau) = \mathbf{U}_n(\sigma, E(\tau), \Psi(\tau), \tau)$, как сложные функции от τ , имеют особенности при $\tau \rightarrow 0$. Чтобы вскрыть структуру этих особенностей, требуется асимптотика по малой энергии (при $E \rightarrow 0$) для всех используемых функций. Такая асимптотика извлекается из интегрального представления для невозмущенного решения, которое получается при интегрировании одного из уравнений с учетом закона сохранения $H(u, v) = E$. Приведем результаты для случая, когда гамильтониан не содержит линейной зависимости по одной из переменных.

ТЕОРЕМА 5. Пусть гамильтониан $H(u, v)$ — гладкая функция, обладающая свойством $H_v(u, 0) \equiv 0 \quad \forall u$ в окрестности рассматриваемого центра общего положения. Тогда период колебаний $T = T(E)$ и частота $\omega = \omega(E)$ невозмущенных колебаний являются гладкими функциями энергии E и $T(0) \neq 0$, $\omega(0) \neq 0$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Простые корни $E(\tau)$, $\Psi(\tau)$ уравнений (1.4), (1.5) являются гладкими функциями по $\tau \in [0, \tau_0]$. Энергия имеет асимптотику $E(\tau) = E_2 \tau^2 + \mathcal{O}(\tau^3)$, $\tau \rightarrow 0$, с коэффициентом $E_2 = \Phi'''(0)/\omega'(0)$.

Источником особенностей в конечном счете оказывается негладкость по энергии невозмущенного решения $\mathbf{u}^0(\sigma; E) = \mathcal{O}(\sqrt{2E})$, $E \rightarrow 0$. Указание на такую негладкость можно усмотреть в законе сохранения.

ТЕОРЕМА 6. Пусть выполнены условия теоремы 5. Тогда невозмущенное решение $\mathbf{u}(\sigma; E)$ имеет разложение в виде асимптотического ряда:

$$\mathbf{u}^0(\sigma; E) = \sqrt{2E} \sum_{n=0}^{\infty} E^{n/2} \mathbf{u}_n^0(\sigma\omega(E)), \quad E \rightarrow 0, \quad (6.1)$$

равномерно для всех $\sigma \in \mathbb{R}$. Коэффициенты $\mathbf{u}_n^0(s)$ представляют собой 2π -периодические вектор-функции своего аргумента.

СЛЕДСТВИЕ 2. Главный член в асимптотике (6.1) представляется в виде

$$\mathbf{u}(\sigma; E) = \sqrt{2E} \begin{pmatrix} \cos(\sigma\omega(E)) \\ -\sin(\sigma\omega(E)) \end{pmatrix} + \mathcal{O}(E), \quad E \rightarrow 0.$$

Из последнего соотношения видно, что производные невозмущенного решения по E имеют особенности в точке $E = 0$. Такие производные входят в правые части рекуррентной системы задач (3.1). Поэтому получаемые решения $\mathbf{U}_n(\sigma, E, \Psi, \tau)$ будут иметь особенности при $E \rightarrow 0$.

ТЕОРЕМА 7. Пусть выполнены условия теоремы 5 и в качестве $E = E(\tau)$, $\Psi = \Psi(\tau)$, $\tau \in [0, \tau_0]$, выбраны простые корни уравнений (1.4), (1.5). Тогда коэффициенты ФАР (2.1) определяются однозначно в классе функций, периодических по быстрой переменной, и имеют асимптотическое разложение

$$\mathbf{U}_n(\sigma, E, \Psi, \tau) = E^{(1-3n)/2} \sum_{j=0}^{\infty} E^{j/2} \mathbf{u}_{n,j}(\sigma, \Psi, \tau), \quad E \rightarrow 0,$$

равномерное для всех рассматриваемых значений σ , Ψ , τ . Коэффициенты этой асимптотики — гладкие функции. В ситуации общего положения главный член отличен от нуля, так что $\mathbf{U}_n(\sigma, E, \Psi, \tau) = \mathcal{O}(E^{(1-3n)/2})$.

Особенности по энергии E переходят в особенности по медленному времени ввиду асимптотики $E(\tau) = \mathcal{O}(\tau^2)$, $\tau \rightarrow 0$. Из-за этих особенностей ряд (2.1) перестает быть асимптотическим при малых τ .

СЛЕДСТВИЕ 3. Ряд (2.1) представляет асимптотическое решение уравнения (1.1) лишь для не слишком малых времен: $\varepsilon t = \tau \gg \varepsilon^{(1/3)}$.

Область малых времен представляет собой аналог пограничного слоя, в котором асимптотическое решение строится другим способом, указанным в работе [8]. Конструкция в пограничном слое необходима для однозначной идентификации сдвига фазы Ψ с использованием метода согласования [9].

Благодарности. Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 00-01-00663, грант “Научные школы” № 00-15-96038) и INTAS (грант № 99-1068).

Список литературы

- [1] Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов. Исследование продольной устойчивости аэроплана. М.–Л.: Гос. авиац. и автотракт. изд-во, 1932; Г. Е. Кузмак. ПММ. 1959. Т. 23. № 3. С. 515; F. J. Bourland, R. Haberman. SIAM J. Appl. Math. 1988. V. 48. P. 737.
- [2] Н. Н. Моисеев. Асимптотические методы в нелинейной механике. М.: Наука, 1981.
- [3] Г. М. Заславский, Р. З. Сагдеев. Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1988.
- [4] Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
- [5] В. И. Векслер. ДАН СССР. 1944. Т. 43. С. 346; С. 393; А. А. Андронов, Г. А. Горелик. ДАН СССР. 1945. Т. 49. С. 664; E. M. MacMillan. Phys. Rev. 1945. V. 68. P. 143.
- [6] K. S. Golovanivsky. Phys. Scripta. 1980. V. 22. P. 126; K. С. Голованивский. Физика плазмы. 1985. Т. 11. № 3. С. 295.
- [7] I. Aranson, B. Meersoh, T. Tajima. Phys. Rev. A. 1992. V. 45. P. 7505; L. Friedland. Phys. Rev. E. 1997. V. 55. P. 1929; 2000. V. 61. P. 3732; L. Friedland, A. G. Shagalov. Phys. Rev. Lett. 1998. V. 81. P. 4307.
- [8] Л. А. Калякин. Докл. РАН. 2001. Т. 378. С. 594.
- [9] А. М. Ильин. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.