Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. И. Гуревич, П. А. Сапонов, О неодомерных представлениях алгебры уравнения отражений, *ТМФ*, 2004, том 139, номер 1, 45–61

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf41>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 16:30:59

© 2004 г.

Д. И. Гуревич*, П. А. Сапонов†

О НЕОДНОМЕРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ АЛГЕБРЫ УРАВНЕНИЯ ОТРАЖЕНИЙ

Рассматривается новый метод построения конечномерных неприводимых представлений алгебры уравнения отражений. Построена серия неприводимых представлений, параметризуемых диаграммами Юнга. Для “ q -симметричных” и “ q -антисимметричных” представлений вычислены значения спектров центральных элементов $s_k = \text{Tr}_q L^k$ алгебры уравнения отражений. Предложено правило разложения на неприводимые компоненты тензорного произведения представлений.

Ключевые слова: алгебра уравнения отражений, алгебра Гекке, представления.

1. АЛГЕБРА УРАВНЕНИЯ ОТРАЖЕНИЙ

Уравнение отражений и порожденная им алгебра, которую мы будем называть алгеброй уравнения отражений (АО), занимают существенное место в теории интегрируемых систем и некоммутативной геометрии. В теории интегрируемых систем применяется уравнение отражений с параметром, впервые введенное в работе [1]. Обычно оно задает поведение системы на ее границе, например, описывает отражение частиц от границы конфигурационного пространства.

В некоммутативной геометрии используется вариант уравнения отражений без параметра. Одно из первых приложений порожденная им АО нашла в теории дифференциального исчисления на квантовых группах [2]. Здесь АО (с геккевской R -матрицей, см. ниже) является некоммутативным аналогом алгебры векторных полей на группах $GL(N)$ и $SL(N)$. Кроме того, АО является основой для определения квантовых обобщений однородных пространств – орбит коприсоединенного представления группы Ли и квантовых аналогов линейных расслоений на таких орбитах (см., например, [3], [4]).

В данной работе мы обращаемся к вопросу построения теории представлений для АО без параметра. Нас будут интересовать следующие главные проблемы: построение неприводимых представлений и вычисление спектров центральных элементов в этих пред-

*ISTV, Université de Valenciennes, 59304 Valenciennes, France.

E-mail: Dimitri.Gourevitch@univ-valenciennes.fr

†Институт физики высоких энергий, Протвино, Московская обл., Россия.

E-mail: saponov@mx.ihep.su

ставлениях, а также правило разложения на неприводимые компоненты тензорных произведений неприводимых представлений. Прежде чем дать краткий обзор известных результатов в этом направлении, введем необходимые обозначения и определения.

Алгеброй уравнения отражений будем называть ассоциативную алгебру $\mathcal{L}_q$ над полем комплексных чисел, порожденную единицей и n^2 генераторами $\hat{l}_i^j$, $1 \leq i, j \leq n$ (n – фиксированное натуральное число), удовлетворяющими следующим квадратичным перестановочным соотношениям:

$$R_{12}\hat{L}_1R_{12}\hat{L}_1 - \hat{L}_1R_{12}\hat{L}_1R_{12} = 0, \quad \hat{L}_1 \equiv \hat{L} \otimes I, \quad (1.1)$$

где матрица $\hat{L} \in \text{Mat}_n(\mathcal{L}_q)$ составлена из генераторов АО: $\hat{L} = \|\hat{l}_i^j\|$. Здесь и далее нижний матричный индекс нумерует строки матрицы, а верхний индекс – ее столбцы. Кроме того, в равенстве (1.1) использованы общепринятые компактные обозначения, когда индексы различных объектов нумеруют векторные пространства, к которым принадлежит (или в которых действует) данный объект [5]. Символом I будем обозначать единичную матрицу соответствующей размерности (всегда ясной из контекста формул). Числовая $(n^2 \times n^2)$ -матрица R является решением уравнения Янга–Бакстера

$$R_{12}R_{23}R_{12} = R_{23}R_{12}R_{23} \quad (1.2)$$

и удовлетворяет ряду дополнительных условий. Первое из них – это *условие Гекке*

$$(R - qI)(R + q^{-1}I) = 0. \quad (1.3)$$

Параметр q есть фиксированное ненулевое комплексное число с единственным ограничением¹⁾

$$q^k \neq 1, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (1.4)$$

Как следствие этого ограничения q -аналоги всех натуральных чисел отличны от нуля,

$$k_q \equiv \frac{q^k - q^{-k}}{q - q^{-1}} \neq 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Кроме того, будем считать, что R -матрица “обратима по столбцам”, т.е. существует $(n^2 \times n^2)$ -матрица Ψ такая, что

$$\sum_{a,b} R_{ia}^{jb} \Psi_{bk}^{as} = \delta_i^s \delta_k^j = \sum_{a,b} \Psi_{ia}^{jb} R_{bk}^{as}. \quad (1.5)$$

Чтобы сформулировать последнее дополнительное требование на R -матрицу, обратимся к связи алгебр Гекке серии A_k с групповыми алгебрами конечных симметрических групп. Воспользуемся тем фактом, что при значениях параметра q , удовлетворяющих условию (1.4), алгебра Гекке H_k при любом натуральном k изоморфна групповой

¹⁾ Все наши дальнейшие построения имеют хорошо определенный “классический предел” $q \rightarrow 1$. Этот предел соответствует АО с инволютивной R -матрицей $R^2 = I$.

алгебре $\mathbb{C}[\mathcal{S}_k]$ группы перестановок k элементов $\mathcal{S}_k$. Будем считать матрицу R матрицей линейного оператора (в некотором фиксированном базисе), действующего в тензорном квадрате $V^{\otimes 2}$ конечномерного векторного пространства V , $\dim V = n$. При этом произвольная геккевская R -матрица позволяет определить так называемое локальное представление алгебры Гекке H_k в тензорной степени $V^{\otimes k}$. Вследствие изоморфизма $H_k \simeq \mathbb{C}[\mathcal{S}_k]$ в алгебре Гекке существуют q -аналоги идемпотентов (проекторов) Юнга, хорошо известных в теории симметрических групп. Эти q -аналоги проекторов параметризуются диаграммами Юнга, отвечающими различным разбиениям μ числа k . В упомянутом выше локальном представлении алгебры H_k в пространстве $V^{\otimes k}$ q -проекторы представляют собой некоторые матричные полиномы от R -матриц. Подробное изложение этих вопросов и явные формулы для q -проекторов содержатся в обзоре [6] (см. также работы [7]).

Будем считать, что существует натуральное число p такое, что образ q -антисимметризатора Юнга $\mathcal{A}^{(p+1)} \in H_k$ ($\forall k > p$) относительно локального R -матричного представления тождественно равен нулю, а образ q -антисимметризатора $\mathcal{A}^{(p)} \in H_k$ есть проектор единичного ранга в пространстве $V^{\otimes k}$,

$$\exists p \in \mathbb{N} : \quad \mathcal{A}^{(p+1)} \rightarrow A^{(p+1)}(R) \equiv 0, \quad \text{rank } A^{(p)}(R) = 1. \quad (1.6)$$

Число p назовем *рангом симметрии* матрицы R . Например, для R -матрицы, связанной с квантовой универсальной обертывающей алгеброй $U_q(sl_n)$, ранг симметрии просто равен n . В работе [8] построены примеры $(n^2 \times n^2)$ R -матриц, у которых ранг симметрии меньше n (для $n \geq 3$).

Введем теперь две $(n \times n)$ -матрицы B и C ,

$$B_i^j = \sum_a \Psi_{ai}^{aj}, \quad C_i^j = \sum_a \Psi_{ia}^{ja}, \quad (1.7)$$

где матрица Ψ определена в (1.5). Если R -матрица обладает рангом симметрии p , то матрицы B и C невырождены и их произведение кратно единичной матрице [8],

$$BC = \frac{1}{q^{2p}} I. \quad (1.8)$$

Матрицы B и C играют центральную роль в наших дальнейших построениях.

Один из простейших примеров АО получается при выборе R -матрицы, связанной с квантовой универсальной обертывающей $U_q(sl_2)$ ($n = 2$),

$$R = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}, \quad \lambda \equiv q - \frac{1}{q}, \quad \hat{L} = \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{c} & \hat{d} \end{pmatrix}.$$

В этом случае уравнение (1.1) приводит к шести перестановочным соотношениям для генераторов АО,

$$\begin{aligned} q^2 \hat{a} \hat{b} &= \hat{b} \hat{a}, & q(\hat{b} \hat{c} - \hat{c} \hat{b}) &= \lambda \hat{a}(\hat{d} - \hat{a}), \\ q^2 \hat{c} \hat{a} &= \hat{a} \hat{c}, & q(\hat{c} \hat{d} - \hat{d} \hat{c}) &= \lambda \hat{c} \hat{a}, \\ \hat{a} \hat{d} &= \hat{d} \hat{a}, & q(\hat{d} \hat{b} - \hat{b} \hat{d}) &= \lambda \hat{a} \hat{b}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Введем отображение $\text{Tr}_q: \text{Mat}_n(\mathcal{L}_q) \rightarrow \mathcal{L}_q$, которое будем называть *квантовым следом* [5],

$$\text{Tr}_q(X) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Tr}(CX), \quad X \in \text{Mat}_n(\mathcal{L}_q). \quad (1.10)$$

Можно показать, что величины

$$s_m(\hat{L}) = \text{Tr}_q(\hat{L}^m), \quad 1 \leq m \leq p-1, \quad (1.11)$$

являются *независимыми* центральными элементами АО [5]. Существует гипотеза, что вместе с $e_{\mathcal{L}}$ эти элементы генерируют весь центр АО, однако доказательство этого факта нам неизвестно. Вычисление спектров центральных элементов s_m в неприводимых представлениях является одной из наших целей.

Построению теории представлений АО посвящена довольно обширная литература. Прежде всего, эта алгебра имеет много одномерных представлений. Например, очевидно, что при любой R -матрице соотношение (1.1) будет удовлетворено, если в качестве $\hat{L}$ выбрать числовую матрицу, пропорциональную I , т.е. положить $\hat{l}_i^j = \alpha \delta_i^j$. Менее тривиальное представление получается для нашего простейшего примера (1.9), если взять $\hat{a} = 0$. После этого оставшиеся три генератора задаются произвольными комплексными числами. Представления такого рода для АО с R -матрицами, связанными с $U_q(sl_n)$ и ее суперсимметричными обобщениями, были подробно рассмотрены в работе [9].

Однако поскольку АО является некоммутативной алгеброй, в любом одномерном представлении часть генераторов неизбежно должна обращаться в нуль, т.е. одномерные представления обладают ненулевым ядром уже на уровне генераторов алгебры. Эти представления выходят за рамки данной работы.

Нас же будут интересовать неодномерные представления, в которых *всем* генераторам сопоставляются нетривиальные операторы в конечномерном векторном пространстве. Пример такого представления можно построить, опираясь на тот факт, что АО, порожденная соотношениями (1.1), является присоединенным комодулем над некоторой алгеброй Хопфа, аналогичной алгебре функций на квантовой группе. Пусть перестановочные соотношения между генераторами алгебры Хопфа t_i^j задаются матричным равенством [5]

$$R_{12}T_1T_2 = T_1T_2R_{12}. \quad (1.12)$$

Тогда соотношения (1.1) ковариантны относительно преобразования [10]

$$\hat{l}_i^j \rightarrow t_i^k S(t_p^j) \otimes \hat{l}_k^p,$$

где $S(\cdot)$ означает операцию взятия антипода²⁾. Пользуясь этой ковариантностью, можно из любого заданного представления АО получить другое ее представление, если известны представления алгебры Хопфа, порожденной (1.12) [10].

²⁾Заметим, что именно условие обратимости по столбцам (1.5) дает возможность определить в (би)алгебре (1.12) (точнее, в некотором ее расширении) операцию антипода [5].

Кроме того, есть дополнительная возможность построения представлений высшей размерности для случая, когда R -матрица отвечает квантовой универсальной обертывающей $U_q(sl_n)$. В этом случае существует вложение АО в $U_q(sl_n)$, которое на уровне генераторов описывается формулой [5]

$$\hat{L} = S(L^-)L^+, \quad (1.13)$$

где $L^\pm$ – матрицы, составленные из генераторов квантовой группы. Таким образом, по заданному представлению квантовой группы можно построить соответствующее представление АО на основе формулы (1.13). В недавней работе [11] этот подход был распространен на произвольную квазитреугольную алгебру Хопфа. Авторы указанной работы построили универсальное решение соотношений (1.1), взяв в качестве R универсальную R -матрицу некоторой квазитреугольной алгебры Хопфа $\mathcal{H}$. При этом генераторы $\hat{l}_i^j$ оказались элементами тензорного произведения исходной алгебры $\mathcal{H}$ и ее “твистованной дуальной” алгебры.

Отметим, однако, что все перечисленные выше методы существенно опираются на теорию представлений внешних по отношению к АО объектов – квазитреугольных алгебр Хопфа, частным случаем которых являются квантовые группы. Но, во-первых, как показано в [12], уравнение Янга–Бакстера имеет много решений, не связанных с квантовой группой (см. также [8]). Для таких R -матриц мы уже не можем воспользоваться отображением (1.13) и строить представления АО на основе представлений квантовой группы. Во-вторых, достаточно очевидно, что задание конкретной R -матрицы в соотношениях (1.1) полностью определяет все свойства АО и ее теорию представлений. Ситуация аналогична теории алгебр Ли, где задание структурных констант определяет все свойства алгебры. Таким образом, вполне естественно строить теорию представлений АО, опираясь исключительно на заданную R -матрицу, т.е. целиком во “внутренних” терминах АО.

По-видимому, наиболее эффективный способ решения этой задачи основан на непосредственном анализе явных коммутационных соотношений, аналогично тому, как это делается при построении теории представлений универсальной обертывающей алгебры для (простой) алгебры Ли. Именно такой подход позволил Кулишу в работе [13] найти все представления со старшим вектором для простейшей АО (1.9). Оказалось, что помимо двух одномерных представлений эта алгебра обладает одной серией конечномерных представлений и серией бесконечномерных представлений – аналогом модулей Верма для универсальной обертывающей алгебры. Недостатком этого метода является зависимость от конкретной R -матрицы. Явный вид соотношений (1.1) может существенно измениться при переходе от одной R -матрицы к возможной другой, и всю работу по построению теории представлений придется выполнять заново.

В данной статье мы строим серию конечномерных неприводимых представлений АО, порожденной (1.1). Эти представления параметризуются диаграммами Юнга и существуют для любой R -матрицы, удовлетворяющей дополнительным условиям (1.3), (1.5) и (1.6). Для представлений, отвечающих однострочным и одностолбцовым диаграммам, вычислены спектры центральных элементов (1.11). Для частного случая R -мат-

рицы квантовой универсальной обертывающей $U_q(sl_2)$ наш результат воспроизводит серию конечномерных представлений АО (1.9), полученную в [13].

В разделе 2 строятся неприводимые представления АО с произвольной геккевской R -матрицей, обладающей конечным рангом симметрии. Эти представления названы фундаментальными представлениями (B -типа), поскольку их тензорные произведения раскладываются на высшие неприводимые представления аналогично произведениям фундаментальных векторных представлений алгебры $U(gl_n)$. В разделе 3 приводится явный вид правила разложения на неприводимые компоненты тензорного произведения фундаментальных модулей B -типа. В разделе 4 рассматриваются другие фундаментальные модули (R -типа). Построение этих модулей основано на общей теории дуальных алгебр Хопфа и может быть легко обобщено на случай произвольной геккевской R -матрицы. Обсуждается также связь фундаментальных модулей B - и R -типов. В конце раздела 4 содержится краткое резюме полученных результатов и обсуждение открытых вопросов предлагаемого подхода к теории представлений АО.

2. ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ B -ТИПА

Рассмотрим АО, порожденную соотношениями (1.1), и совершим линейную замену генераторов

$$l_i^j = \hat{l}_i^j + \frac{1}{\lambda} \delta_i^j e_{\mathcal{L}}, \quad (2.1)$$

где $e_{\mathcal{L}}$ — единичный элемент нашей алгебры. После этого сдвига, учитывая условие Гекке (1.3), коммутационные соотношения между новыми генераторами примут вид

$$R_{12}L_1R_{12}L_1 - L_1R_{12}L_1R_{12} = R_{12}L_1 - L_1R_{12}. \quad (2.2)$$

Для удобства ссылок мы будем называть АО, порожденную соотношениями (2.2), *модифицированной алгеброй уравнения отражений* (мАО) и сохраним за ней краткое обозначение $\mathcal{L}_q$. Отметим, что пока $q \neq 1$, мАО изоморфна алгебре с соотношениями (1.1). Поэтому из любого представления мАО (2.2) можно построить представление алгебры (1.1) и наоборот. Однако “классический предел” $q \rightarrow 1$ у этих алгебр разный, поскольку при $q \rightarrow 1$ изоморфизм (2.1) нарушается в силу сингулярности множителя λ^{-1} . В частном случае квантово-групповой R -матрицы соотношения (2.2) в классическом пределе переходят в коммутационные соотношения для генераторов $U(gl_n)$.

Итак, рассмотрим мАО $\mathcal{L}_q$, порожденную единицей и n^2 генераторами l_i^j , перестановочные соотношения между которыми задаются уравнением (2.2). Выберем некоторое n -мерное векторное пространство V и зафиксируем в нем произвольный базис из n векторов $\{e_i\}$, $1 \leq i \leq n$. Определим теперь *линейное* отображение $\pi^{(1)}: \mathcal{L}_q \rightarrow \text{End}(V)$ по правилу

$$\begin{cases} \pi^{(1)}(e_{\mathcal{L}}) = \text{id}_V, \\ \pi^{(1)}(l_i^j) \triangleright e_k = e_i B_k^j, \\ \pi^{(1)}(l_1 l_2 \dots l_k) = \pi^{(1)}(l_1) \pi^{(1)}(l_2) \dots \pi^{(1)}(l_k), \quad \forall k \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (2.3)$$

где матрица B введена в (1.7), а id_V есть тождественный оператор на пространстве V .

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Линейное отображение (2.3) задает n -мерное неприводимое представление мАО (2.2) в пространстве V . Такое представление будем называть фундаментальным представлением B -типа.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО того, что $\pi^{(1)}$ действительно дает представление $\mathcal{L}_q$, сводится к проверке перестановочных соотношений (2.2) для операторов (2.3), что, в свою очередь, выполняется прямым вычислением. При этом необходимо воспользоваться следующим простым следствием формул (1.5) и (1.7):

$$\mathrm{Tr}_{(1)} B_1 R_{12} = I,$$

где символ $\mathrm{Tr}_{(1)}$ означает вычисление следа по первому пространству. Неприводимость этого представления вытекает из невырожденности матрицы B (см. (1.8)). Опираясь на этот факт, можно легко показать, что операторы $\pi^{(1)}(l_i^j)$ порождают все пространство $\mathrm{End}(V)$, что, в свою очередь, означает отсутствие в V нетривиальных инвариантных подпространств относительно представления $\pi^{(1)}$. Утверждение доказано.

Если обратиться к нашему примеру (1.9), то с учетом линейного сдвига (2.1) коммутационные соотношения соответствующей мАО запишутся в виде

$$\begin{aligned} q^2 ab - ba &= qb, & q(bc - cb) &= (\lambda a - 1)(d - a), \\ q^2 ca - ac &= qc, & q(cd - dc) &= c(\lambda a - 1), \\ ad &= da, & q(db - bd) &= (\lambda a - 1)b. \end{aligned} \quad (2.4)$$

В соотношениях из правой колонки (2.4) в целях упрощения записи единицей обозначен единичный элемент алгебры $e_{\mathcal{L}}$. Матрицы B и C в данном случае имеют вид

$$B = \begin{pmatrix} q^{-1} & 0 \\ 0 & q^{-3} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} q^{-3} & 0 \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix}.$$

Представление (2.3) дается матрицами

$$\begin{aligned} \pi^{(1)}(a) &= \begin{pmatrix} q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & \pi^{(1)}(b) &= \begin{pmatrix} 0 & q^{-3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \pi^{(1)}(c) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q^{-1} & 0 \end{pmatrix}, & \pi^{(1)}(d) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q^{-3} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

По заданному представлению мАО можно построить представление ее фактор-алгебры

$$\mathcal{SL}_q = \mathcal{L}_q / \{\mathrm{Tr}_q L\}, \quad (2.6)$$

где $\{X\}$ означает двусторонний идеал, порожденный данным подмножеством X элементов АО. Перестановочные соотношения генераторов $\mathcal{SL}_q$ задаются теми же выражениями (2.2), что и для алгебры $\mathcal{L}_q$, однако уже не все генераторы независимы в силу условия $\mathrm{Tr}_q L = 0$. Для R -матрицы, отвечающей $U_q(sl_n)$, перестановочные соотношения

генераторов $\mathcal{SL}_q$ в пределе $q \rightarrow 1$ переходят в перестановочные соотношения генераторов $U(sl_n)$. Поэтому всюду в дальнейшем переход от алгебры $\mathcal{L}_q$ к фактор-алгебре $\mathcal{SL}_q$ (или от представления $\mathcal{L}_q$ к соответствующему представлению $\mathcal{SL}_q$) мы будем условно называть sl -редукцией.

Переход от представления $\pi^{(1)}$ алгебры $\mathcal{L}_q$ к представлению $\bar{\pi}^{(1)}$ алгебры $\mathcal{SL}_q$ производится следующим образом. Пусть задано неприводимое представление $\pi^{(1)}$ мАО в соответствии с (2.3). Поскольку $\text{Tr}_q L$ – центральный элемент алгебры и представление $\pi^{(1)}$ неприводимо, то

$$\pi^{(1)}(\text{Tr}_q L) = \chi(\text{Tr}_q L) \text{id}_V \equiv \chi_1 \text{id}_V,$$

где $\chi: Z(\mathcal{L}_q) \rightarrow \mathbb{C}$ есть характер центра $Z(\mathcal{L}_q)$ алгебры $\mathcal{L}_q$. Несложным подсчетом можно убедиться, что операторы

$$\bar{\pi}^{(1)}(l_i^j) = \frac{1}{\omega} \left(\pi^{(1)}(l_i^j) - \frac{\chi_1}{\text{Tr } C} \delta_i^j \text{id}_V \right), \quad \omega = 1 - \frac{\lambda \chi_1}{\text{Tr } C}, \quad (2.7)$$

реализуют представление алгебры (2.6).

В качестве примера вновь рассмотрим мАО $\mathcal{L}_q$, заданную соотношениями (2.4). Для перехода к соответствующей $\mathcal{SL}_q$ необходимо факторизовать $\mathcal{L}_q$ по условию $\text{Tr}_q L = 0$. Подставив явный вид матрицы C , находим

$$\text{Tr}_q L = \frac{1}{q^3} a + \frac{1}{q} d.$$

Если ввести новый генератор $h = a - d$, то после факторизации по идеалу, порожденному $\text{Tr}_q L$, коммутационные соотношения для $\mathcal{SL}_q$ переписываются в терминах трех независимых генераторов b, c и h ,

$$\begin{aligned} q^2 hb - bh &= 2_q b, \\ hc - q^2 ch &= -2_q c, \\ q(bc - cb) &= h \left(1 - \frac{q\lambda}{2_q} h \right). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Отметим, что в пределе $q \rightarrow 1$ соотношения (2.8) переходят в хорошо известные перестановочные соотношения для генераторов универсальной обертывающей алгебры $U(sl_2)$.

Пользуясь представлением (2.5), имеем

$$\text{Tr } C = \frac{2_q}{q^2}, \quad \text{Tr}_q L = \frac{1}{q^4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \chi_1 = \chi(\text{Tr}_q L) = \frac{1}{q^4},$$

следовательно, согласно (2.7)

$$\begin{aligned} \bar{\pi}^{(1)}(h) &= \xi \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & -q^{-1} \end{pmatrix}, \quad \bar{\pi}^{(1)}(b) = \xi \begin{pmatrix} 0 & q^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\pi}^{(1)}(c) = \xi \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q & 0 \end{pmatrix}, \\ \xi &= \frac{q^2 + 1}{q^4 + 1}. \end{aligned}$$

В классическом пределе это представление переходит в фундаментальное векторное представление алгебры $U(sl_2)$.

Заметим, что при $q \neq 1$ обычный след матрицы $\bar{\pi}^{(1)}(h)$ не равен нулю (это свойство восстанавливается только в классическом пределе). Однако ее квантовый след (1.10) равен нулю,

$$\mathrm{Tr}(C\bar{\pi}^{(1)}(h)) = 0.$$

Подчеркнем, что здесь, в отличие от формулы (1.10), матрица C применяется для деформации следа *операторов представления* алгебры $\mathcal{SL}_q$, тогда как в (1.10) квантовый след вычисляется в $\mathrm{Mat}_n(\mathcal{SL}_q)$ (или $\mathrm{Mat}_n(\mathcal{L}_q)$).

Таким образом, для сохранения классического свойства бесследовости представления необходимо модифицировать след операторов в пространстве представления: $\mathrm{Tr} \rightarrow \mathrm{Tr}_q$. Этот факт не является случайным. Дело в том, что естественной категорией представлений для алгебры $\mathcal{L}_q$ (или $\mathcal{SL}_q$) является не обычная тензорная категория, аналогичная категории модулей над $U(sl_n)$, а некоторая модифицированная квазитензорная категория Шура–Вейля. Для этой категории именно квантовый след является естественным морфизмом, непосредственно связанным с ее структурой. Построение категории Шура–Вейля, роль квантового следа в ней и его связь с мАО подробно рассмотрены в работах [14], [15].

В заключение этого раздела рассмотрим связь B -представления (2.3) для $U_q(sl_2)$ R -матрицы с результатом работы [13]. Если в представлении (2.5) выполнить обратный линейный сдвиг генераторов (см. (2.1)), то мы получим представление АО с квадратичными соотношениями (1.1). Матрицы полученного таким образом представления связаны преобразованием подобия с матрицами двумерного представления – низшего в серии конечномерных некоммутативных представлений, полученных в [13]. Конечномерные представления высшей размерности из этой серии эквивалентны q -симметрическим степеням B -представления, построение которых рассмотрено в следующем разделе. Таким образом, в частном случае АО, задаваемой $U_q(sl_2)$ R -матрицей, наш подход дает известный результат работы [13].

3. ВЫСШИЕ КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ B -ТИПА

Обратимся теперь к проблеме тензорного умножения представлений, которая может быть сформулирована следующим образом. Если дано фундаментальное представление (2.3) алгебры $\mathcal{L}_q$ (2.2) в n -мерном векторном пространстве V , то как задать представление в тензорных степенях $V^{\otimes k}$ и какие неприводимые представления высшей размерности будут там содержаться? И второй вопрос: как разлагать на неприводимые компоненты тензорное произведение произвольных высших представлений (не только фундаментальных)? Поиску ответов на эти вопросы и посвящен данный раздел.

Главным препятствием на пути построения произведения представлений является то обстоятельство, что в мАО (2.2) (как и в исходной АО (1.1)) отсутствует операция коумножения – алгебра (2.2) не является *bialгеброй*.

Сначала рассмотрим, как строятся тензорные произведения представлений для универсальной обертывающей алгебры $\mathcal{U} = U(sl_n)$ в рамках подхода Вейля. Хорошо из-

вестно, что $\mathcal{U}$ (как и универсальная обертывающая любой конечномерной алгебры Ли) является алгеброй Хопфа с кокоммутативным коумножением

$$\Delta: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}.$$

Пусть теперь задано некоторое неприводимое конечномерное представление $\rho: \mathcal{U} \rightarrow \text{End}(V)$ универсальной обертывающей $\mathcal{U}$ в векторном пространстве V . Чтобы получить представление в тензорной степени $V^{\otimes k}$, сначала строят гомоморфизм $\Delta^{(k-1)}: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}^{\otimes k}$ следующего вида³⁾

$$\Delta^{(1)} \equiv \Delta, \quad \Delta^{(m)} = (\Delta \otimes \text{id}_{(m-1)}) \circ \Delta^{(m-1)}, \quad \forall m \geq 2.$$

Затем полученные таким образом элементы из $\mathcal{U}^{\otimes k}$ представляются в виде линейных операторов в пространстве $V^{\otimes k}$ посредством отображения $\rho^{\otimes k}$,

$$\mathcal{U} \xrightarrow{\Delta^{(k-1)}} \mathcal{U}^{\otimes k} \xrightarrow{\rho^{\otimes k}} \text{End}(V^{\otimes k}) : \quad x \rightarrow \rho^{\otimes k}(\mathbf{x}), \quad \forall x \in \mathcal{U}, \quad (3.1)$$

где $\mathbf{x} \in \mathcal{U}^{\otimes k}$ есть образ элемента x относительно гомоморфизма $\Delta^{(k-1)}$.

Такое представление приводимо. Для выделения неприводимых компонент пользуются тем, что в тензорной степени $V^{\otimes k}$ можно задать естественное представление групповой алгебры $\mathbb{C}[\mathcal{S}_k]$ группы перестановок k элементов $\mathcal{S}_k$. Относительно представления этой алгебры пространство $V^{\otimes k}$ разлагается в прямую сумму неприводимых подпространств $V_{\nu(i)}$, которые параметризуются стандартными таблицами Юнга $\nu(i)$, отвечающими всевозможным разбиениям ν числа k . Относительно представления универсальной обертывающей алгебры $\mathcal{U}$ подпространства $V_{\nu(i)}$ также неприводимы, и операторы, соответствующие генераторам g_a универсальной обертывающей $\mathcal{U}$, даются формулой

$$\rho_k^{\nu(i)}(g_a) = Y_{\nu(i)} \rho^{\otimes k}(\mathbf{g}_a) Y_{\nu(i)}, \quad (3.2)$$

где $Y_{\nu(i)}$ – проектор Юнга, отвечающий таблице $\nu(i)$. Для однострочных (одностолбцовых) диаграмм Юнга, когда соответствующий проектор есть симметризатор P_+ (антисимметризатор P_-), вследствие кокоммутативности Δ формула (3.2) приводится к виду

$$\rho_k^{\pm}(g_a) = k P_{\pm} [\rho(g_a) \otimes \text{id}_V^{\otimes(k-1)}] P_{\pm}. \quad (3.3)$$

Вернемся теперь к случаю мАО. Как уже было сказано, коумножения в этой алгебре нет и мы не можем использовать изложенную выше схему для построения произведения представлений мАО. Оказывается, однако, что можно обобщить конечную формулу (3.3). Здесь нам потребуется изоморфизм алгебры Гекке и алгебры группы перестановок, о котором говорилось в разделе 1. Наиболее важным фактом для нашей

³⁾ В силу коассоциативности операции Δ существуют и другие эквивалентные формы гомоморфизма $\Delta^{(k-1)}$.

конструкции является существование q -аналогов примитивных идемпотентов Юнга, которые можно реализовать как некоторые линейные операторы (проекторы), действующие в тензорных степенях пространства V . Относительно действия этих проекторов тензорная степень $V^{\otimes k}$ при произвольном фиксированном $k \in \mathbb{N}$ разлагается в прямую сумму подпространств $V_{\nu(i)}$ аналогично случаю симметрической группы,

$$V^{\otimes k} = \bigoplus_{\nu \vdash k} \bigoplus_{i=1}^{\dim[\nu]} V_{\nu(i)}, \quad V_{\nu(i)} = Y_{\nu(i)}(R) \triangleright V^{\otimes k}. \quad (3.4)$$

Здесь $\dim[\nu]$ обозначает общее число стандартных таблиц Юнга $\nu(i)$, которые можно построить по данному разбиению ν числа k , $Y_{\nu(i)}(R)$ есть примитивный q -проектор Юнга в локальном представлении алгебры Гекке H_k [6].

Основной результат данного раздела содержится в следующем утверждении.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Рассмотрим МАО $\mathcal{L}_q$, порожденную соотношениями (2.2) с геккевской R -матрицей, обладающей рангом симметрии, равным p (см. условия (1.3), (1.5) и (1.6)). Пусть в n -мерном векторном пространстве V задано фундаментальное представление $\pi^{(1)}$ алгебры $\mathcal{L}_q$ в соответствии с (2.3). Зафиксируем произвольное натуральное число k и разложим тензорную степень $V^{\otimes k}$ в прямую сумму подпространств (3.4). Тогда*

1) *в каждой компоненте $V_{\nu(i)}$ прямой суммы (3.4) реализуется неприводимое представление $\pi^{\nu(i)}$ алгебры $\mathcal{L}_q$,*

$$\pi^{\nu(i)}: \mathcal{L}_q \rightarrow \text{End}(V_{\nu(i)}),$$

представления в пространствах, соответствующих различным таблицам $\nu(i)$ одного разбиения ν , эквивалентны;

2) *для разбиений $\nu = (k)$ и $\nu = (1^k)$ (при $k \leq p$) соответствующие представления $\pi^{(k)}$ и $\pi^{[k]}$ задаются формулами*

$$\pi^{(k)} = q^{1-k} k_q S^{(k)}(R) [\pi^{(1)} \otimes \text{id}_V^{\otimes(k-1)}] S^{(k)}(R), \quad (3.5)$$

$$\pi^{[k]} = q^{k-1} k_q A^{(k)}(R) [\pi^{(1)} \otimes \text{id}_V^{\otimes(k-1)}] A^{(k)}(R), \quad k \leq p, \quad (3.6)$$

q -симметризатор $S^{(k)}(R)$ и q -антисимметризатор $A^{(k)}(R)$ задаются рекуррентными соотношениями [8]

$$S^{(1)}(R) = I, \quad S^{(k)}(R) = \frac{1}{k_q} S^{(k-1)}(R) (q^{1-k} + (k-1)_q R_{k-1}) S^{(k-1)}(R),$$

$$A^{(1)}(R) = I, \quad A^{(k)}(R) = \frac{1}{k_q} A^{(k-1)}(R) (q^{k-1} - (k-1)_q R_{k-1}) A^{(k-1)}(R);$$

3) *значения спектров χ центральных элементов $s_m = \text{Tr}_q L^m$ в представлениях $\pi^{(k)}$ и $\pi^{[k]}$ задаются выражениями*

$$\chi^{(k)}(s_m) = q^{-m(p+k-1)-pk} k_q (p+k-1)_q^{m-1}, \quad (3.7)$$

$$\chi^{[k]}(s_m) = q^{-m(p-k+1)-pk} k_q (p-k+1)_q^{m-1}. \quad (3.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункты 2 и 3 сформулированного утверждения доказываются прямыми вычислениями. Пункт 1 в настоящее время проверен только для однострочных, одностолбцовых и некоторых других диаграмм и формулируется в качестве гипотезы. Мы планируем привести полное доказательство этого утверждения в одной из следующих работ.

Обратимся теперь к задаче построения тензорного произведения представлений для алгебры $\mathcal{SL}_q$ (2.6). Фактически решение этой задачи является простым следствием утверждения 2. Единственное, что нам требуется дополнительно – это обобщение формулы (2.7), которая по фундаментальному представлению $\pi^{(1)}$ алгебры $\mathcal{L}_q$ в пространстве V позволяла построить представление $\bar{\pi}^{(1)}$ алгебры $\mathcal{SL}_q$ в том же пространстве.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Рассмотрим алгебру $\mathcal{SL}_q$ (2.6) с геккевской R -матрицей ранга симметрии r . Пусть в n -мерном векторном пространстве V задано фундаментальное представление $\bar{\pi}^{(1)}$ алгебры $\mathcal{SL}_q$ в соответствии с (2.7). Зафиксируем произвольное натуральное число k и разложим тензорную степень $V^{\otimes k}$ в прямую сумму подпространств (3.4). Тогда

1) в каждой компоненте $V_{\nu(i)}$ прямой суммы (3.4) реализуется неприводимое представление $\bar{\pi}^{\nu(i)}$ алгебры $\mathcal{SL}_q$,

$$\bar{\pi}^{\nu(i)}: \mathcal{SL}_q \rightarrow \text{End}(V_{\nu(i)}),$$

представления в пространствах, соответствующих различным таблицам $\nu(i)$ одного разбиения ν , эквивалентны;

2) для разбиений $\nu = (k)$ и $\nu = (1^k)$ (при $k \leq p$) соответствующие представления $\bar{\pi}^{(k)}$ и $\bar{\pi}^{[k]}$ задаются формулами

$$\bar{\pi}^{(k)} = \frac{q^{p-1}k_q p_q}{q^{p-2}(p+k)_q - k_q} S^{(k)}(R) [\bar{\pi}^{(1)} \otimes \text{id}_V^{\otimes(k-1)}] S^{(k)}(R), \quad (3.9)$$

$$\bar{\pi}^{[k]} = \frac{q^{p+1}k_q p_q}{q^{p+2}(p-k)_q + k_q} A^{(k)}(R) [\bar{\pi}^{(1)} \otimes \text{id}_V^{\otimes(k-1)}] A^{(k)}(R), \quad k \leq p; \quad (3.10)$$

3) значения спектров $\bar{\chi}$ центральных элементов $s_m = \text{Tr}_q L^m$ в представлениях $\bar{\pi}^{(k)}$ и $\bar{\pi}^{[k]}$, отвечающих разбиениям $\nu = (k)$ и $\nu = (1^k)$ (при $k \leq p$), соответственно, суть

$$\bar{\chi}^{(k)}(s_m) = q^{-p-m} \frac{k_q(p-1)_q(p+k)_q}{(p+k-1)_q} \frac{[(p-1)_q^{m-1}(p+k)_q^{m-1} + (-1)^m k_q^{m-1}]}{[q^{p-2}(p+k)_q - k_q]^m}, \quad (3.11)$$

$$\bar{\chi}^{[k]}(s_m) = q^{-p+m} \frac{k_q(p+1)_q(p-k)_q}{(p-k+1)_q} \frac{[(p+1)_q^{m-1}(p-k)_q^{m-1} + (-1)^m k_q^{m-1}]}{[q^{p+2}(p-k)_q + k_q]^m}. \quad (3.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этого утверждения производится прямыми вычислениями на основе формул (3.5) и (3.6).

Отметим одну особенность представления $\bar{\pi}$ алгебры $\mathcal{SL}_q$. Нормировка его операторов отличается от нормировки представления π (см. соответствующие формулы утверждений 2 и 3). В отличие от классического случая ($q = 1$), выделение высших представлений алгебр $\mathcal{L}_q$ и $\mathcal{SL}_q$ в тензорных произведениях фундаментальных модулей производится по *разным* формулам. Если в формулах (3.5) и (3.6) просто заменить $\pi^{(1)}$ на $\bar{\pi}^{(1)}$, то полученные операторы будут удовлетворять перестановочным соотношениям (2.2) с дополнительным общим множителем в правой части (при $q \rightarrow 1$ этот множитель стремится к единице). Таким образом, чтобы построить высшее представление $\bar{\pi}^\nu$, отвечающее фундаментальному представлению $\bar{\pi}^{(1)}$, необходимо *сначала* найти π^ν (отвечающее фундаментальному $\pi^{(1)}$, sl -редукцией которого получено $\bar{\pi}^{(1)}$), и только затем производить sl -редукцию $\pi^\nu \rightarrow \bar{\pi}^\nu$. При $q = 1$ старшие представления $\mathcal{SL}_q$ строятся непосредственно по фундаментальному представлению $\bar{\pi}^{(1)}$.

Кроме того, из приведенных формул видно, что определяющая роль принадлежит рангу симметрии p , а не параметру n^4), определяющему размер матрицы R и число генераторов в алгебре $\mathcal{L}_q$. Это характерная особенность категорий Шура–Вейля (см. [14]), которые связаны с рассматриваемыми сериями представлений π^ν . В случае $U_q(sl_n)$ R -матрицы $p = n$ и в классическом пределе $q \rightarrow 1$ формулы (3.11), (3.12) переходят в формулы для характеров соответствующих представлений $U(sl_n)$.

Наконец, если даны два неприводимых модуля V_μ и V_ν над алгеброй $\mathcal{L}_q$ (или $\mathcal{SL}_q$), в которых действуют представления π^μ и π^ν , то, пользуясь изоморфизмом $H_k \simeq \mathbb{C}[S_k]$, можно показать (см., например, [14]), что их тензорное произведение разлагается на неприводимые компоненты в соответствии с правилом

$$V_\mu \otimes V_\nu = c_{\mu\nu}^\tau V_\tau, \quad (3.13)$$

где $c_{\mu\nu}^\tau$ — коэффициенты Литтлвуда–Ричардсона, задающие структуру кольца на множестве симметрических функций Шура.

4. ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ R -ТИПА

Помимо фундаментального представления B -типа для АО $\mathcal{L}_q$ (1.1) можно построить другое представление, которое мы будем условно называть фундаментальным представлением R -типа. Это представление в случае квантово-групповой R -матрицы возникает из общей теории дуальных алгебр Хопфа, а затем непосредственно обобщается на случай произвольной R -матрицы.

Итак, предположим вначале, что матрица R , определяющая структуру $\mathcal{L}_q$, является матрицей, связанной с квантовой универсальной обертывающей алгеброй $U_q(sl_n)$. Хорошо известно [5], что в этом случае алгебра Хопфа (1.12) представляет собой алгебру

⁴⁾Как отмечалось выше, существуют примеры R -матриц, для которых $p \neq n$.

функций на квантовой группе $\text{Fun}_q(GL(n))$. Кроме того, имеется вложение (1.13) алгебры $\mathcal{L}_q$ в $U_q(gl_n)$ – дуальную алгебру к $\text{Fun}_q(GL(n))$. Вследствие этого можно определить спаривание между генераторами $\hat{l}_i^j$ и t_i^j и задать линейное действие алгебры $\mathcal{L}_q$ на алгебре $\text{Fun}_q(GL(n))$ (см. замечание 20 работы [5]), которое будет представлением алгебры $\mathcal{L}_q$. Пользуясь явными формулами для спаривания $U_q(gl_n)$ и $\text{Fun}_q(GL(n))$ из [5], получаем следующее действие генераторов $\mathcal{L}_q$ на мономах, составленных из генераторов $\text{Fun}_q(GL(n))$,

$$\hat{L}_k \triangleright T_1 T_2 \dots T_{k-1} = R_{k-1} \dots R_2 R_1^2 R_2 \dots R_{k-1} T_1 T_2 \dots T_{k-1}. \quad (4.1)$$

Здесь мы воспользовались компактным обозначением $R_i = R_{i \ i+1}$.

Таким образом, представление генераторов алгебры $\mathcal{L}_q$ задается цепочкой R -матриц, стоящих в правой части равенства (4.1). При этом индексы k -го пространства нумеруют генераторы $\mathcal{L}_q$, а индексы пространств от первого до $(k-1)$ -го являются матричными индексами операторов представления. Введем удобные обозначения

$$J_1 = I, \quad J_k = R_{k-1} J_{k-1} R_{k-1}, \quad k \geq 2.$$

Таким образом, действие (4.1) сопоставляет генераторам $\hat{L}_k$ матрицу J_k . Нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. *Рассмотрим АО $\mathcal{L}_q$, порожденную соотношениями (1.1), с произвольной R -матрицей, которую мы будем трактовать как матрицу линейного оператора, действующего в тензорном квадрате n -мерного векторного пространства V . Рассмотрим линейное отображение $\theta_k: \mathcal{L}_q \rightarrow \text{End}(V^{\otimes k})$, заданное на уровне генераторов $\mathcal{L}_q$ по правилу*

$$\begin{cases} \theta_k(e_{\mathcal{L}}) = \text{id}_{V^{\otimes k}}, \\ \theta_k(\hat{L}_{k+1}) = \alpha J_{k+1}, \\ \theta_k(\hat{l}_1 \hat{l}_2 \dots \hat{l}_m) = \theta_k(\hat{l}_1) \theta_k(\hat{l}_2) \dots \theta_k(\hat{l}_m), \end{cases} \quad (4.2)$$

где $\alpha \neq 0$ – произвольное комплексное число. Тогда θ_k определяет (приводимое) представление алгебры $\mathcal{L}_q$ в пространстве $V^{\otimes k}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно подставить представление $\theta_k(\hat{L}_{k+1}) = J_{k+1}$ в уравнение (1.1), записанное в виде

$$R_{k+1} \hat{L}_{k+1} R_{k+1} \hat{L}_{k+1} = \hat{L}_{k+1} R_{k+1} \hat{L}_{k+1} R_{k+1},$$

и воспользоваться таким следствием уравнения Янга–Бакстера (1.2) для цепочек R -матриц:

$$\begin{aligned} (R_1 \dots R_k) R_i &= R_{i+1} (R_1 \dots R_k), & 1 \leq i \leq k-1, \\ (R_k \dots R_1) R_i &= R_{i-1} (R_k \dots R_1), & 2 \leq i \leq k. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Что касается нормировочного множителя $\alpha \neq 0$, то он может быть произвольным, поскольку перенормировка генераторов $\hat{L} \rightarrow \alpha \hat{L}$ является очевидным автоморфизмом АО (1.1) (в отличие от мАО (2.2)). Утверждение доказано.

Отметим, что при доказательстве утверждения 4 нам требовалось только уравнение Янга–Бакстера для R -матрицы и ничего больше. Поэтому представление (4.2) справедливо не только для квантово-групповой R -матрицы, но и для произвольного решения уравнения Янга–Бакстера (даже не геккевского типа). Условие Гекке требуется для выделения неприводимых компонент в представлении (4.2).

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. *Рассмотрим АО $\mathcal{L}_q$, порожденную соотношениями (1.1) с геккевской R -матрицей. Пусть дано представление θ_k (4.2) алгебры $\mathcal{L}_q$ (1.1) в пространстве $V^{\otimes k}$. Разложим пространство $V^{\otimes k}$ в прямую сумму неприводимых модулей $V_{\nu(i)}$ относительно локального представления алгебры Гекке H_k в соответствии с формулой (3.4). Тогда в каждом подпространстве $V_{\nu(i)}$ реализуется неприводимое представление алгебры $\mathcal{L}_q$, операторы которого на генераторах $\hat{l}_i^j$ задаются формулой*

$$\theta_k^{\nu(i)}(\hat{L}_{k+1}) = Y_{\nu(i)}(R)\theta_k(\hat{L}_{k+1})Y_{\nu(i)}(R). \quad (4.4)$$

Представления, отвечающие разным таблицам $\nu(i)$ одного разбиения ν , эквивалентны.

Мы не будем приводить подробного доказательства этого утверждения. Укажем только, что оно основано на том, что q -проекторы Юнга Y_ν являются полиномами от операторов $J_1, \dots, J_{k-1}$ [6]. Операторы J_i образуют коммутативный набор, в чем легко убедиться с помощью (4.3). Как следствие соотношение

$$R_{k+1}\theta_k(\hat{L}_{k+1})R_{k+1}\theta_k(\hat{L}_{k+1}) = \theta_k(\hat{L}_{k+1})R_{k+1}\theta_k(\hat{L}_{k+1})R_{k+1},$$

справедливое в $V^{\otimes k}$, допускает проекцию на подпространства V_ν в соответствии с (4.4).

Подчеркнем, что для построения представлений θ_k^ν не требуется условия конечности ранга симметрии матрицы R .

Представление θ_1 в самом пространстве V является неприводимым и дается формулой

$$\theta_1(\hat{L}_2) = R_{12}^2. \quad (4.5)$$

Поэтому мы будем называть такое представление фундаментальным представлением R -типа.

Если по представлению (4.5) построить представление мАО (2.2) (сделав сдвиг (2.1)), результат будет следующий:

$$\theta_1(L_2) = -R_{12}, \quad (4.6)$$

где первое пространство является пространством представления, а индексы второго пространства нумеруют генераторы алгебры.

Обсудим кратко связь фундаментальных представлений B - и R -типов. В случае, когда ранг симметрии $p = 2$ (например, для $U_q(sl_2)$ R -матрицы), эти представления эквивалентны. Более точно, ситуация следующая. В соответствии с (1.6) q -антисимметризатор $A^{(2)}$ является проектором единичного ранга и его матрица может быть представлена в виде

$$A_{i_1 i_2}^{j_1 j_2} = u_{i_1 i_2} v^{j_1 j_2},$$

при этом матрицы $\|u_{ij}\|$ и $\|v^{ij}\|$ являются невырожденными. Можно показать, что представления $\pi^{(1)}$ и θ_1 мАО (2.2) связаны соотношением

$$q^2 u_1 \pi^{(1)}(L_2) u_1^{-1} = q I_{12} + \theta_1(L_2).$$

Если перейти к представлениям $\bar{\pi}^{(1)}$ и $\bar{\theta}_1$ для алгебры $\mathcal{SL}_q$, то приведенная формула упростится до соотношения

$$u_1 \bar{\pi}^{(1)}(L_2) u_1^{-1} = \bar{\theta}_1(L_2).$$

В случае, когда ранг симметрии p матрицы R больше двух, представления B - и R -типов уже не эквивалентны. На уровне алгебры $\mathcal{SL}_q$ представление $\bar{\theta}_1$ эквивалентно представлению $\bar{\pi}^{[p-1]}$ (3.10).

В заключение кратко перечислим полученные результаты и обратим внимание на нерешенные вопросы и возможные перспективы.

Итак, для алгебры уравнения отражений построены серии конечномерных представлений, которые параметризуются стандартными таблицами Юнга. Эти представления существуют для любой R -матрицы, удовлетворяющей дополнительным условиям (1.3), (1.5) и (1.6). Как следует из формулы (3.13), кольцо Гротендика⁵⁾ категории Шура–Вейля, связанной с этими представлениями, при произвольной геккевской R -матрице ранга симметрии p изоморфно кольцу Гротендика категории конечномерных модулей над $U(sl_p)$. Однако размерности соответствующих неприводимых модулей, образующих простые объекты этих категорий, могут весьма сильно отличаться друг от друга.

Возникает естественный вопрос о полноте полученного набора представлений. Иными словами, любое ли конечномерное *вполне приводимое* представление АО (1.1) (или мАО (2.2)) эквивалентно прямой сумме неприводимых модулей V_ν ? Относительно произвольной R -матрицы какого-либо определенного ответа на этот вопрос дать нельзя, так как знание только ее ранга симметрии дает слишком мало информации о конкретной структуре соответствующей АО. По-видимому, здесь необходим анализ явных коммутационных соотношений в каждом частном случае.

Для R -матрицы, связанной с квантовой универсальной обертывающей алгеброй $U_q(sl_n)$ ($p = n$), имеются некоторые аргументы, позволяющие выдвинуть гипотезу, что построенные выше представления совпадают с представлениями, приходящими из $U_q(sl_n)$ посредством формулы (1.13). Пока этот вопрос является открытым.

⁵⁾ Напомним, что кольцом Гротендика (квази)тензорной категории модулей над ассоциативной алгеброй называется множество классов эквивалентности модулей, снабженное операциями сложения и умножения (как правило, это прямая сумма и тензорное произведение модулей).

Наконец, в качестве нерешенных задач можно указать на проблему построения теории представлений АО для R -матриц, связанных с квантовыми группами B , C и D серий, а также на важную для теории интегрируемых систем проблему построения представлений алгебры уравнения отражений с параметром.

Список литературы

- [1] И. В. Чередник. ТМФ. 1984. Т. 61. С. 35–44.
- [2] P. Schupp, P. Watts, B. Zumino. Lett. Math. Phys. 1992. V. 25. P. 139–147; B. Zumino. Introduction to the differential geometry of quantum groups. Preprint UCB-PTH-62/91. Univ. of California, 1991; A. P. Isaev, P. Pyatov. Phys. Lett. A. 1993. V. 179. P. 81–90.
- [3] J. Donin, A. Mudrov. Lett. Math. Phys. 2002. V. 62. P. 17–32.
- [4] D. Gurevich, P. Saponov. J. Phys. A. 2002. V. 35. P. 9629–9643; 2001. V. 34. P. 4553–4569.
- [5] Н. Ю. Решетихин, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев. Алгебра и анализ. 1989. Т. 1. № 1. С. 178–206.
- [6] O. Ogievetsky, P. Pyatov. Lecture on Hecke algebras. In: Symmetries and Integrable Systems. Ed. S. Z. Pakuliak. Dubna: JINR, 2000. P. 39–88.
- [7] A. Gyoja. Osaka J. Math. 1986. V. 23. P. 841–852; R. Dipper, G. James. Proc. London Math. Soc. 1987. V. 54. P. 57–82; G. E. Murphy. J. Algebra. 1992. V. 152. P. 492–513.
- [8] Д. И. Гуревич. Алгебра и анализ. 1990. Т. 2. № 4. С. 119–148.
- [9] P. P. Kulish, R. Sasaki, C. Schwiebert. J. Math. Phys. 1993. V. 34. P. 286–304.
- [10] P. P. Kulish, E. K. Sklyanin. J. Phys. A. 1992. V. 25. P. 5963–5976; P. P. Kulish, R. Sasaki. Progr. Theor. Phys. 1993. V. 89. P. 741–761.
- [11] J. Donin, P. P. Kulish, A. I. Mudrov. On universal solution to reflection equation. math.QA/0210242.
- [12] А. А. Белавин, В. Г. Дринфельд. Функц. анализ и его прилож. 1982. Т. 16. № 3. С. 1–29.
- [13] П. П. Кулиш. Алгебра и анализ. 1994. Т. 6. № 2. С. 195–205.
- [14] D. Gurevich, R. Leclercq, P. Saponov. J. Geom. Phys. 2002. V. 44. P. 251–278.
- [15] D. Gurevich, R. Leclercq, P. Saponov. q -Index on braided non-commutative spheres. math.QA/0207268.