Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Кодама, Топология вещественной части гиперэллиптического якобиана, связанного с периодической решеткой Тоды, *ТМФ*, 2002, том 133, номер 3, 439–462

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf410>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 06:43:03

ТОПОЛОГИЯ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ЧАСТИ ГИПЕРЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ЯКОБИАНА, СВЯЗАННОГО С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ РЕШЕТКОЙ ТОДЫ

Исследуется топология изоспектрального вещественного многообразия $sl(N)$ -периодической решетки Тоды, состоящей из 2^{N-1} различных систем. Решения этих систем имеют сингулярные точки, множество которых определяет дивизор на многообразии. При добавлении дивизора многообразие компактифицируется как вещественная часть $(N-1)$ -мерного многообразия Якоби, связанного с гиперэллиптической римановой поверхностью рода $g = N-1$. Изучена вещественная структура дивизора и высказаны гипотезы о топологии аффинной части вещественного якобиана и о правиле склейки по дивизору для компактификации многообразия на основе знакового представления группы Вейля $sl(N)$.

Ключевые слова: периодическая решетка Тоды, многообразие Якоби, тета-дивизор, тета-функция Римана.

1. ВВЕДЕНИЕ

Бесконечная решетка Тоды определяется как гамильтонова система с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} P_k^2 + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \epsilon_k e^{Q_k - Q_{k+1}},$$

где $\epsilon_k \in \{\pm 1\}$. Решение этой системы сингулярно, если по крайней мере один из знаков ϵ_k в потенциальном члене является отрицательным [1]. При использовании координат Флашки $a_k := \epsilon_k e^{Q_k - Q_{k+1}}$ и $b_k := -P_k$ уравнения Гамильтона с гамильтонианом H имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{da_k}{dt} &= a_k(b_{k+1} - b_k), \\ \frac{db_k}{dt} &= a_k - a_{k-1}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

*Department of Mathematics, Ohio State University, Columbus, USA.
E-mail: kodama@math.ohio-state.edu

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Знак ϵ_k инвариантен относительно потока Тоды, и аффинная часть изоспектрального многообразия потока Тоды состоит из 2^{N-1} несвязных кусков, занумерованных знаками a_k (заметим, что величина $\prod_{k=1}^N a_k$ является инвариантом).

Бесконечная решетка Тоды для функций $\{(a_k, b_k): k \in \mathbb{Z}\}$ может быть приведена к матричному уравнению – формулировке Лакса

$$\frac{dL}{dt} = [L, A], \quad (1.2)$$

где L – $(\infty \times \infty)$ -матрица вида

$$L = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ \ddots & a_{-1} & b_0 & 1 & 0 & & & \\ & 0 & a_0 & b_1 & 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & a_{k-2} & b_{k-1} & 1 & 0 \\ & & & & 0 & a_{k-1} & b_k & 1 & \ddots \\ & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

а A – строго нижнетреугольная часть L , т.е. $A = (L)_-$. Уравнение Лакса есть в точности условие совместности следующих линейных уравнений при условии изоспектральности:

$$\begin{aligned} L\phi &= \lambda\phi, \\ \frac{d\phi}{dt} &= A\phi. \end{aligned} \quad (1.4)$$

$sl(N)$ -периодическая решетка Тоды задается условиями $Q_{k+N} = Q_k$ и $P_{k+N} = P_k$, из которых следует, что

$$a_{k+N} = a_k, \quad b_{k+N} = b_k. \quad (1.5)$$

Тогда собственный вектор $\phi = (\dots, \phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots)^T$ удовлетворяет уравнению

$$\phi_{k+N} = z\phi_k, \quad (1.6)$$

где z – спектральный параметр, являющийся собственным значением монодромии этой периодической задачи. Матрица Лакса для $sl(N)$ -периодической решетки Тоды имеет вид

$$L_P = \begin{pmatrix} b_1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & a_N z^{-1} \\ a_1 & b_2 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & a_{N-2} & b_{N-1} & 1 \\ z & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{N-1} & b_N \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

Характеристическое уравнение для L_P определяет алгебраическую кривую

$$\det(L_P - \lambda I) = - \left(z + \frac{\prod_{i=1}^N a_i}{z} - P(\lambda) \right) = 0, \quad (1.8)$$

которая представляет собой одномерное аффинное многообразие на $(\lambda, z) \in \mathbb{C}^2$. Здесь $P(\lambda)$ — N -й многочлен от λ вида

$$P(\lambda) := \Delta_{1,N}(\lambda) - a_N \Delta_{2,N-1}(\lambda),$$

где $\Delta_{m,n}(\lambda)$ при $n \geq m$ определяется как

$$\Delta_{m,n}(\lambda) := \begin{vmatrix} b_m - \lambda & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ a_m & b_{m+1} - \lambda & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n-2} & b_{n-1} - \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{n-1} & b_n - \lambda \end{vmatrix}. \quad (1.9)$$

Мы полагаем, что все корни дискриминанта уравнения (1.8)

$$F(\lambda) := P(\lambda)^2 - 4 \prod_{j=1}^N a_j$$

различны, т.е.

$$F(\lambda) = \prod_{k=1}^{2N_R} (\lambda - \lambda_k) \prod_{l=1}^{N_I} ((\lambda - \nu_l)(\lambda - \bar{\nu}_l)), \quad (1.10)$$

где все $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $\nu_l \in \mathbb{C}$ различны и $N_R + N_I = N$. Отсюда следует, что алгебраическая кривая, для которой выполняется это условие, является гладким аффинным многообразием. Будем говорить, что матрица L_P находится в классе (P), если соответствующая матрица периодов L удовлетворяет этому условию. Фазовое пространство периодической решетки имеет вид

$$Z_{\mathbb{R}}^P := \{(a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N) \in \mathbb{R}^{2N} : L_P \text{ в классе (P)}\}.$$

Поскольку $\mathfrak{sl}(N)$ -решетка Тоды является гамильтоновой системой степени N , ее интегрируемость можно доказать, найдя N независимых инволютивных интегралов. Эти интегралы I_k даются коэффициентами характеристического уравнения (1.8), где $P(\lambda)$ определяется как

$$P(\lambda) = (-1)^N \left(\lambda^N + \sum_{k=1}^N (-1)^k I_k(L_P) \lambda^{N-k} \right), \quad (1.11)$$

где сделана замена координат (λ, z) на (λ, y) при $y = 2z + P(\lambda)$. Обозначим комплексно-сопряженные пары корней как $(\lambda_{N_R+2k-1} = \nu_k, \lambda_{N_R+2k} = \bar{\nu}_k)$ при $k = 1, \dots, N_I$, как в формуле (1.10). Тогда компактная риманова поверхность, связанная с плоской кривой $\mathcal{C}$, получается добавлением точек на бесконечности путем введения второй карты $\mathcal{C}'$,

$$(y')^2 = \prod_{k=1}^{2N} (1 - \lambda_k \lambda'),$$

которая склеивается с картой $\mathcal{C}$ с помощью изоморфизма $\lambda' = 1/\lambda$, $y' = y/\lambda^N$. Эта риманова поверхность $\mathcal{R} = \mathcal{C} \cup \mathcal{C}'$ называется гиперэллиптической римановой поверхностью рода $g = N - 1$ и топологически является компактной поверхностью с g ручками. На $\mathcal{R}$ можно определить морфизм $\pi: \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{CP}^1$, полагая $(\lambda, y) \mapsto \lambda$ на карте $\mathcal{C}$ и аналогично на карте $\mathcal{C}'$. Отметим, что морфизм π является двукратным накрытием $\mathbb{CP}^1$, за исключением точек ветвления λ_k . Точки на бесконечной части поверхности $\mathcal{R}$, обозначаемые как $p_{\infty}^{\pm}$, суть $(\lambda' = 0, y' = \pm 1)$, т.е.

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_0 \cup \{p_{\infty}^+, p_{\infty}^-\}, \quad (2.2)$$

где $\mathcal{R}_0$ – аффинная часть поверхности $\mathcal{R}$. Можно также определить симплектический базис в группе $H_1(\mathcal{R}, \mathbb{Z})$, обозначаемый как $\{(\alpha_j, \beta_j): j = 1, \dots, g\}$, где пути α_i и α_j , так же как и пути β_i и β_j , не пересекаются друг с другом, тогда как пути α_i и β_j пересекаются, причем только в одной точке, где $i = j$.

Определим теперь *вещественную* часть римановой поверхности, обозначаемую $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}$, как множество фиксированных точек антиголоморфной инволюции, получаемой путем сопряжения $(\lambda, y) \mapsto (\bar{\lambda}, \bar{y})$:

$$\mathcal{R}_{\mathbb{R}} := \{(\lambda, y) \in \mathcal{R}: \lambda = \bar{\lambda}, y = \bar{y}\}.$$

Тогда легко видеть, что имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть $\mathcal{R}$ – компактная (гладкая) риманова поверхность рода g . Тогда ее вещественная часть $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}$ изоморфна несвязному объединению N_R окружностей, $\mathbb{RP}^1 \cong S^1$:

$$\mathcal{R}_{\mathbb{R}} \cong \overbrace{S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1}^{N_R},$$

где $2N_R$ – число вещественных нулей в уравнении (2.1), т.е. вещественных точек ветвления поверхности $\mathcal{R}$.

Согласно теореме Римана–Роха на римановой поверхности $\mathcal{R}$ рода g имеются g голоморфных дифференциалов, которые мы обозначим как $\omega_1, \dots, \omega_g$. Нормируем эти дифференциалы условиями

$$\oint_{\alpha_i} \omega_j = \delta_{i,j}, \quad i, j = 1, \dots, g. \quad (2.3)$$

Тогда связанный с $\mathcal{R}$ якобиан $\text{Jac}(\mathcal{R})$ определяется как комплексный тор с решеткой Γ ранга $2g$:

$$\text{Jac}(\mathcal{R}) = \mathbb{C}^g / \Gamma, \quad \Gamma := \{ \Omega m : m = (m_1, \dots, m_{2g})^t \in \mathbb{Z}^{2g} \},$$

где $(g \times 2g)$ -матрица Ω – матрица периодов, определяемая как

$$\Omega = (I, B), \quad B = \left(\oint_{\beta_i} \omega_j \right) \Big|_{1 \leq i, j \leq g}, \quad (2.4)$$

где I – единичная $(g \times g)$ -матрица. Оказывается, что наша цель – исследования топологической структуры изоспектрального многообразия периодической решетки Тоды – сводится именно к изучению топологической структуры вещественной части якобиана и его дивизоров, соответствующих сингулярностям потока Тоды.

2.2. Периодическая решетка Тоды. Поток Тоды можно описывать как линейный поток на якобиане $\text{Jac}(\mathcal{R})$ римановой поверхности $\mathcal{R}$. Сначала получим решение в простейшем случае $N = 2$ ($g = 1$), а общий случай обсудим в следующем разделе. Матрица Лакса L_P в этом случае имеет вид

$$L_P = \begin{pmatrix} b_1 & 1 + a_2 z^{-1} \\ z + a_1 & b_2 \end{pmatrix},$$

а ее спектральная кривая есть эллиптическая кривая

$$\det(L_P - \lambda I) = - \left(z + \frac{a_1 a_2}{z} - P(\lambda) \right) = 0.$$

Полином $P(\lambda)$ имеет вид

$$P(\lambda) = \lambda^2 + I_2, \quad I_2 = -b_1^2 - a_1 - \frac{1}{a_1}, \quad (2.5)$$

и мы полагаем, что $I_1 = b_1 + b_2 = 0$ и $I_3 = a_1 a_2 = 1$. Тогда аффинная часть изоспектрального многообразия имеет вид

$$Z_{\mathbb{R}}^P(\gamma) = \left\{ (a_1, b_1) \in \mathbb{R}^2 : b_1^2 + a_1 + \frac{1}{a_1} = \gamma_2 \in \mathbb{R} \right\} \cong \begin{cases} S^1 \sqcup \mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}, & \gamma_2 > 2, \\ \mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}, & \gamma_2 < 2. \end{cases}$$

Таким образом, имеем

$$Z_{\mathbb{R}}^P(\gamma) \cong \mathcal{R}_{\mathbb{R}} \setminus \{p_{\infty}^+, p_{\infty}^-\} = \mathcal{R}_{\mathbb{R}} \cap \mathcal{R}_0. \quad (2.6)$$

Два несвязных куска $\mathbb{R}$ компактифицированы так, что образуют окружность S^1 , т.е. соответствующее решение становится сингулярным один раз в каждой точке p_{∞}^+ или p_{∞}^-

и в целом дважды за один цикл. Таким образом, компактифицированное многообразие $\hat{Z}_{\mathbb{R}}^P(\gamma)$ есть в точности $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}$ (см. более точное утверждение ниже).

Поток Тоды определяется уравнениями

$$\frac{da_1}{dt} = -2a_1b_1, \quad \frac{db_1}{dt} = a_1 - \frac{1}{a_1},$$

решение которых можно получить, исключая a_1 из (2.5):

$$\frac{db_1}{dt} = \pm \sqrt{(b_1^2 + I_2)^2 - 4},$$

что можно также записать в виде

$$\left. \frac{d\lambda}{y(\lambda)} \right|_{\lambda=b_1} = \pm dt.$$

Здесь $y(\lambda) = \sqrt{(\lambda^2 + I_2)^2 - 4}$ и дифференциал $\omega_1 = d\lambda/y$ является голоморфным дифференциалом на $\mathcal{R}$. Тогда решение можно записать с помощью *эллиптического* интеграла

$$\int_{b_0}^{b_1} \omega_1 = \pm t + \delta_1, \quad (2.7)$$

где b_0 — фиксированная точка, а δ_1 — произвольная константа. Поскольку интеграл (2.7) зависит от пути из b_0 в b_1 , его следует определять на якобиане $\text{Jac}(\mathcal{R})$ — комплексном торе $\mathbb{C}/\Gamma$ с решеткой Γ , порожденной матрицей периодов $\Omega = (1, B_{11})$, где $B_{11} = \oint_{\beta_1} \omega_1$. Более того, эллиптический интеграл (2.7) должен определяться на вещественной части якобиана. А именно, мы имеем следующие отображения с использованием отображения Абеля–Якоби v для описания потока Тоды:

$$\begin{aligned} Z_{\mathbb{R}}^P(\gamma) &\longrightarrow \mathcal{R}_{\mathbb{R}} \xrightarrow{v} \text{Jac}(\mathcal{R})_{\mathbb{R}}, \\ b_1 &\longmapsto \mu_1 \longmapsto \left[\int_{\mu_*}^{\mu_1} \omega_1 \right], \end{aligned}$$

где μ_* — фиксированная точка на вещественной части римановой поверхности $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}$. Отсюда следует, что поток Тоды *линеен* на якобиане, и решение $b_1(t)$ дается решением задачи обращения Якоби (в данном случае в точности эллиптической функцией Якоби), которая определяется как обратное отображение к v : $\psi: \text{Jac}(\mathcal{R}) \longrightarrow \mathcal{R}$. Тогда решение задачи обращения Якоби определяется нулями тета-функции Римана (явный вид решения для потока Тоды в случае рода $g > 1$ приведен в следующем разделе). Теперь задача состоит в определении структуры вещественной части $\text{Jac}(\mathcal{R}) \setminus \Theta$, изоморфной $Z_{\mathbb{R}}^P(\gamma)$. В этом примере дивизор Θ имеет вид

$$\Theta = \{v(p_{\infty}^+), v(p_{\infty}^-)\},$$

а компактифицированное многообразие есть $\widehat{Z}_{\mathbb{R}}^P(\gamma) \cong \mathcal{R}_{\mathbb{R}} \cong \text{Jac}(\mathcal{R})_{\mathbb{R}}$, т.е.

$$\text{Jac}(\mathcal{R})_{\mathbb{R}} \cong \begin{cases} S^1 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & \gamma_2 > 2, \\ S^1, & \gamma_2 < 2, \end{cases} \quad (2.8)$$

где каждая окружность S^1 занумерована знаками (ϵ_1, ϵ_2) , т.е. $(++)$ или $(--)$ при $\gamma_2 > 2$ и $(--)$ при $\gamma_2 < 2$. Таким образом, одна из окружностей S^1 при $\gamma_2 > 2$ получается склейкой двух копий $\mathbb{R}$ на Θ . Нахождение структуры склейки аффинных кусков вещественной части якобиана $\text{Jac}(\mathcal{R})_{\mathbb{R}} \setminus \Theta \cong Z_{\mathbb{R}}^P(\gamma)$ является одной из основных целей настоящей работы.

Для случая произвольного рода достаточно давно известно, что число связных компонент в вещественной части якобиана, обозначаемых как $n(\text{Jac}_{\mathbb{R}}) := \text{rank } H_0(\text{Jac}(\mathcal{R})_{\mathbb{R}}, \mathbb{Z})$, полностью определяется числом связных компонент в вещественной части римановой поверхности $N_R = \text{rank } H_0(\mathcal{R}_{\mathbb{R}}, \mathbb{Z})$, т.е. справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2 ([3], см. также [4]). Пусть $\mathcal{R}$ — компактная риманова поверхность рода g с непустой вещественной компонентой, $N_R \neq 0$. Тогда каждая связная компонента $\text{Jac}(\mathcal{R})_{\mathbb{R}}$ изоморфна g -мерному вещественному тору $\mathbb{T}^g = \mathbb{R}^g / \mathbb{Z}^g$ и

$$\text{Jac}(\mathcal{R})_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{T}^g \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^m,$$

где $m = N_R - 1 \leq g$, и, таким образом, $n(\text{Jac}_{\mathbb{R}}) = 2^m$.

Доказательство этого утверждения, основанное на структуре решения периодической решетки Тоды, дано в следующем разделе. Далее мы изучим топологическую структуру аффинных частей $\text{Jac}(\mathcal{R})_{\mathbb{R}}$ и дивизор Θ и найдем правило склейки аффинных частей, занумерованных знаками $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_N)$ для компактификации. В работе [2] было показано, что дивизор Θ состоит из $g + 1$ неприводимых компонент Θ_k , где a_k имеет сингулярность (см. (1.12)). Тогда можно ожидать, что каждый тор $\mathbb{T}^g$ в предложении 2.2 поделен на $g + 1$ аффинных многообразий с помощью этих дивизоров Θ_k . Для того чтобы изучить случай произвольного рода, в разделе 3 мы дадим краткий обзор теории периодической решетки Тоды и формулу для решения в терминах тета-функции Римана $\vartheta(x|B)$. Они используются в разделе 4 при изучении геометрии дивизоров, которые даются нулями $\vartheta(x|B)$ с некоторыми трансляциями по x .

3. РЕШЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ РЕШЕТКИ ТОДЫ

3.1. Изоспектральное многообразие и симметрические произведения римановых поверхностей. Пусть пара бесконечномерных векторов $\{\phi^{(1)}, \phi^{(2)}\}$ является фундаментальным набором решений разностного уравнения $L\phi = \lambda\phi$ с условием периодичности (1.5). Предполагается, что векторы $\phi^{(j)} = (\dots, \phi_{-1}^{(j)}, \phi_0^{(j)}, \phi_1^{(j)}, \dots)$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \phi_0^{(1)} &= 1, & \phi_1^{(1)} &= 0, \\ \phi_0^{(2)} &= 0, & \phi_1^{(2)} &= 1. \end{aligned} \quad (3.1)$$

(Отметим, что выбранный индекс “0” можно сдвигать на произвольное число $k \pmod{N+1}$.) Тогда можно определить матрицу монодромии M , полагая

$$\begin{pmatrix} \phi_{k+N}^{(1)} \\ \phi_{k+N}^{(2)} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \phi_k^{(1)} \\ \phi_k^{(2)} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \phi_N^{(1)} & \phi_{N+1}^{(1)} \\ \phi_N^{(2)} & \phi_{N+1}^{(2)} \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

ЛЕММА 3.1. *При условии $\prod_{k=1}^N a_k = 1$ имеем $\det M = 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко показать, что вронсиан $W(n) := \phi_n^{(1)} \phi_{n+1}^{(2)} - \phi_n^{(2)} \phi_{n+1}^{(1)}$ удовлетворяет соотношению

$$W(n) = a_{n-1} W(n-1) = \left(\prod_{k=0}^{n-1} a_k \right) W(0).$$

Положим тогда $n = N$, т.е. $W(N) = \det M$, и используем равенство $W(0) = 1$ для завершения доказательства.

Из условия периодичности (1.6) можно заключить, что спектральный параметр z является собственным значением M , и мы получим

$$z + \frac{1}{z} - \operatorname{tr} M = 0.$$

Тогда справедливо равенство

$$\operatorname{tr} M = \phi_N^{(1)} + \phi_{N+1}^{(2)} = P(\lambda), \quad (3.3)$$

где N -й полином $P(\lambda)$ дается соотношением (1.11).

Найдем явный вид фундаментальных решений $\phi^{(j)}$. Путем прямого вычисления легко показать, что справедлива

ЛЕММА 3.2. *При $n \geq 1$ величины $\phi_{n+1}^{(j)}$ даются соотношениями*

$$\phi_{n+1}^{(1)} = -a_N (-1)^{n-1} \Delta_{2,n}, \quad \phi_{n+1}^{(2)} = (-1)^n \Delta_{1,n}, \quad (3.4)$$

где $\Delta_{m,n}$ определяются формулой (1.9), а $\Delta_{2,1} := 1$.

Рассмотрим теперь так называемый вспомогательный спектр μ_n , определяемый корнями уравнения $\phi_{N+1}^{(1)}(\lambda) = 0$. Обозначим

$$u_g(\lambda) := (-1)^{N-1} \Delta_{2,N}(\lambda) = \prod_{k=1}^{N-1} (\lambda - \mu_k) = 0, \quad (3.5)$$

где $g = N - 1$. Отметим, что некоторые из корней являются комплексными и образуют пару комплексно-сопряженных корней $(\mu_k, \bar{\mu}_k)$. С учетом (3.5) решения решетки Тоды a_k и b_k выражаются через симметрические функции корней μ_j при условиях изоспектральности $I_k = \gamma_k$ при $k = 1, \dots, N + 1$. Например, из определения (3.5) и с учетом равенства $I_1(L_P) = 0$ имеем

$$b_1 = - \sum_{j=2}^N b_j = - \sum_{n=1}^{N-1} \mu_n. \quad (3.6)$$

Отсюда следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Отображение φ из $Z_{\mathbb{R}}^P(\gamma)$ в вещественную часть g -кратного симметрического произведения аффинной части $\mathcal{R}_0$, обозначаемую как $\mathcal{R}_0^{(g)} := \mathcal{R}_0^g/S_g$,*

$$\varphi: Z_{\mathbb{R}}^P(\gamma) \longrightarrow (\mathcal{R}_0^{(g)})_{\mathbb{R}}$$

является сюръективным. Здесь S_g – симметрическая группа порядка $g = N - 1$.

Формулировка решетки Тоды с переменными μ_k называется системой Мамфорда [5]; она параметризует пространство модулей гиперэллиптических римановых поверхностей через тройки полиномов $(u_g(\lambda), v_g(\lambda), w_g(\lambda))$, определяемых факторизацией кривой (2.1):

$$y^2 = u_g(\lambda)w_g(\lambda) + v_g^2(\lambda). \quad (3.7)$$

Здесь $u_g(\lambda)$ дается формулой (3.5), $v_g(\lambda)$ – полином степени $g - 1 = N - 2$, а $w_g(\lambda)$ – приведенный (т.е. с единичным коэффициентом при старшем члене) полином степени $g + 2$. Отметим, что если все корни μ_k различны, то $v_g(\lambda)$ можно выразить в терминах μ_k при условии $v_g(\mu_k) = y(\mu_k)$, т.е.

$$v_g(\lambda) = \sum_{k=1}^g y(\mu_k) \prod_{j \neq k} \frac{\lambda - \mu_j}{\mu_k - \mu_j}. \quad (3.8)$$

Тройки системы Мамфорда $(u_d(\lambda), v_d(\lambda), w_d(\lambda))$ при $0 < d < g$ можно также использовать для параметризации дивизоров (см. следующий раздел).

Обсудим теперь топологию множества корней μ_k . Прежде всего отметим, что $\pi(\mathcal{R}_{\mathbb{R}})$ (где $P = (\lambda, y) \mapsto \pi(P) = \lambda$) состоит из нескольких интервалов

$$\pi(\mathcal{R}_{\mathbb{R}}) = \bigcup_{m=0}^{N_R} \Lambda_m, \quad 1 \leq N_R \leq N,$$

где $\Lambda_m = [\lambda_{2m}, \lambda_{2m+1}]$ при $\lambda_0 = \lambda_{2N_R+1} = \infty$ (т.е. $[\lambda_0, \lambda_1]$ и $[\lambda_{2N_R}, \lambda_{2N_R+1}]$ связаны через $\pi(p_{\infty}^{\pm})$).

ЛЕММА 3.3. *Если корень μ_k является вещественным, то он принадлежит одному из интервалов Λ_m .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\phi_{N+1}^{(1)}(\mu_k) = 0$, имеем

$$\mathrm{tr} M = \phi_N^{(1)} + \frac{1}{\phi_N^{(1)}}.$$

Отсюда следует, что $|\mathrm{tr} M| \geq 2$, а потому $\mu_k \in \pi(\mathcal{R}_{\mathbb{R}})$.

Поскольку множество точек $P_k \in \mathcal{R}$ состоит из вещественных и/или пары комплексно-сопряженных точек, имеем следующую лемму о топологии этих множеств.

ЛЕММА 3.4 [5]. Множество точек $P_k \in \mathcal{R}$ таких, что $\pi(P_k) = \mu_k$, $k = 1, \dots, g$, можно классифицировать следующим образом:

- а) $\mu_k \in \Lambda_{m_k}$ при некоторых $m_k \in \{0, 1, \dots, N_R\}$, и множество этих точек для каждого k изоморфно S^1 ;
- б) $\overline{P}_{S+1} = P_{S+2}$, или оба корня μ_{S+1} и μ_{S+2} лежат в одном и том же интервале Λ_{m_S} при некоторых m_S , и множество этих точек определяется как $V = \{(P, \overline{P}) \in \mathcal{R}^{(2)} = \mathcal{R}^2/S_2\}$.

Случай “б” получается при рассмотрении двух точек $P, \overline{P} \in \mathcal{R}$, которые можно непрерывно перемещать по $\mathcal{R}$ вплоть до того, как $P = \overline{P}$, где $\pi(P) \in \Lambda_{m_S}$, и далее перемещать две точки по Λ_{m_S} независимо от вещественной петли. Множество точек в этом случае включает $p_\infty^\pm$. Из леммы 3.4 видно, что решение, соответствующее случаю “а”, за исключением $\mu_k \in \Lambda_0 \cup \Lambda_{N_R}$, является периодическим циклом, а во всех остальных случаях решения имеют сингулярности.

Теперь можно доказать предложение 2.2 (см. также [4]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2.2. Обозначим $\mathcal{R}_\mathbb{R} = C_0 \sqcup \dots \sqcup C_m$ при $m = N_R - 1$, где каждое C_i порождает множество, соответствующее случаю “а” в лемме 3.4, т.е. если $P \in C_i$, то $\pi(P) \in \Lambda_i$. Тогда из леммы 3.4 следует, что симметрическое произведение $\mathcal{R}_\mathbb{R}^{(g)} = (\mathcal{R}^g/S_g)_\mathbb{R}$ покрывается множествами

$$U(i_1, \dots, i_j) := C_{i_1} \times \dots \times C_{i_j} \times V^k, \quad j + 2k = g.$$

Число несвязных множеств можно теперь вычислить следующим образом. Пусть $(n_1, \dots, n_g)$ – возрастающая последовательность чисел $n_k \in \{0, 1, \dots, m\}$, а число $m = N_R - 1$ таково, что если $S \in \{1, \dots, g\}$ – номер первого отличного от нуля n_k , тогда

$$0 = n_1 = \dots = n_{S-1} < n_S < n_{S+1} < \dots < n_g \leq m.$$

Это позволяет связать число n_k из последовательности со случаями “а” и “б” в лемме 3.4 следующим образом:

- 1) из $n_k = 0$ следует, что μ_k или принадлежит $\Lambda_0 \cup \Lambda_M$, или относится к случаю “б”, т.е. $P_k \in C_0$ или $(P_k, P_l) \in V$ для некоторых $P_l = \overline{P}_k$;
- 2) из $n_k \neq 0$ следует, что μ_k принадлежит ограниченному интервалу $\Lambda_{n_k} = [\lambda_{2n_k}, \lambda_{2n_k+1}]$.

Подсчитывая теперь число последовательностей $(n_1, \dots, n_g)$ при $n_k \in \{0, 1, \dots, m\}$ для каждого случая, когда $\mathcal{R}_\mathbb{R}$ имеет $N_R = m + 1$ связных компонент, получаем число связных компонент $\mathcal{R}_\mathbb{R}^{(g)}$ в виде

$$n(\mathcal{R}_\mathbb{R}^{(g)}) = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} = 2^m.$$

С другой стороны, записывая антиголоморфную инволюцию в матричном виде на решетке, заданной матрицей периодов $\Omega = (I, B)$ из (2.4), можно показать, что каждая связная компонента $(\mathbb{C}^g / \Gamma)_{\mathbb{R}} \cong \text{Jac}(\mathcal{R})_{\mathbb{R}}$ диффеоморфна вещественному тору $\mathbb{R}^g / \mathbb{Z}^g = \mathbb{T}^g$.

Замечая, что $n(\text{Jac}_{\mathbb{R}}) = n(\mathcal{R}_{\mathbb{R}}^{(g)})$, тем самым завершаем доказательство.

Отметим, что число $\binom{m}{j}$ дает полное число последовательностей, вид которых позволяет отождествить их с множеством $U(i_1, \dots, i_j)$ следующим образом:

$$\left(\overbrace{0, \dots, 0}^{g-j=S-1}, \overbrace{n_S, \dots, n_g}^j \right) \equiv \begin{cases} V^k \times C_{n_S} \times \dots \times C_{n_g}, & S = 2k + 1, \\ V^k \times C_0 \times C_{n_S} \times \dots \times C_{n_g}, & S = 2k + 2, \end{cases} \quad (3.9)$$

где $n_S \neq 0$. Таким образом, каждую связную компоненту можно охарактеризовать числом компонент C_{n_i} с ненулевыми n_i .

3.2. Поток Тоды на якобиане. Найдем на римановой поверхности поток Тоды, определяемый образом динамики μ_n при g -кратном отображении Абеля–Якоби $v_g: \mathcal{R}^{(g)} \rightarrow \text{Jac}(\mathcal{R})_{\mathbb{R}}$. Сначала заметим, что временная эволюция $\phi_n^{(1)}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\phi_n^{(1)}}{dt} + a_{n-1}\phi_{n-1}^{(1)} = a_{N-1}\phi_{-1}^{(1)}\phi_n^{(1)} + a_N\phi_n^{(2)}.$$

Это можно показать, вычислив n -й элемент этого уравнения,

$$\frac{d\phi^{(1)}}{dt} - A\phi^{(1)} = c_1\phi^{(1)} + c_2\phi^{(2)}.$$

Динамику μ_n можно тогда получить с учетом (3.4) при $\lambda = \mu_j$ и $n = N + 1$, т.е.

$$\left. \frac{d}{dt} \left(-a_N \prod_{k=1}^{N-1} (\lambda - \mu_k) \right) \right|_{\lambda=\mu_j} + a_N \phi_N^{(1)}(\mu_j) = a_N \phi_{N+1}^{(2)}(\mu_j).$$

Замечая, что $\phi_{N+1}^{(2)} = 1/\phi_N^{(1)}$, и используя (3.3), получаем

$$\frac{1}{y(\mu_j)} \frac{d\mu_j}{dt} = \pm \frac{1}{\prod_{k \neq j} (\mu_j - \mu_k)}, \quad (3.10)$$

где $y(\lambda) = \sqrt{P(\lambda)^2 - 4}$. Используя формулу интерполяции Лагранжа

$$\sum_{j=1}^{N-1} \frac{\mu_j^n}{\prod_{k \neq j} (\mu_j - \mu_k)} = \begin{cases} 0, & n < N - 2, \\ 1, & n = N - 2, \end{cases}$$

после интегрирования получаем

$$\sum_{j=1}^{N-1} \int_{\mu_*}^{\mu_j} \frac{\lambda^n d\lambda}{y(\lambda)} = \begin{cases} \delta_n, & n < N - 2, \\ \pm t + \delta_{g-1}, & n = N - 2. \end{cases} \quad (3.11)$$

Эти уравнения можно записать также в терминах голоморфных дифференциалов ω_k , нормированных условиями (2.3), и тогда мы приходим к хорошо известному результату (см., например, [6]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Периодический поток Тоды можно выразить как линейный поток на якобиане $\text{Jac}(\mathcal{R}) \cong \mathbb{C}^g/\Gamma$, связанном с римановой поверхностью $\mathcal{R}$ рода $g = N - 1$, т.е.*

$$\sum_{j=1}^g \int_{\mu_*}^{\mu_j} \omega_k = \pm C_{k,g-1} t + \delta'_k \pmod{\Gamma}, \quad k = 1, \dots, g,$$

где δ' – константа, а $(g \times g)$ -матрица $(C_{k,n})$ определяется условием нормировки (2.3) при

$$\omega_k = \sum_{n=0}^{g-1} C_{k,n} \frac{\lambda^n d\lambda}{y}. \quad (3.12)$$

С использованием предложений 3.1 и 3.2 мы построили отображения

$$\begin{aligned} Z_{\mathbb{R}}^P(\gamma) &\xrightarrow{\varphi} \mathcal{R}_{\mathbb{R}}^{(g)} \xrightarrow{v_g} \text{Jac}(\mathcal{R})_{\mathbb{R}}, \\ (b_1, \dots, b_N) &\longmapsto [\mu_1, \dots, \mu_g] \longmapsto \left[\sum_{j=1}^g \int_{\mu_*}^{\mu_j} \omega \right], \end{aligned} \quad (3.13)$$

где $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_g)$ и g -кратное отображение Абеля–Якоби v_g является сюръективным [5]. Поскольку прообраз каждой связной компоненты в $\text{Jac}(\mathcal{R})_{\mathbb{R}}$ задается в $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}^{(g)}$ выражением (3.9), обозначим

$$(\mathbb{T}^g)_j \cong (0, \dots, 0, n_{g-j+1}, \dots, n_g), \quad 0 \leq j \leq m \leq g, \quad (3.14)$$

и тогда

$$\text{Jac}(\mathcal{R})_{\mathbb{R}} \cong \bigsqcup_{j=0}^m \mathcal{M}_j, \quad \mathcal{M}_j = \overbrace{(\mathbb{T}^g)_j \sqcup \dots \sqcup (\mathbb{T}^g)_j}^{(m)_j}. \quad (3.15)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Поскольку тор $(\mathbb{T}^g)_j$ является вещественной частью комплексной абелевой группы $\text{Jac}(\mathcal{R}) \cong \mathbb{C}^g/\Gamma$, то он представляет собой вещественную абелеву группу, диффеоморфную g -мерному вещественному тору $\mathbb{R}^g/\mathbb{Z}^g$. Введем множество

$$(\mathbb{T}^k)_j \cong \left(\overbrace{0, \dots, 0, n_{g-j+1}, \dots, n_g}^k \right), \quad j \leq k < g.$$

Однако, если $k \neq j$, оно может не оказаться k -мерным вещественным тором. В настоящей работе мы не будем обсуждать детали определения $(\mathbb{T}^k)_j$, отметим только, что его топология определяется множеством $V = \{(P, \overline{P}) \in \mathcal{R}^{(2)}\}$ (см. [7]). Подробнее это исследование будет опубликовано отдельно.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Уравнение (3.10) можно выразить в виде интегрируемой системы Мамфорда (3.7) (см. [7])

$$\frac{dM_g(\lambda)}{dt} = [M_g(\lambda), B_g(\lambda)], \quad (3.16)$$

где матрицы $M_g(\lambda)$ и $B_g(\lambda)$ даются тройками системы Мамфорда (u_g, v_g, w_g) :

$$M_g(\lambda) = \begin{pmatrix} v_g(\lambda) & u_g(\lambda) \\ w_g(\lambda) & -v_g(\lambda) \end{pmatrix}, \quad B_g(\lambda) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b_g(\lambda) & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь $b_g(\lambda)$ – приведенный полином степени $g+2$, который единственным образом определяется из согласованности системы (3.16). Уравнение можно обобщить для описания динамики на дивизоре (см. ниже).

3.3. Тета-функция Римана и тета-дивизор. Здесь мы приведем решение периодической решетки Тоды в терминах тета-функции Римана, а также обсудим геометрию множества сингулярных точек, определяемых тета-дивизором нулей тета-функции Римана.

Сначала определим верхнюю полуплоскость Зигеля $\mathfrak{S}_g$ как множество симметричных комплексных $(g \times g)$ -матриц с положительно определенной мнимой частью, т.е.

$$\mathfrak{S}_g := \{B \in \mathfrak{M}(g, \mathbb{C}) : B^t = B, \operatorname{Im} B > 0\}.$$

Тогда на произведении $\mathbb{C}^g \times \mathfrak{S}_g$ можно определить тета-функцию Римана

$$\vartheta(z|B) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} \mathbf{e} \left(m^t z + \frac{1}{2} m^t B m \right),$$

где $\mathbf{e}(x) = e^{2\pi\sqrt{-1}x}$. Поскольку $\operatorname{Im} B > 0$, приведенный выше ряд сходится равномерно на компактных множествах на $\mathbb{C}^g \times \mathfrak{S}_g$ к голоморфной функции. Легко видеть, что тета-функция удовлетворяет соотношениям квазипериодичности

$$\begin{aligned} \vartheta(z + E_k|B) &= \vartheta(z|B), \\ \vartheta(z + B_k|B) &= \mathbf{e}(-z_k - B_{k,k})\vartheta(z|B), \end{aligned}$$

где $E_1, \dots, E_g, B_1, \dots, B_g$ – $(2g)$ -векторы-столбцы из матрицы периодов $\Omega = (I, B)$. Как следует из этих уравнений, для каждой фиксированной матрицы $B \in \mathfrak{S}_g$ дивизор тета-функции Римана инвариантен относительно трансляций на элементы решетки Γ , порожденной $E_1, \dots, B_g$, и он индуцирует дивизор Θ_0 на $\operatorname{Jac}(\mathcal{R})$, который называется *тета-дивизором*,

$$\Theta_0 := \{[z] \in \operatorname{Jac}(\mathcal{R}) : \vartheta(z|B) = 0\}.$$

Рассмотрим функцию $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{C}$, определяемую соотношением

$$f(P) := \vartheta(\tilde{v}(P) - c|B),$$

где $c \in \mathbb{C}^g$ – произвольный постоянный вектор, а $\tilde{v}$ – подъем отображения Абеля–Якоби v , т.е.

$$\tilde{v}: \mathcal{R}' \longrightarrow \mathbb{C}^g, \quad P \longmapsto \left(\int_{P_0}^P \omega \right),$$

где $\mathcal{R}'$ – многоугольник с $4g$ сторонами, полученный путем разрезания $\mathcal{R}$ по базисным циклам, $\{(\alpha_k, \beta_k): k = 1, \dots, g\}$, а $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_g)$ – голоморфный дифференциал. Тогда стандартной является следующая лемма (доказательство см., например, в [8]).

ЛЕММА 3.5. *Для нулей функции $f(P)$ выполнены следующие условия:*

- а) $f(P)$ имеет g нулей на $\mathcal{R}$ (считаемых с учетом их кратностей);
- б) Если $P_1, \dots, P_g$ – нули функции $f(P)$, то

$$\sum_{j=1}^g u(P_j) + [\kappa] = [c],$$

где κ – константа Римана.

Отсюда следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. *Пусть $Q_1, \dots, Q_g$ – множество произвольных точек на $\mathcal{R}$. Тогда функция $\vartheta\left(\tilde{v}(P) - \sum_{j=1}^g \tilde{v}(Q_j) - \kappa|B\right)$ имеет g нулей точно в $P = Q_1, \dots, Q_g$.*

С геометрической точки зрения предложение 3.3 представляет хорошо известный факт о тета-дивизоре Θ_0 :

СЛЕДСТВИЕ. *Тета-дивизор Θ_0 на якобиане $\text{Jac}(\mathcal{R})$ удовлетворяет соотношению*

$$\Theta_0 = W^{g-1} + [\kappa], \tag{3.17}$$

где W^{g-1} – образ r -кратного отображения Абеля–Якоби v_r при $r = g - 1$, т.е.

$$\begin{aligned} v_r: \mathcal{R}^{(r)} &\longrightarrow \text{Jac}(\mathcal{R}), \\ [Q_1, \dots, Q_r] &\longmapsto \left[\sum_{j=1}^r \int_{Q_0}^{Q_j} \omega \right]. \end{aligned} \tag{3.18}$$

ПРИМЕР 3.1. Риманова поверхность рода $g = 2$ и дивизор Θ_0 . В случае компактной римановой поверхности $\mathcal{R}$ рода $g = 2$ образ W^1 изоморфен римановой поверхности, и, следовательно, якобиан $\text{Jac}(\mathcal{R})$ содержит риманову поверхность рода $g = 2$ как замкнутое подмногообразие $\Theta_0 \cong \mathcal{R}$. Таким образом, имеем $\text{Jac}(\mathcal{R})_{\mathbb{R}} \cap \Theta_0 \cong \mathcal{R}_{\mathbb{R}}$.

Теперь можно найти решение периодической решетки Тоды, решая задачу обращения Якоби для μ_j из уравнения (3.2). Решение $\mu_j(t) = \pi(P_j)$ дается нулем тета-функции

$$f(P) = \vartheta(\tilde{v}(P) - c|B) = 0, \quad c = \pm C_{g-1}t + \kappa',$$

где $\kappa' = \kappa + \delta'$, а $C_{g-1} = (C_{1,g-1}, \dots, C_{g,g-1})$ — вектор, представляющий собой столбец матрицы $(C_{k,n})$ из (3.12). Из формулы (3.6) следует, что для получения решения $b_k(t)$ нам требуется именно сумма корней μ_n . Сумму $\sum_{j=1}^g \mu_j$ можно получить путем интегрирования, т.е.

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\partial\mathcal{R}'} \pi(P) d \ln f(P) = \sum_{j=1}^g \mu_j + \pi(p_{\infty}^+) + \pi(p_{\infty}^-),$$

где $\pi(p_{\infty}^{\pm})$ — вклады от бесконечности. Окончательно получаем (подробности доказательства см. в работе [6])

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. *Решение $(a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N)$ решетки Тоды дается выражением*

$$\begin{aligned} a_k(t) &= \frac{\tau_{k+1}(t)\tau_{k-1}(t)}{(\tau_k(t))^2}, \\ b_k(t) &= \frac{d}{dt} \ln \frac{\tau_k(t)}{\tau_{k-1}(t)}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

где $\tau_k(t) = \vartheta(c't + ck + \delta_0|B)$ при $c' = \pm C_{g-1}$, $c = \tilde{v}(p_{\infty}^-) - \tilde{v}(p_{\infty}^+)$ и $\delta_0 = \tilde{v}(p_{\infty}^+) - \kappa - \delta'$.

Теперь ясно, что если $\tau_k(t)$ обращается в нуль при некоторых k и t , то функции $a_k(t)$ и $b_{k\pm 1}(t)$ становятся сингулярными. Таким образом, дивизор Θ дается суммой множеств нулей тау-функций, которые являются тета-дивизором Θ_0 и его трансляциями Θ_k , т.е.

$$\Theta = \bigcup_{k=0}^g \Theta_k, \quad \Theta_k = \Theta_0 + k(\tilde{v}(p_{\infty}^-) - \tilde{v}(p_{\infty}^+)). \quad (3.20)$$

Таким образом, изоспектральное множество $Z_{\mathbb{R}}^P(\gamma)$ можно компактифицировать путем склейки по тета-дивизорам. Можно также заметить, что кратность нуля функции $\tau_k(t)$ дает кратность пересечения дивизоров. Комплексный вариант геометрии дивизоров был разработан в статье [2] (см. также [9] для случая конечных непериодических решеток Тоды). Настоящая работа посвящена вещественному варианту такого исследования, и наша основная цель заключается в том, чтобы исследовать структуру склейки в рамках теории Ли в терминах представления аффинной группы Вейля W .

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Для решения вида (3.19) легко показать, что тау-функции $\tau_k(t)$ удовлетворяют билинейным соотношениям Хироты

$$\tau_k \tau_k'' - (\tau_k')^2 = \tau_{k+1} \tau_{k-1}, \quad (3.21)$$

где $\tau_k' = d\tau_k/dt$ и $\tau_k'' = d^2\tau_k/dt^2$. Эта формула будет полезна при исследовании вырождения нулей, которое характеризует пересечение дивизоров.

4. ГИПОТЕЗЫ О ТОПОЛОГИИ $\text{Jas}(\mathcal{R})_{\mathbb{R}}$

Здесь мы выскажем несколько гипотез о геометрии дивизора на $\text{Jas}(\mathcal{R})_{\mathbb{R}}$ и топологии аффинной части $\text{Jas}(\mathcal{R})_{\mathbb{R}}$.

4.1. Геометрия дивизора Θ . Напомним, что Θ_k является трансляцией тета-дивизора Θ_0 на $k(Q - P)$, где $Q = v(p_{\infty}^-)$, $P = v(p_{\infty}^+)$, так что $\Theta_k \cong \Theta_0 \cong W^{g-1}$. Тогда, следуя работе [2], определим множества Θ_J для каждого подмножества $J \subsetneq \{0, 1, \dots, g\}$ как пересечения с Θ_k :

$$\Theta_J := \bigcap_{k \in J} \Theta_k, \quad \dim_{\mathbb{C}} \Theta_J = g - |J|. \quad (4.1)$$

Отметим, что $\Theta_J \supset \Theta_{J'}$, если $J \subset J'$, и $\Theta_J \cong \mathcal{R}$, если $|J| = g - 1$. Тогда мы имеем стратификацию якобиана:

$$\text{Jas}(\mathcal{R}) \supset \Theta^{(1)} \supset \Theta^{(2)} \supset \dots \supset \Theta^{(g)}, \quad \Theta^{(k)} := \bigcup_{|J|=k} \Theta_J.$$

Мы также имеем клеточное разложение дивизора Θ в терминах этих множеств:

$$\Theta = \bigsqcup_{J \subsetneq \{0, 1, \dots, g\}} D_J, \quad D_J := \Theta_J \bigcap_{k \notin J} \Theta_k^c, \quad (4.2)$$

где Θ_k^c — дополнение к Θ_k в $\text{Jas}(\mathcal{R})$. Для того чтобы вычислить пересечения $\text{Jas}(\mathcal{R})_{\mathbb{R}} \cap \Theta_J$, сформулируем следующую лемму.

ЛЕММА 4.1. Пусть $(\mathbb{T}^g)_j$ — g -мерный тор, определяемый уравнением (3.14). Тогда имеем

$$(\mathbb{T}^g)_j \cap \Theta_J = \begin{cases} (\mathbb{T}^{g-|J|})_j, & |J| \leq g - j, \\ \emptyset, & |J| > g - j. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала рассмотрим случай, когда $J = \{k\}$ при $k = 0, 1, \dots, g$. Поскольку имеется изоморфизм между Θ_k и образом $(g-1)$ -кратного симметрического произведения римановых поверхностей, $\Theta_k \cong W^{g-1}$ (предложение 3.1), то множество $\Theta_k \cap (\mathbb{T}^g)_j$ состоит из элементов, обозначаемых как $\left(\overbrace{0, \dots, 0}^{g-j-1}, n_{g-j+1}, \dots, n_g\right)$, т. е. один из первых $(g-j)$ элементов в $(\mathbb{T}^g)_j$ фиксирован в точке бесконечности. Отсюда следует утверждение леммы. Нетрудно видеть, что при $|J| > 1$ доказательство аналогично.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Лемма 4.1 является следствием формулы Пуанкаре

$$\Theta_J \cong |J|! W^{g-|J|} \quad (\text{гомологично}),$$

а многообразие $(\mathbb{T}^{g-|J|})_j$ в общем случае сингулярно. Однако представляется, что $(\mathbb{T}^{g-|J|})_j$ является гладким, если J состоит из последовательных чисел $J = \{S+1, \dots, S+|J|\} \pmod{N}$ (см. теорему 5 и следствие 1 в работе [2]).

Поскольку дивизор Θ является суммой нулей тау-функций $\tau_k(t) = \vartheta(k(Q-P) + R(t)|B)$, клетка D_J также определяется как

$$R(t_J) \in D_J \cap \text{Jac}(\mathcal{R})_{\mathbb{R}} \stackrel{\text{def}}{\iff} \tau_k(t_J) = 0 \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad k \in J.$$

На D_J можно определить кратность m_k нуля функции $\tau_k(t)$ при $k \in J$, которая описывает геометрию пересечения дивизоров Θ_k при $k \in J$.

ЛЕММА 4.2. Пусть J — множество последовательных чисел, задаваемое как $\{i+1, \dots, i+S\} \pmod{N}$. Тогда вблизи своего нуля $t = t_J$ функция $\tau_k(t)$ имеет вид

$$\tau_{i+k}(t) \simeq (t - t_J)^{m_k} + \dots, \quad m_k = k(S+1-k), \quad 1 \leq k \leq S. \quad (4.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставляя (4.3) в (3.21) и используя $\tau_i(t_J) \neq 0$, имеем $m_k = k(m_1 + 1 - k)$. Тогда $\tau_{i+S+1}(t_J) \neq 0$, откуда следует, что $m_1 = S$ (см. также [1]).

Как показано в работе [10], дивизор D_J можно параметризовать с помощью так называемой предельной матрицы L_J , определяемой как

$$L_J := \lim_{t \rightarrow t_J} n_J^{-1}(t) L(t) n_J(t) \quad \text{при некоторых} \quad n_J(t) \in N_-, \quad (4.4)$$

где L_J имеет $2N - |J|$ переменных, а N_- — множество нижнетреугольных матриц с единицами на диагоналях. Матрица n_J единственным образом определяется структурой сингулярностей, даваемой леммой 4.2. Для множества $J = \{i_1, \dots, i_n\}$ предельную матрицу L_J можно построить из цепочки матриц, начиная с исходной матрицы L_P :

$$L_P \rightarrow L_{J_1} \rightarrow L_{J_2} \rightarrow \dots \rightarrow L_J,$$

где $J_k = \{i_1, \dots, i_k\}$ при $k < n = |J|$ и $J_n = J$. Матрицу $n_{J_k} \in N_-$ легко найти в терминах L_{J_k} , откуда мы получаем предел $n_{J_k}^{-1} L_{J_k} n_{J_k} \rightarrow L_{J_{k+1}}$. Тогда L_{J_k} параметризует дивизор D_{J_k} , причем $\text{codim}_{\mathbb{C}} D_{J_k} = k$ (деталю этого исследования будет посвящена отдельная работа).

Теперь с помощью предельной матрицы L_J можно определить интегрируемую систему на D_J в терминах троек системы Мамфорда $(u_d(\lambda), v_d(\lambda), w_d(\lambda))$ при $d = \dim_{\mathbb{C}} D_J = g - |J|$ [5], [7]. Здесь тройки удовлетворяют соотношениям

$$y^2 = P_J(\lambda)^2 - 4 = u_d w_d + v_d^2, \quad \det(L_J - \lambda I) = -(z + z^{-1} - P_J(\lambda)),$$

где $u_d(\lambda)$ — приведенный полином степени d , $v_d(\lambda)$ — полином степени $d - 1$ при $v_d(\mu_j) = y(\mu_j)$ во всех случаях, когда $u_d(\mu_j) = 0$, а $w_d(\lambda)$ — приведенный полином степени $2g + 2 - d$. Нули $u_d(\lambda)$ параметризуют многообразие $W^d \subset \text{Jac}(\mathcal{R})$ — образ симметрических произведений $\mathcal{R}^{(d)}$ при k -кратном отображении Абеля–Якоби (это утверждение в терминах дивизора $\text{Div}_0^{+,d}(\mathcal{R})$ см. в [5]). В частности, если J дается множеством $(g - d)$ последовательных чисел, а именно $J = \{1, \dots, g - d\}$, то $u_d(\lambda)$ можно выразить как

$$u_d(\lambda) = (-1)^d \Delta_{N-d+1, N}(\lambda) = \lambda^d - \left(\sum_{i=N-d+1}^N b_i \right) \lambda^{d-1} + \dots = \prod_{i=1}^d (\lambda - \mu_i),$$

где $\Delta_{m, n}(\lambda)$ дается уравнением (1.9) (см. ниже пример 4.1). Тогда интегрируемая система на D_J имеет вид (3.16), откуда следует (3.10) с индексом j , принимающим значения $1 \leq j \leq d = g - |J|$. Эту систему можно использовать для демонстрации гладкости Θ_J для таких J . Отметим, что задача обращения Якоби для такой системы является неполной, и многообразие решений не может быть дополнено до абелева многообразия (в этом смысле система не является алгебраически интегрируемой) [11]. Исследованию деталей решения таких интегрируемых систем будет посвящена отдельная работа.

ПРИМЕР 4.1. $D_J \subset \text{Jac}(\mathcal{R})$ для римановой поверхности рода $g = 3$.

1. $J = \{1, 2\}$. Предельная матрица $L_{\{1, 2\}}$ имеет вид

$$L_{\{1, 2\}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \xi_3 & -\xi_2 & \xi_1 & 1 - \zeta_1 z^{-1} \\ z - \zeta_2 & 0 & 0 & \mu_1 \end{pmatrix},$$

где (3×3) -подматрица в верхнем левом углу является сопровождающей матрицей для соответствующей подматрицы, т.е. $\xi_1 = b_1 + b_2 + b_3$, $\xi_2 = b_1 b_2 + b_2 b_3 + b_3 b_1 - a_1 - a_2$, $\xi_3 = b_1 b_2 b_3 - a_1 b_3 - a_2 b_1$ и $\zeta_1 = -a_1 a_3$, $\zeta_2 = -a_2 a_4$, $\mu_1 = b_4$. Определяемая матрицей $L_{\{1, 2\}}$ спектральная кривая дается уравнением

$$\det(L_{\{1, 2\}} - \lambda I) = -(z + I_5 z^{-1} - P_{\{1, 2\}}(\lambda)), \quad P_{\{1, 2\}}(\lambda) = \lambda^4 + \sum_{k=1}^4 (-1)^k I_k \lambda^{4-k}.$$

Здесь инварианты $I_1, \dots, I_5$ задаются формулами

$$\begin{aligned} I_1 &= \xi_1 + \mu_1 = 0, & I_2 &= \xi_1 \mu_1 + \xi_2, & I_3 &= \xi_2 \mu_1 + \xi_3, \\ I_4 &= \xi_3 \mu_1 + \zeta_1 + \zeta_2, & I_5 &= \zeta_1 \zeta_2 = 1. \end{aligned}$$

Полиномы $u_1(\lambda), v_1(\lambda)$ троек системы Мамфорда выражаются в виде $u_1(\lambda) = \lambda - \mu_1$, $v_1(\lambda) = \pm y(\mu_1)$. Тогда изоспектральное многообразие в $\text{Jас}(\mathcal{R})_{\mathbb{R}}$ со связями $\tau_1 = \tau_2 = 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} D_{\{1,2\}} \cap \text{Jас}(\mathcal{R})_{\mathbb{R}} &= \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \zeta_1, \zeta_2, \mu_1) \in \mathbb{R}^6 : I_k = \gamma_k \in \mathbb{R}, k = 1, \dots, 5\} \cong \\ &\cong \{(\zeta_1, \mu_1) \in \mathbb{R}^2 : \zeta_1 + \zeta_1^{-1} - P_{\{1,2\}}(\mu_1) = 0\} \cong \mathcal{R}_{\mathbb{R}} \cap \mathcal{R}_0. \end{aligned}$$

Интегрируемая система $du_1(\lambda)/dt = v_1(\lambda)$ записывается на этом многообразии как

$$\frac{d\mu_1}{dt} = \pm y(\mu_1) = \pm \sqrt{P_{\{1,2\}}(\mu_1)^2 - 4}$$

и описывает динамику на кривой $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}$.

2. $J = \{1, 3\}$. Предельная матрица в этом случае имеет вид

$$L_{\{1,3\}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\xi_2 & \xi_1 & 1 - \zeta_1 z^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ z - \zeta_2 & 0 & -\eta_2 & \eta_1 \end{pmatrix},$$

где $\xi_1 = b_1 + b_2$, $\xi_2 = b_1 b_2 - a_1$, $\eta_1 = b_3 + b_4$, $\eta_2 = b_3 b_4 - a_3$, $\zeta_1 = a_4 b_1 b_2$ и $\zeta_2 = a_2 b_1 b_3$.

Инварианты $I_1, \dots, I_5$ задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} I_1 &= \xi_1 + \eta_1 = 0, & I_2 &= \xi_1 \eta_1 + \xi_2 + \eta_2, & I_3 &= \xi_1 \eta_2 + \xi_2 \eta_1, \\ I_4 &= \xi_2 \eta_2 + \zeta_1 + \zeta_2, & I_5 &= \zeta_1 \zeta_2 = 1, \end{aligned}$$

откуда мы имеем изоспектральное многообразие со связями $\tau_1 = \tau_3 = 0$

$$\begin{aligned} D_{\{1,3\}} \cap \text{Jас}(\mathcal{R})_{\mathbb{R}} &= \{(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, \zeta_1, \zeta_2) \in \mathbb{R}^6 : I_k = \gamma_k \in \mathbb{R}, k = 1, \dots, 5\} \cong \\ &\cong \{(\zeta_1, \xi_1) \in \mathbb{R}^2 : \zeta_1 + \zeta_1^{-1} + Q(\xi_1) = 0\}, \end{aligned}$$

где $Q(\xi_1)$ — рациональная функция ξ_1 , задаваемая как

$$Q(\xi_1) = \frac{1}{4}(\xi_1^2 + I_2)^2 - \frac{I_3^2}{4\xi_1^2} - I_4.$$

Тогда соответствующий дивизор $\Theta_{\{1,3\}}$ в $\text{Jас}(\mathcal{R})_{\mathbb{R}}$ содержит одномерное несвязное сингулярное многообразие, состоящее из двух окружностей, трансверсально пересекающихся в двух различных точках бесконечности. Таким образом, дивизоры Θ_J имеют весьма различную топологическую структуру в зависимости от множества J , и эти различия можно охарактеризовать с помощью поддиаграмм Дынкина, связанных с $\tau_k = 0$ при $k \in J$ (см. [2], [9], деталям исследования будет посвящена отдельная работа).

4.2. Аффинная часть якобиана. Сначала сформулируем следующую гипотезу, касающуюся структуры аффинных частей якобиана $\text{Jac}(\mathcal{R})_{\mathbb{R}}$, изоморфного $Z_{\mathbb{R}}^P(\gamma)$ (см. (2.6) для случая, когда $g = 1$).

ГИПОТЕЗА 4.1. *Аффинная часть $\text{Jac}(\mathcal{R})_{\mathbb{R}}$ имеет разложение*

$$\text{Jac}(\mathcal{R})_{\mathbb{R}} \setminus \Theta \cong \bigsqcup_{j=0}^m \mathcal{M}_j^{\circ}, \quad m = N_R - 1 \leq g,$$

причем $\mathcal{M}_j^{\circ}$ состоит из $\binom{m}{j}$ несвязных компонент $(\mathbb{T}^g)_j \setminus \Theta$, где каждый тор $(\mathbb{T}^g)_j$ разбивается на $g + 1$ цилиндров $\mathbb{R}^{g-j} \times \mathbb{T}^j$ по дивизорам Θ_k из (3.20),

$$(\mathbb{T}^g)_j \setminus \Theta = (\mathbb{R}^{g-j} \times \mathbb{T}^j) \sqcup \dots \sqcup (\mathbb{R}^{g-j} \times \mathbb{T}^j).$$

Мотивировка этой гипотезы такова. Напомним, что $(\mathbb{T}^g)_j$ занумерованы с помощью $\left(\overbrace{0, \dots, 0, n_{g-j+1}, \dots, n_g}^g \right)$, где каждый элемент с меткой 0 содержит дивизоры, соответствующие $p_{\infty}^{\pm} \in \mathcal{R}$. Удаляя эти точки через $g + 1$ дивизоров Θ_k , $\Theta = \bigcup_{k=0}^g \Theta_k$, мы рассчитываем получить $g + 1$ несвязных цилиндров. Чтобы доказать гипотезу 4.1, надо определить структуру пересечений дивизоров на $(\mathbb{T}^g)_j$.

Рассмотрим правило склейки таких несвязных цилиндров в $(\mathbb{T}^g)_j \setminus \Theta$, которые отмечены набором знаков $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_N)$, где $\epsilon_k = \text{sign } a_k$. Пусть Σ – набор периодических последовательностей знаков:

$$\Sigma(N) := \{ (\dots, \sigma_{k-1}, \sigma_k, \sigma_{k+1}, \dots) : \sigma_k \in \{\pm\}, \sigma_{k+N} = \sigma_k \forall k \in \mathbb{Z} \}.$$

Обозначим также через $\sigma^0 \in \Sigma(N)$ специальный элемент, состоящий только из знаков $+$. Далее занумеруем каждый цилиндр $\mathbb{R}^{g-j} \times \mathbb{T}^j$ периодической последовательностью знаков σ и свяжем знак $\epsilon_k = \text{sign } a_k$ со знаком $\epsilon_k = \sigma_k \sigma_{k+1}$.

Определим далее перестановку S_k на $\Sigma(N)$,

$$\begin{aligned} S_k : \Sigma(N) &\longrightarrow \Sigma(N), \\ (\dots, \sigma_k, \sigma_{k+1}, \dots) &\longmapsto (\dots, \sigma_{k+1}, \sigma_k, \dots), \end{aligned}$$

где действие S_k периодически с периодом N , т.е. $k \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. Множество всех перестановок есть аффинная группа Вейля W , связанная с аффинной алгеброй Каца–Мури $A_{N-1}^{(1)}$ для $\mathfrak{sl}(N)$:

$$W := \left\langle S_1, \dots, S_N : \begin{aligned} S_k^2 &= e, & (s_k s_{k+1})^3 &= e \pmod{N} \\ (S_k S_j)^2 &= e, & k \neq j, j \pm 1 \pmod{N} \end{aligned} \right\rangle,$$

где e – единица. Тогда можно показать, что действие W на знаках обладает следующим свойством периодичности.

ЛЕММА 4.3. Для всякого $\sigma \in \Sigma(N) \setminus \{\sigma^0\}$ существует периодическое действие длины N , $w_N^{(\sigma)} := S_{i_N} \dots S_{i_1} \in W$ при $i_j \neq i_k$, если $j \neq k$, такое, что:

- 1) $w_N^\sigma \sigma = \sigma$;
- 2) $S_{i_j} \dots S_{i_1} \sigma \neq S_{i_k} \dots S_{i_1} \sigma$ при $0 \leq j < k < N$;
- 3) N является минимальным числом, т.е. если имеется $w (\neq e) \in W$ такое, что $w\sigma = \sigma$, то $l(w) \geq N$, где $l(w)$ – длина элемента $w \in W$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим последовательность $\left(\overbrace{+\dots+}^{n_1} \overbrace{-\dots-}^{n_2} \overbrace{+\dots+}^{n_3} \overbrace{-\dots-}^{n_4} \right)$ при $\sum_{k=1}^4 n_k = N$ и предположим, что σ дается ее периодическим расширением периода N . Сначала переместим знак $+$ из n_1 -й позиции в $(n_1 + n_2)$ -ю позицию, применяя перестановку $w_1 = S_{n_1+n_2-1} \dots S_{n_1+1} S_{n_1}$ при $l(w_1) = n_2$. Переместим также знак $+$ из $(n_1 + n_2 + n_3)$ -й позиции в N -ю позицию с помощью перестановки $w_2 = S_{N-1} \dots S_{n_1+n_2+n_3}$ при $l(w_2) = n_4$. Тогда будем иметь $\left(\overbrace{+\dots+}^{n_1-1} \overbrace{-\dots-}^{n_2} \overbrace{+\dots+}^{n_3} \overbrace{-\dots-}^{n_4} \right)$. Далее переместим знак $-$ из n_1 -й позиции в 0 -ю позицию с помощью $w_3 = S_N S_1 \dots S_{n_1-2} S_{n_1-1}$ при $l(w_3) = n_1$, а знак $-$ переместим из $(n_1 + n_2 + n_3 - 1)$ -й позиции в $(n_1 + n_2)$ -ю позицию с помощью $w_4 = S_{n_1+n_2+1} \dots S_{n_1+n_2+n_3}$ при $l(w_4) = n_3$. Таким образом, в результате перестановки $w = w_4 w_3 w_2 w_1$ при $l(w) = N$ последовательность σ возвращается в исходную. Заметим, что все последовательности на промежуточных шагах различны. Легко распространить эту процедуру и на общий случай.

Рассмотрим изменения знаков a_k при переходе через сингулярности, определяемые с помощью $\tau_k(t_*) = 0$ при некоторых k и $t_* \in \mathbb{R}$. Из (3.19) тогда следует, что если $\tau_k(t) \sim t - t_*$ вблизи $t = t_*$, то решения $a_k(t)$ и $b_k(t)$ вблизи $t = t_*$ имеют вид

$$a_k(t) \sim \frac{1}{(t - t_*)^2}, \quad a_{k-1}(t) \sim t - t_*, \quad a_{k+1}(t) \sim t - t_*,$$

$$b_k(t) \sim \frac{1}{t - t_*}, \quad b_{k+1}(t) \sim \frac{1}{t - t_*}$$

и все остальные переменные a_j и b_j регулярны вблизи $t = t_*$. Заметим, что a_k сохраняют тот же (отрицательный) знак до и после точки сингулярности, а $a_{k\pm 1}$ меняют свои знаки. Отсюда следует, что изменения знаков $a_{k\pm 1}$ при переходе через сингулярность a_k соответствуют перестановкам S_k . Напомним, что $\epsilon_k = \text{sign } a_k = \sigma_k \sigma_{k+1}$. Тогда лемма 4.3 подсказывает, что цепочка знаков σ , появляющихся в периодических перестановках $w_N^{(\sigma)}$, снабжает метками цилиндры в каждом торе $(\mathbb{T}^g)_j$, и правило склейки дается знаковым представлением аффинной группы Вейля W . Может оказаться удобным использование ϵ -знака в качестве метки. Тогда для изменения знака мы имеем общую формулу в терминах расширенной матрицы Картана $(C_{i,j})_{1 \leq i,j \leq N}$ для $A_{N-1}^{(1)}$:

$$S_k: \epsilon_j \longmapsto \epsilon_j \epsilon_k^{-C_{k,j}}, \quad (4.5)$$

которая была также получена в работе [12] для случая непериодической решетки Тоды. Суммируем все вышесказанное в виде следующей гипотезы.

ГИПОТЕЗА 4.2. *Каждый связный кусок (цилиндр) в аффинных частях изоспектрального множества уровня $Z_{\mathbb{R}}^P(\gamma)$ можно маркировать знаками $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_N)$, где $\epsilon_k = \text{sign } a_k$, и они склеиваются друг с другом согласно действию элемента аффинной группы Вейля W длины N на этих знаках (знаковое представление группы W).*

ПРИМЕР 4.2. $N = 3$ периодическая решетка Тоды [13].

1. $m = 2$ ($N_R = 3$, три связных компоненты в $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}$). Вещественная часть якобиана $\text{Jac}(\mathcal{R})_{\mathbb{R}}$ состоит из *четырёх* торов, а аффинная часть имеет вид

$$\text{Jac}(\mathcal{R})_{\mathbb{R}} \setminus \Theta \cong \mathcal{M}_0^{\circ} \sqcup \mathcal{M}_1^{\circ} \sqcup \mathcal{M}_2^{\circ},$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_2^{\circ} &= (\mathbb{T}^2)_2 = \mathbb{T}^2, \\ \mathcal{M}_1^{\circ} &= (\mathbb{T}^2 \setminus \Theta)_1 \sqcup (\mathbb{T}^2 \setminus \Theta)_1, \\ \mathcal{M}_0^{\circ} &= (\mathbb{T}^2 \setminus \Theta)_0 = \mathbb{R}^2 \sqcup \mathbb{R}^2 \sqcup \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Каждый тор $(\mathbb{T}^2 \setminus \Theta)_1$ состоит из *трёх* цилиндров $\mathbb{R} \times S^1$. Четыре тора $\mathbb{T}^2$, как компактифицированные множества уровня, маркированы знаками $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$, причем

$$\prod_{k=1}^3 \epsilon_k = 1.$$

Например, тор $\mathbb{T}^2$ в $\mathcal{M}_2^{\circ}$ маркирован знаками $(+++)$, и каждая связная компонента в $(\mathbb{T}^2 \setminus \Theta)_j$ для остальных $\mathcal{M}_j$ маркирована или $(+-)$, или $(-+)$, или $(--)$. Эти компоненты склеиваются друг с другом согласно действию W на знаках:

$$(+ - -) \xrightarrow{S_2} (- - +) \xrightarrow{S_1} (- + -) \xrightarrow{S_3} (+ - -).$$

2. $m = 1$ ($N_R = 2$). Вещественная часть якобиана $\text{Jac}(\mathcal{R})_{\mathbb{R}}$ состоит из *двух* торов, а аффинная часть имеет вид

$$\text{Jac}(\mathcal{R})_{\mathbb{R}} \setminus \Theta \cong \mathcal{M}_0^{\circ} \sqcup \mathcal{M}_1^{\circ},$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1^{\circ} &= (\mathbb{T}^2 \setminus \Theta)_1 = (\mathbb{R} \times S^1) \sqcup (\mathbb{R} \times S^1) \sqcup (\mathbb{R} \times S^1), \\ \mathcal{M}_0^{\circ} &= (\mathbb{T}^2 \setminus \Theta)_0 = \mathbb{R}^2 \sqcup \mathbb{R}^2 \sqcup \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

3. $m = 0$ ($N_R = 1$). Вещественная часть якобиана $\text{Jac}(\mathcal{R})_{\mathbb{R}}$ является просто одним тором, а аффинная часть имеет вид

$$\text{Jac}(\mathcal{R})_{\mathbb{R}} \setminus \Theta \cong \mathcal{M}_0^{\circ} = (\mathbb{T}^2 \setminus \Theta)_0 = \mathbb{R}^2 \sqcup \mathbb{R}^2 \sqcup \mathbb{R}^2.$$

Благодарности. Автор благодарен Н. Эрколани, Х. Флашка и Дж. Гиббонсу за ценные обсуждения и предложения, а также Л. Касиану, который выдвинул несколько полезных идей во время плодотворного сотрудничества на ранних стадиях данной работы. Работа была частично поддержана со стороны NSF (грант DMS0071523) и программы “Интегрируемые системы” в Институте математических наук Исаака Ньютона в период июль–сентябрь 2001 г.

Список литературы

- [1] *Y. Kodama, J. Ye.* Physica D. 1998. V. 121. P. 89–108.
- [2] *M. Adler, P. van Moerbeke.* Invent. Math. 1991. V. 103. P. 223–278.
- [3] *G. Weichold.* Zeit. J. Math. Phys. 1883. V. 28. P. 321–351.
- [4] *M. Audin.* Spinning Top. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996; *B. H. Gross, J. Harris.* Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 1981. V. 14. P. 157–182.
- [5] *D. Mumford.* Tata Lectures on Theta II. Progr. in Math. V. 43. Boston: Birkhäuser, 1984.
- [6] *M. Toda.* Theory of Nonlinear Lattices. New York: Springer, 1981.
- [7] *P. Vanhaecke.* Math. Z. 1998. V. 227. P. 93–127.
- [8] *H. Farkas, I. Kra.* Riemann surfaces. Graduate Texts in Math. V. 71. New York: Springer, 1980.
- [9] *H. Flaschka, L. Haine.* Math. Z. 1991. V. 208. P. 545–556.
- [10] *M. Adler, L. Haine, P. van Moerbeke.* Math. Annal. 1993. V. 296. P. 1–33.
- [11] *S. Abenda, Yu. Fedorov.* Acta Appl. Math. 2000. V. 60. P. 137–178.
- [12] *L. Casian, Y. Kodama.* Toda lattice and toric varieties for real split semisimple Lie algebras. math-SG/9912021; Pacific J. Math. (in press).
- [13] *M. Audin.* Ann. Inst. Fourier. 1994. V. 44. P. 1505–1517.