Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Маньяс, Л. Мартинес Алонсо, Е. Медина, Редукции бездисперсионной иерархии КП, *ТМФ*, 2002, том 133, номер 3, 463–474

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf411>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 14:46:01

© 2002 г. М. Маньяс*, Л. Мартинес Алонсо*, Е. Медина†

РЕДУКЦИИ БЕЗДИСПЕРСИОННОЙ ИЕРАРХИИ КП

Предложен метод построения S -функции, основанный на системе дифференциальных уравнений первого порядка. Этот метод применен для анализа редукций бездисперсионных интегрируемых иерархий.

Ключевые слова: преобразования типа годографа, редукции бездисперсионных иерархий.

1. ВВЕДЕНИЕ

В течение последнего десятилетия бездисперсионные интегрируемые системы привлекают к себе все больший интерес. Этот возрастающий интерес обусловлен приложениями этих систем к проблеме классификации в топологической полевой теории [1], исследованию систем гидродинамического типа [2] и теории конформных отображений [3]. Редукции этих систем рассматривались в работах [2], [4].

В данной работе разрабатывается общая схема исследования редукций бездисперсионных интегрируемых систем. В основе этой схемы лежит метод нахождения S -функции, введенный в работе [5]. Это позволяет находить как редукции, так и решения типа годографа. Указанная схема применяется к исследованию бездисперсионной иерархии Кадомцева–Петвиашвили (КП). Также исследуются различные характерные примеры, для которых найдены обширные семейства решений некоторых редукций бездисперсионной иерархии КП.

2. РЕДУКЦИИ БЕЗДИСПЕРСИОННОЙ ИЕРАРХИИ КП

2.1. Характерные свойства редукции. Для того чтобы ввести бездисперсионную иерархию КП, рассмотрим функцию $z = z(p, \mathbf{t})$, зависящую от комплексной переменной p и от бесконечного набора комплексных параметров типа времен $\mathbf{t} := (x :=$

*Departamento de Física Teórica II, Universidad Complutense, Madrid, Spain.
E-mail: manuel@arboux.fis.ucm.es, luism@eucmos.sim.ucm.es

†Departamento de Matemáticas, Universidad de Cádiz, Puerto Real, Cádiz, Spain. E-mail: elena.medina@uca.es

$t_1, t_2, \dots$), которая допускает разложение в ряд вида

$$z = p + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(\mathbf{t})}{p^n}, \quad p \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Тогда бездисперсионная иерархия КП [4]–[6] представляет собой набор уравнений

$$\frac{\partial z}{\partial t_n} = \{\Omega_n, z\}, \quad \Omega_n := (z^n)_+, \quad n \geq 1, \quad (2)$$

где через $\{\cdot, \cdot\}$ обозначена скобка Пуассона, определенная по отношению к переменным p и x , а $\Omega_n = (z^n)_+$ обозначает полиномиальную часть z^n как функции от p . Например,

$$(z)_+ = p, \quad (z^2)_+ = p^2 + 2a_1, \quad (z^3)_+ = p^3 + 3pa_1 + 3a_2.$$

Условия совместности системы (2)

$$\frac{\partial \Omega_m}{\partial t_n} - \frac{\partial \Omega_n}{\partial t_m} + \{\Omega_m, \Omega_n\} = 0, \quad m \neq n,$$

образуют иерархию нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Например, при $m = 3, n = 2$ получается бездисперсионное уравнение КП

$$(u_{t_3} + 3uu_x)_x = \frac{3}{4}u_{t_2t_2}, \quad u := -a_1, \quad y := t_2, \quad t := t_3. \quad (3)$$

Известно [5], что существует S -функция $S = S(z, \mathbf{t})$ такая, что

$$\frac{\partial S(z)}{\partial t_n} = \Omega_n(p, \mathbf{t}), \quad n \geq 1, \quad (4)$$

$$S(z, \mathbf{t}) = \sum_{n \geq 1} z^n t_n + \sum_{n \geq 1} \frac{S_n(\mathbf{t})}{z^n}, \quad z \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Полагая $n = 1$ в (4), получим

$$p = z + \sum_{n \geq 1} \frac{b_n(\mathbf{t})}{z^n}, \quad b_n := \frac{\partial S_n}{\partial x}, \quad (6)$$

и тогда можно доказать (см. [5]), что обратный ряд задает решение $z = z(p, \mathbf{t})$ бездисперсионной иерархии КП. Условия (4), определяющие S -функцию, образуют систему совместных уравнений типа Гамильтона–Якоби, которая представляет собой *квазиклассический предел* системы линейных уравнений для волновой функции стандартной иерархии КП.

Из условий (5) и (6) следует, что функция S , допускающая разложение (5), удовлетворяет системе (4) тогда и только тогда, когда

$$\left(\frac{\partial S(z)}{\partial t_n} \right)_- = 0, \quad n \geq 1. \quad (7)$$

Здесь и ниже будем рассматривать S как функцию, зависящую от z или от p , и будем обозначать соответствующие зависимости как $S(z)$ и $S(p)$ ($S(z, \mathbf{t}) = S(p(z, \mathbf{t}), \mathbf{t})$). Обозначим через $S_+(p)$ и $S_-(p)$ части в разложении $S(p)$, содержащие соответственно положительные и отрицательные степени p , $S(p) = S_+(p) + S_-(p)$. Из условий (5) и (6) получим, что

$$S_+(p) = \sum_{n \geq 1} \Omega_n(p, \mathbf{t}) t_n. \quad (8)$$

Тогда уравнение (7) приводит к условию

$$\left(\frac{\partial S(p)}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t_n} + \frac{\partial S_-(p)}{\partial t_n} \right)_- = 0, \quad n \geq 1. \quad (9)$$

Рассмотрим теперь N -редукции бездисперсионной иерархии КП, для которых $z = z(p, \mathbf{t})$ зависит от $\mathbf{t}$ только через N функций $\mathbf{u} = (u_1(\mathbf{t}), \dots, u_N(\mathbf{t}))$. Будем характеризовать эти редукции с помощью систем уравнений на $p = p(z, \mathbf{u})$, имеющих вид

$$\frac{\partial p}{\partial u_i} = R_i(p, \mathbf{u}), \quad i = 1, \dots, N, \quad (10)$$

или, эквивалентно, с помощью систем уравнений на $z = z(p, \mathbf{u})$

$$\frac{\partial z}{\partial u_i} + R_i(p, \mathbf{u}) \frac{\partial z}{\partial p} = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (11)$$

Будем предполагать, что функции R_i удовлетворяют следующим условиям.

1. Функции R_i суть рациональные функции от p , сингулярности которых — это N простых полюсов $p_i = p_i(\mathbf{u})$, $i = 1, \dots, N$, и которые обращаются в нуль при $p = \infty$. Тем самым эти функции допускают разложение

$$R_i(p, \mathbf{u}) = \sum_{j=1}^N \frac{r_{ij}(\mathbf{u})}{p - p_j(\mathbf{u})}. \quad (12)$$

2. Функции R_i удовлетворяют условиям совместности системы (11):

$$\frac{\partial R_i}{\partial u_j} - \frac{\partial R_j}{\partial u_i} + R_j \frac{\partial R_i}{\partial p} - R_i \frac{\partial R_j}{\partial p} = 0, \quad i \neq j. \quad (13)$$

Также предполагается, что $S_-(p)$ зависит от $\mathbf{t}$ только через функции $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{t})$. Тогда условия (9) принимают вид

$$\left(\frac{\partial S(p)}{\partial p} R_i + \frac{\partial S_-(p)}{\partial u_i} \right)_- = 0. \quad (14)$$

Чтобы построить решения уравнений редукции, будем предполагать, что функция S удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial S}{\partial p}(p_i) = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (15)$$

Пусть теперь $E = E(p, \mathbf{u})$ обозначает любую целую функцию от p , удовлетворяющую уравнениям

$$E(p_i, \mathbf{u}) = F_i(\mathbf{u}), \quad i = 1, \dots, N, \quad (16)$$

где

$$F_i(\mathbf{u}) := \frac{\partial S_-}{\partial p}(p_i).$$

В терминах этой функции получим, что условия (14) эквивалентны условиям

$$\frac{\partial S_-(p)}{\partial u_i} + R_i \frac{\partial S_-(p)}{\partial p} = (ER_i)_-. \quad (17)$$

Далее, используя (13), получим, что условия совместности системы (17) имеют вид

$$\frac{\partial (ER_i)_-}{\partial u_j} - \frac{\partial (ER_j)_-}{\partial u_i} + R_j \frac{\partial (ER_i)_-}{\partial p} - R_i \frac{\partial (ER_j)_-}{\partial p} = 0, \quad i \neq j. \quad (18)$$

Поскольку справедливо разложение

$$(ER_j)_- = \sum_{k=1}^N \frac{r_{jk} F_k}{p - p_k}, \quad (19)$$

получим, что уравнения (18) образуют набор условий согласования для функций F_j .

Подводя итог, в случае, когда рассмотрение начинается с набора функций $R_i(p, \mathbf{u})$ и $F_i(\mathbf{u})$ ($i = 1, \dots, N$), удовлетворяющих условиям (13) и (18), можно получить решение N -редукции бездисперсионной иерархии КП из уравнений (11). Кроме того, из условий (15) и (16) имеем

$$\frac{\partial S_+}{\partial p}(p_i) + F_i(\mathbf{u}) = 0,$$

или, эквивалентно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_{in}(\mathbf{u}) t_n + F_i(\mathbf{u}) = 0, \quad v_{in} := \frac{\partial \Omega_n}{\partial p}(p_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (20)$$

Эта система порождает неявные соотношения на функции $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{t})$, которые характеризуют N -редукции. Наконец, из условий (5) и (17) следует, что величины S_- могут быть получены рекурсивно. Ввиду формы записи неявных соотношений (20) естественно называть такие решения *решениями типа годографа*.

2.2. Интегрируемость по Бурле. В работах [7] S -функции были построены с помощью метода обратной задачи, что позволило решить задачу на начальные данные для нескольких бездисперсионных моделей. Анализ в данной работе базируется на альтернативном методе нахождения функции S , основанном на системе дифференциальных уравнений (10) и (17). S -функция при этом задается набором *спектральных данных* $\{p_i(\mathbf{u}), r_{ij}(\mathbf{u}), F_i(\mathbf{u}): 1 \leq i, j \leq N\}$. Кроме того, из (12) и (19) следует, что условия совместности (13) и (18) эквивалентны следующим условиям совместности для спектральных данных:

$$\begin{aligned} r_{ik} \frac{\partial p_k}{\partial u_j} - r_{jk} \frac{\partial p_k}{\partial u_i} &= \sum_{l \neq k} \frac{r_{jl} r_{ik} - r_{il} r_{jk}}{p_k - p_l}, \\ \frac{\partial r_{ik}}{\partial u_j} - \frac{\partial r_{jk}}{\partial u_i} &= 2 \sum_{l \neq k} \frac{r_{jk} r_{il} - r_{ik} r_{jl}}{(p_k - p_l)^2}, \\ r_{ik} \frac{\partial F_k}{\partial u_j} - r_{jk} \frac{\partial F_k}{\partial u_i} &= \sum_{l \neq k} \frac{r_{jl} r_{ik} - r_{il} r_{jk}}{(p_k - p_l)^2} (F_k - F_l), \end{aligned} \quad (21)$$

где $i \neq j$. Две первые группы уравнений системы (21) задают редукции бездисперсионной иерархии КП, в то время как вся система определяет набор решений типа годографа.

Можно показать, что система (21) согласована в том смысле, что условия

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u_m} \frac{\partial p_k}{\partial u_l} &= \frac{\partial}{\partial u_l} \frac{\partial p_k}{\partial u_m}, \\ \frac{\partial}{\partial u_m} \frac{\partial r_{ik}}{\partial u_l} &= \frac{\partial}{\partial u_l} \frac{\partial r_{ik}}{\partial u_m}, \\ \frac{\partial}{\partial u_m} \frac{\partial F_k}{\partial u_l} &= \frac{\partial}{\partial u_l} \frac{\partial F_k}{\partial u_m} \end{aligned}$$

выполнены, если выполняются уравнения (21). Можно также увидеть, что система уравнений (21) эквивалентна следующей системе:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_k}{\partial u_i} &= \frac{1}{r_{s_k k}} \left(r_{ik} \frac{\partial p_k}{\partial u_{s_k}} - \sum_{l \neq k} \frac{r_{s_k l} r_{ik} - r_{il} r_{s_k k}}{p_k - p_l} \right), \quad i < s_k, \\ \frac{\partial p_k}{\partial u_i} &= -\frac{1}{r_{s_k k}} \sum_{l \neq k} \frac{r_{s_k l} r_{ik} - r_{il} r_{s_k k}}{p_k - p_l}, \quad i > s_k, \\ \frac{\partial F_k}{\partial u_i} &= \frac{1}{r_{s_k k}} \left(r_{ik} \frac{\partial F_k}{\partial u_{s_k}} - \sum_{l \neq k} \frac{r_{s_k l} r_{ik} - r_{il} r_{s_k k}}{(p_k - p_l)^2} (F_k - F_l) \right), \quad i < s_k, \\ \frac{\partial F_k}{\partial u_i} &= -\frac{1}{r_{s_k k}} \sum_{l \neq k} \frac{r_{s_k l} r_{ik} - r_{il} r_{s_k k}}{(p_k - p_l)^2} (F_k - F_l), \quad i > s_k, \\ \frac{\partial r_{ik}}{\partial u_j} &= \frac{\partial r_{jk}}{\partial u_i} + 2 \sum_{l \neq k} \frac{r_{jk} r_{il} - r_{ik} r_{jl}}{(p_k - p_l)^2}, \quad i > j, \end{aligned} \quad (22)$$

для $k = 1, \dots, N$, где для каждого k должно выполняться условие, что число $s_k \in \{1, \dots, N\}$ таково, что $r_{s_k k} \neq 0$ и $r_{ik} = 0$ при $i > s_k$. Система уравнений (22) имеет вид системы Бурле [8]. Чтобы это показать, заметим, что $(u_1, \dots, u_{s_k-1}, u_{s_k+1}, u_{N-1})$ являются главными переменными для p_k и F_k , в то время как переменные u_{s_k} оказываются параметрическими. Аналогично $(u_1, \dots, u_{i-1})$ суть главные переменные для r_{ik} , в то время как переменные $(u_i, \dots, u_N)$ оказываются параметрическими. Условия совместности по главным переменным могут быть проверены непосредственно. С другой стороны, поскольку $r_{ks_k} \neq 0$ и $p_k \neq p_l$, $k, l = 1, \dots, N$, $k \neq l$, получим, что функции, задающие систему, являются аналитическими. Поэтому, применив теорему Бурле, можно заключить, что в окрестности исходной точки $\mathbf{u}_0 = (u_1^{(0)}, \dots, u_N^{(0)})$ существует *единственное* решение $\{p_k, F_k, r_{ik}\}$ такое, что в момент, когда главные переменные принимают исходные значения, решение представляет собой набор произвольных аналитических функций от соответствующих параметрических переменных. Общее решение тем самым зависит от $N(N+1)$ произвольных аналитических функций параметрических переменных: $3N$ функций одной переменной и N аналитических функций от l переменных для каждого $l = 2, \dots, N-1$.

2.3. Системы гидродинамического типа. Неявные уравнения (20) представляют собой преобразования типа годографа. Это предполагает наличие уравнений гидродинамического типа. Действительно, предполагая, что $z = z(p, \mathbf{u})$ есть регулярная функция вблизи точек p_i , из условий (11) можно найти, что

$$\frac{\partial z}{\partial p}(p_i) = 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

Используя теперь уравнения (2), получим

$$\sum_{j=1}^N \frac{\partial z_i}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial t_n} = v_{in} \sum_{j=1}^N \frac{\partial z_i}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial x}, \quad n \geq 1,$$

где $z_i := z(p_i, \mathbf{u}(t))$. Таким образом, выражая $\mathbf{u}(t)$ через функции z_i , найдем, что вектор-функция $\mathbf{u}(t)$ удовлетворяет системе уравнений гидродинамического типа:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t_n} &= A_n(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}, \quad n = 1, \dots, N, \\ \mathbf{u} &= \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}, \quad A_n := K^{-1} D_n K, \\ D_n &:= \text{diag}(v_{1n}, \dots, v_{Nn}), \quad K_{ij} := \frac{\partial z_i}{\partial u_j}. \end{aligned} \tag{23}$$

Принимая во внимание, что $v_{2i} = 2p_i$, из системы (23) можно получить формулу Гиббонса–Кодамы [2]

$$A_n = v_n(A), \quad A := \frac{A_2}{2}, \quad (24)$$

где $v_n(p) := \partial \Omega_n / \partial p$. Наконец, если предположить, что функции $\partial_x u_j$, $j = 1, \dots, N$, независимы, можно выразить рациональные функции R_i в терминах матрицы Гиббонса–Кодамы A в виде

$$R_i(p, \mathbf{u}) = \sum_{j=1}^N (A(\mathbf{u}) - p)_{ji}^{-1} \frac{\partial a_1}{\partial u_j}. \quad (25)$$

Из представления (25) следует, что

$$r_{ik} = -\frac{\partial z_k}{\partial u_i} r_k, \quad r_k := \frac{\partial a_1}{\partial z_k}.$$

В новых координатах $\{z_i\}_{i=1}^N$ система (21) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_i}{\partial z_j} &= 2 \frac{r_i r_j}{(p_j - p_i)^2}, \\ \frac{\partial p_i}{\partial z_j} &= \frac{r_j}{p_j - p_i}, \\ \frac{\partial F_i}{\partial z_j} &= r_j \frac{F_j - F_i}{(p_j - p_i)^2}. \end{aligned}$$

Заметим, что в соответствии с этой системой получим, что

$$\frac{\partial F_i}{\partial z_j} \frac{1}{F_j - F_i} = \frac{\partial p_i}{\partial z_j} \frac{1}{p_j - p_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial \ln r_i}{\partial z_j}, \quad i \neq j. \quad (26)$$

Эти соотношения задают геометрическую интерпретацию системы (21). Вводя новые величины

$$\beta_{ij} := \frac{1}{\sqrt{r_i}} \frac{\partial \sqrt{r_j}}{\partial z_i} = \frac{\sqrt{r_i r_j}}{(p_i - p_j)^2} = \beta_{ji}, \quad i \neq j, \quad (27)$$

получим семейство параллельных сопряженных сетей $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{u})$, задаваемых решениями системы

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z_i} = H_i \mathbf{X}_i, \quad (28)$$

где H_i и $\mathbf{X}_i$ (соответственно коэффициенты Ламе и перенормированные касательные векторы) задаются уравнениями

$$\frac{\partial H_i}{\partial z_i} = \beta_{ji} H_j \quad (29)$$

и

$$\frac{\partial \mathbf{X}_i}{\partial z_i} = \beta_{ij} \mathbf{X}_j. \quad (30)$$

Очевидно, что коэффициенты Ламе $H_i := \sqrt{r_i}$ дают решение системы (29), и тогда из системы уравнений (26) следует, что $F_i H_i$ и $p_i H_i$ также представляют собой решения системы (29).

3. ПРИМЕРЫ

3.1. ($N = 1$)-редукции. Если в редукции участвует только одна функция $u = u(\mathbf{t})$, то полагая $u = -a_1$, можно свести уравнение (10) к уравнению Абеля

$$\frac{\partial p}{\partial u} = \frac{1}{p - p_1(u)}, \quad (31)$$

где p_1 — произвольная функция (набор условий совместности в этом случае, очевидно, пуст). Из системы (11) при этом следует рекуррентное соотношение на коэффициенты разложения функции $z = z(p, u)$:

$$\begin{aligned} a_1 &= -u, & a_2 &= -\int p_1(u) du, \\ a'_{m+2} &= p_1(u)a'_{m+1} + ma_m, & m &\geq 1, \end{aligned}$$

где $a'_m := \partial a_m / \partial u$. Теперь можно использовать это разложение и формулу (20), для того чтобы порождать решения уравнений бездисперсионной иерархии КП. Например, полагая $t_n = 0$, $n \geq 4$, можно свести (20) к уравнению Кодамы [4] для ($N = 1$)-редукции бездисперсионного уравнения КП.

Явное выражение для решения $z = z(p, u)$ системы (11) удастся получить лишь в некоторых частных случаях. Например, простейший случай отвечает условию $p_1(u) \equiv 0$ (бездисперсионная редукция уравнения Кортевега–де Фриза). При этом получим

$$z = (p^2 - 2u)^{1/2}.$$

С другой стороны, в случае, когда $p_1 \equiv 0$, можно решить систему (17), задающую величину S_- , которая при этом оказывается равна

$$S_-(p, u) = -\left(\int_0^{z(p, u)} F\left(\frac{1}{2}(q^2 - z(p, u)^2)\right) dq\right)_-.$$

3.2. ($N = 2$)-редукции. Рассмотрим теперь случай, когда $\mathbf{u} = (u, v)$ с $u = -a_1$. Из системы (25) при этом получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial u} &= \frac{p - A_{22}}{(p - A_{11})(p - A_{22}) - A_{12}A_{21}}, \\ \frac{\partial p}{\partial v} &= \frac{A_{12}}{(p - A_{11})(p - A_{22}) - A_{12}A_{21}}, \end{aligned} \quad (32)$$

где $A := (A_{ij}(\mathbf{u})) - (2 \times 2)$ -матрично-значная функция Гиббонса и Кодамы [2]. Правые части уравнений системы (32) имеют простые полюсы в точках

$$A_{\pm} := \frac{1}{2}(\operatorname{tr} A \pm \sqrt{(\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A}).$$

В этом случае уравнение (13) задает условия

$$\partial_v A_{11} = \partial_u A_{12}, \quad \begin{pmatrix} \partial_v \det A \\ -\partial_u(u + \det A) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \partial_v \operatorname{tr} A \\ -\partial_u \operatorname{tr} A \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Коэффициенты в разложении $z(p, \mathbf{u})$ определяются с помощью рекуррентных соотношений:

$$\begin{aligned} a_1 &= -u, & a_2 &= -\int A_{11} du + A_{12} dv, \\ a_3 &= \int (\det A - u - A_{11} \operatorname{tr} A) du - A_{12} \operatorname{tr} A dv, \\ \partial_u a_{m+2} &= \operatorname{tr} A \partial_u a_{m+1} - \det A \partial_u a_m + m a_m - (m-1) A_{22} a_{m-1}, \\ \partial_v a_{m+2} &= \operatorname{tr} A \partial_v a_{m+1} - \det A \partial_v a_m + (m-1) A_{12} a_{m-1}. \end{aligned}$$

Выбирая функцию E в виде

$$E := p \frac{F_+ - F_-}{A_+ - A_-} + \frac{A_+ F_- - A_- F_+}{A_+ - A_-},$$

где

$$F_{\pm}(\mathbf{u}) := \left. \frac{\partial S_{-}(p)}{\partial p} \right|_{A_{\pm}}, \quad F := \frac{A_- F_+ - A_+ F_-}{A_+ - A_-}, \quad G := \frac{F_- - F_+}{A_+ - A_-},$$

можно привести систему (18) к виду

$$\begin{pmatrix} -\partial_v F \\ \partial_u F \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \partial_v G \\ -\partial_u G \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Таким образом, если A и $F_{\pm}$ удовлетворяют соответствующим условиям совместности и накладываются условия $t_n = 0$ при $n > 4$, то первые потоки бездисперсионной иерархии КП могут быть найдены из решений соответствующей системы уравнений на $\mathbf{u}$:

$$4 \left(A_{\pm}^3 - 2u A_{\pm} - \int A_{11} du + A_{12} dv \right) t_4 + 3(A_{\pm}^2 - u) t_3 + 2A_{\pm} t_2 + x = -F_{\pm}. \quad (35)$$

Если $t_4 = 0$, то эти уравнения становятся эквивалентными системе Кодамы для $(N = 2)$ -редукции [4]:

$$\begin{aligned} -3(u + \det A)t_3 + x &= F, \\ 3 \operatorname{tr} A t_3 + 2t_2 &= G. \end{aligned} \quad (36)$$

Особенно интересен случай, когда накладываются условия $u = -a_1$, $v = -a_2$, что отвечает выбору

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -V & W \end{pmatrix}, \quad V := A_+ A_-, \quad W := A_+ + A_-.$$

При этом условия (33) принимают вид

$$\begin{aligned} \partial_v V + \partial_u W &= 0, \\ \partial_u V - V \partial_v W + W \partial_v V + 1 &= 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Поэтому, полагая

$$V = \partial_u Z, \quad W = -\partial_v Z,$$

можно переформулировать (37) как уравнение Монжа–Ампера:

$$\partial_{uu} Z + \partial_u Z \partial_{vv} Z - \partial_v Z \partial_{uv} Z + 1 = 0. \quad (38)$$

Аналогично система (34) может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} F &= \partial_u T, \quad G = \partial_v T, \\ \partial_{uu} T + V \partial_{vv} T + W \partial_{uv} T &= 0. \end{aligned} \quad (39)$$

Построим теперь некоторые решения бездисперсионного уравнения КП. Решение систем (37) и (39) имеет вид

$$W = \frac{2v}{u}, \quad V = \frac{v^2}{u^2} + cu^2 + u, \quad T = k_1 u + k_2 v.$$

Решения типа годографа системы (3), отвечающие случаям $c \neq 0$ и $c = 0$, суть соответственно

$$u(x, y, t) = \frac{1}{6ct} (-6t + \sqrt{36t^2 + c[12t(x - k_1) - (2y - k_2)^2]})$$

и

$$u(x, y, t) = \frac{12t(x - k_1) - (2y - k_2)^2}{72t^2}.$$

Другое решение систем (37) и (39) имеет вид

$$W = \frac{2v}{u}, \quad V = \frac{v^2}{u^2} + u, \quad T = k \frac{v}{u}.$$

Оно приводит к решению типа годографа системы (3), неявно задаваемому алгебраическим уравнением

$$72t^2u^3 + 4(y^2 - 3tx)u^2 = k^2.$$

Можно также получить решение системы (3), неявно заданное трансцендентным уравнением, если выбрать

$$W = cv + d, \quad V = ae^{cu} + \frac{1}{c}, \quad T = k_1u + k_2v, \quad a, c \neq 0.$$

В этом случае функция u определяется из уравнения

$$-3\left(u + ae^{cu} + \frac{1}{c}\right)t + (x - k_1) = 0.$$

3.3. ($N = 3$)-редукции. В этом случае предполагается, что функции $\mathbf{u} = (u, v, w)$ задаются первыми коэффициентами разложения $p = p(z, \mathbf{u})$,

$$p = z + \frac{u}{z} + \frac{v}{z^2} + \frac{w}{z^3} + O\left(\frac{1}{z^4}\right).$$

Редукция при этом задается системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial u} &= \frac{p^2 - Vp + R + u}{p^3 - Vp^2 + Rp + H}, \\ \frac{\partial p}{\partial v} &= \frac{p - V}{p^3 - Vp^2 + Rp + H}, \\ \frac{\partial p}{\partial w} &= \frac{1}{p^3 - Vp^2 + Rp + H}, \end{aligned} \tag{40}$$

где многочлен $p^3 - Vp^2 + Rp + H$ имеет три простых корня. Условия совместности (13) при этом формулируются в виде

$$\begin{aligned} V_v &= -R_w, & V_u &= H_w + uV_w, \\ R_v &= -H_w + RV_w - VR_w, & R_u &= VH_w - HV_w + uR_w - 2, \\ H_v &= 1 - VH_w + HV_w, & H_u &= -V + RH_w - HR_w + uH_w. \end{aligned} \tag{41}$$

Выбирая теперь $S = S_+(p)$ и $t_n = 0$, $n > 4$, и принимая во внимание уравнения (15) и то, что $a_1 = -b_1 = -u$ и $a_2 = -b_2 = -v$, получим

$$\frac{\partial S_+(p)}{\partial p} = 4t_4(p^3 - Vp^2 + Rp - H) = x + 2py + 3(p^2 - u)t + 4(p^3 - 2up - v)t_4. \quad (42)$$

Из этого уравнения становится ясно, что решения для двух первых членов бездисперсионной иерархии КП могут быть получены, если решить систему

$$V = -\frac{3t}{4t_4}, \quad R = \frac{y}{2t_4} - 2u, \quad H = v - \frac{x - 3tu}{4t_4}. \quad (43)$$

Например, выбирая в (41) функцию V в виде $V = V(u, v)$, получим решение для двух первых членов бездисперсионной иерархии КП, неявно задаваемое трансцендентным уравнением

$$k_1^3 x - 2k_1^2 k_2 y + 3k_1 k_2^2 t + 4(k_1^2 k_3 + 3k_1 k_2 - k_2^3)t_4 + (12k_1^2 k_2 t_4 - 3k_1^3 t)u + 4k_1^3 k_5 t_4 e^{k_1 u} = 0,$$

и

$$v = -\frac{k_3}{k_1} - \frac{3t}{4k_1 t_4} - \frac{k_2}{k_1} u.$$

В частном случае $k_5 = 0$ получим

$$u(x, y, t, t_4) = \frac{k_1^3 x - 2k_1^2 k_2 y + 3k_1 k_2^2 t + 4(k_1^2 k_3 + 3k_1 k_2 - k_2^3)t_4}{3k_1^2(k_1 t - 4k_2 t_4)}.$$

Благодарности. Работа частично поддержана CICYT (проект PB98-0821).

Список литературы

- [1] *I. M. Krichever.* Commun. Pure Appl. Math. 1992. V. 47. P. 437; Commun. Math. Phys. 1992. V. 143. P. 415.
- [2] *Y. Kodama, J. Gibbons.* Phys. Lett. A. 1989. V. 135. P. 167.
- [3] *J. Gibbons, S. P. Tsarev.* Phys. Lett. A. 1996. V. 211. P. 19; 1999. V. 258. P. 263.
- [4] *Y. Kodama.* Progr. Theor. Phys. Suppl. 1988. V. 95. P. 184; Phys. Lett. A. 1988. V. 129. P. 223.
- [5] *T. Takasaky, T. Takebe.* Int. J. Mod. Phys. A. 1992. V. 7. Suppl. 1B. P. 889; Rev. Math. Phys. 1995. V. 7. P. 743.
- [6] *B. A. Kupershmidt.* J. Phys. A. 1990. V. 23. P. 871.
- [7] *V. V. Geogjaev.* The quasiclassical limit of the inverse scattering problem method. In: Singular Limits of Dispersive Waves. NATO ASI Ser. B. V. 320. Eds. N. Ercolani et al. New York: Plenum, 1994. P. 53; *Y. Kodama, J. Gibbons.* Solving dispersionless Lax equations. Ibid. P. 61; *Y. Kodama.* Phys. Lett. A. 1990. V. 147. P. 477.
- [8] *L. Bianchi.* Lezioni di Geometria Differenziale. Bologna: Zanichelli, 1924.