Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Педрони, Бигамильтоновы аспекты делимости переменных в системе
Неймана, *ТМФ*, 2002, том 133, номер 3, 475–484

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf412>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 03:18:10

© 2002 г.

М. Педрони*

БИГАМИЛЬТОНОВЫ АСПЕКТЫ РАЗДЕЛИМОСТИ ПЕРЕМЕННЫХ В СИСТЕМЕ НЕЙМАНА

На примере системы Неймана на двумерной сфере представлены некоторые идеи о бигамильтоновом подходе к разделению переменных. Показано, что в рамках этого подхода можно систематическим образом найти координаты разделения и интегралы движения этой системы.

Ключевые слова: интегрируемые системы, система Неймана, разделение переменных, бигамильтонова геометрия.

1. ВВЕДЕНИЕ

Разделение переменных в уравнении Гамильтона–Якоби является классическим, но до настоящего времени интенсивно изучаемым предметом, связанным с несколькими важными областями исследований, такими как стационарные редукции солитонных уравнений (см. [1] и приведенную там библиографию), алгебраические полностью интегрируемые системы [2], риманова геометрия [3], [4], преобразования Беклунда и Q -оператор Бакстера [5], а также теория струн [6].

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы представить на простом примере системы Неймана основные идеи нового подхода [7], [8] к разделению переменных. Этот подход, основанный на геометрии бигамильтоновых многообразий, был успешно применен к стационарным редукциям иерархии Кортевега–де Фриза (КдФ) [9] и к цепочкам Тоды [10].

Система Неймана является хорошо известной механической системой (см., например, [11]), заданной как частица единичной массы, движущаяся по (единичной) сфере под действием квадратичного потенциала $V(x, y, z) = (a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 z^3)/2$, где $a_1 < a_2 < a_3$, а (x, y, z) – декартовы координаты, начало которых совпадает с центром сферы. В 1859 г. Нейман показал, что уравнение Гамильтона–Якоби для этой системы

*Dipartimento di Matematica, Università di Genova, Genova, Italy.
E-mail: pedroni@dima.unige.it

является аддитивно разделимым в так называемых сфероконических (или эллиптическо-сферических) координатах (λ_1, λ_2) , задаваемых как

$$\frac{x^2}{\lambda - a_1} + \frac{y^2}{\lambda - a_2} + \frac{z^2}{\lambda - a_3} = \frac{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)}{(\lambda - a_1)(\lambda - a_2)(\lambda - a_3)},$$

при $a_1 < \lambda_1 < a_2 < \lambda_2 < a_3$. Можно проверить, что эти координаты являются координатами разделения, но мы хотим решить задачу нахождения этих координат систематическим образом. Известно, что в переменных разделения для системы Неймана можно дать представление Лакса, но тогда задача сведется к нахождению представления Лакса для заданной системы, что в общем случае оказывается весьма сложной проблемой. Мы покажем, что внимательное исследование системы Неймана позволяет естественным образом вывести сфероконические координаты как переменные разделения.

Статья построена следующим образом. В разделе 2 мы вводим (принадлежащую Нийенхейсу) идею геометризации координатной системы посредством подходящего тензорного поля L . Это позволяет найти некоторый тип условия совместности для поля L и заданного гамильтониана H , обеспечивающего тот факт, что индуцируемые полем L координаты разделяют связанное с H уравнение Гамильтона–Якоби. Это условие является внутренней (т.е. бескоординатной) формой классических условий разделимости Леви-Чивита. В разделе 3 мы даем интерпретацию этого результата в рамках теории бигамильтоновых многообразий, а в разделе 4 применяем его к системе Неймана. Раздел 5 посвящен двум дополнительным результатам, касающимся системы Неймана, которые легко следуют из нашего подхода (с использованием некоторых фактов, отмеченных в работе [12]): простое правило построения интегралов движения и продолжение бигамильтоновой структуры с кокасательного расслоения T^*S^2 к сфере на пятимерное многообразие, для того чтобы придать системе Неймана бигамильтонову формулировку, отсутствующую в T^*S^2 . Последний раздел содержит некоторые заключительные замечания.

2. ПОИСК КООРДИНАТ РАЗДЕЛЕНИЯ

Пусть $\mathcal{Q}$ — n -мерное многообразие, которое можно считать конфигурационным пространством механической системы (сфера для системы Неймана), и пусть H — функция на $T^*\mathcal{Q}$ (гамильтониан). В данном разделе мы представим метод поиска переменных, в которых уравнение Гамильтона–Якоби для H разделяется. Этот подход оказывается весьма эффективным и в случае системы Неймана.

Важная идея, принадлежащая Нийенхейсу [13], состоит в геометризации координатной системы. Если $\{q^i\}$ — локальные координаты на открытом подмножестве $U \subset \mathcal{Q}$, то тензорное поле L типа $(1, 1)$, определяемое как

$$L \frac{\partial}{\partial q^i} = q^i \frac{\partial}{\partial q^i},$$

имеет обращающееся в нуль кручение Нийенхейса, т.е.

$$[LX, LY] - L[LX, Y] - L[X, LY] + L^2[X, Y] = 0$$

для каждой пары (X, Y) векторных полей на U . Справедливо и обратное утверждение: тензорное поле L типа $(1, 1)$ с нулевым кручением индуцирует локальные координаты в окрестности любой точки, где собственные значения $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ поля L различны. Во многих случаях эти собственные значения функционально независимы, так что

$$L \frac{\partial}{\partial \lambda_i} = \lambda_i \frac{\partial}{\partial \lambda_i},$$

т.е. их можно выбрать как координаты, связанные с L . Ниже мы считаем, что имеет место эта ситуация, т.е. мы ищем тензорное поле L с нулевым кручением и функционально независимыми собственными значениями.

Коль скоро мы заменили координатную систему на геометрический объект L , вполне естественно искать некоторое “условие совместности”, связывающее L и функцию $H \in C^\infty(T^*\mathcal{Q})$, из которого следовало бы, что определяемые полем L координаты являются переменными разделения для H . Это условие можно получить подъемом L из $\mathcal{Q}$ на $T^*\mathcal{Q}$ с помощью процедуры, называемой *полным подъемом* [14]. Она порождает тензорное поле N типа $(1, 1)$ без кручения на $T^*\mathcal{Q}$, описываемое в координатах расслоения (q^i, p_i) как

$$N \frac{\partial}{\partial q^i} = L_i^j \frac{\partial}{\partial q^j} + \left(\frac{\partial L_j^k}{\partial q^i} - \frac{\partial L_i^k}{\partial q^j} \right) p_k \frac{\partial}{\partial p_j}, \quad N \frac{\partial}{\partial p_i} = L_j^i \frac{\partial}{\partial p_j}.$$

Поскольку мы теперь имеем H и N на одном и том же многообразии $T^*\mathcal{Q}$, то можно получить искомое условие разделимости следующим образом. С помощью H и N построим 2-форму $\omega_H = d(N^* dH)$, где поле N^* сопряжено к N . Далее рассмотрим гамильтоново векторное поле X_H и полученные итерациями векторные поля $NX_H, N^2X_H, \dots$ и предположим, что порождаемое векторными полями $X_H, NX_H, \dots, N^{n-1}X_H$ распределение D_H является n -мерным (т.е. что эти поля линейно независимы в каждой точке).

ТЕОРЕМА. *При сделанных выше предположениях связанные с L координаты являются переменными разделения для H тогда и только тогда, когда 2-форма ω_H аннулирует распределение D_H :*

$$\omega_H|_{D_H} = 0. \quad (1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО сводится к записи условий

$$\omega_H(N^k X_H, N^l X_H) = 0, \quad k, l = 0, \dots, n-1, \quad (2)$$

в канонических координатах $(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n)$, где λ_i – собственные значения L , а μ_i – сопряженные им импульсы. Принимая далее во внимание, что тензор N диагонален в этих координатах, несложно понять, что уравнения (2) эквивалентны классическим условиям разделимости Леви-Чивита (см. с. 208 в книге [1]).

Таким образом, мы нашли условие разделимости для L и H . Оно представляет собой просто условие обращения в нуль соответствующей 2-формы на распределении, порожденном из X_H посредством полного подъема N поля L . Подчеркнем, что это условие является точной и, прежде всего, внутренней формой уравнений Леви-Чивита. Это означает, что можно проверить разделимость для данного гамильтониана H в координатах, связанных с тензорным полем L , до нахождения этих координат. Более того, можно наложить условие (1) на L для поиска координат разделения для H . В разделе 4 будет показано, как использовать этот факт для систематического вывода разделимости системы Неймана.

3. БИГАМИЛЬТОНОВА ИНТЕРПРЕТАЦИЯ УСЛОВИЯ РАЗДЕЛИМОСТИ

Прежде чем применить результаты предыдущего раздела к системе Неймана, сделаем несколько замечаний об их геометрическом смысле.

1. Пусть $\mathcal{Q}$, L и N определены так же, как в разделе 2. Тогда кокасательное расслоение к $\mathcal{Q}$ является бигамильтоновым многообразием [12]. Первая скобка Пуассона каноническая,

$$\{F, G\} = \omega(X_F, X_G),$$

а вторая имеет вид

$$\{F, G\}' = \omega(NX_F, X_G).$$

Если P (P') – пуассонов тензор для $\{\cdot, \cdot\}$ ($\{\cdot, \cdot\}'$), то $P' = NP$.

2. Предположим, что H удовлетворяет условиям разделимости (1). Тогда распределение D_H интегрируемо, так что (локально) существует n независимых функций $H_1, \dots, H_n$, постоянных на листах распределения D_H . Они являются (локальными) первыми интегралами для X_H . Заметим, однако, что гамильтоново векторное поле, связанное с разделимым гамильтонианом H , не является (в общем случае и для системы Неймана, в частности) бигамильтоновым.

3. Распределение D_H является билагранжевым, т.е.

$$\{H_i, H_j\} = 0, \quad \{H_i, H_j\}' = 0 \quad \forall i, j.$$

Как показано в [7], это условие характеризует (интегрируемые) гамильтоновы системы, являющиеся разделимыми в координатах, индуцированных полем L . Отметим, что билагранжевы слоения играют важную роль в изучении специальных кэлеровых многообразий [15].

4. Как уже отмечалось в предыдущем разделе, координаты разделения (λ_i, μ_i) являются каноническими для ω (что очевидно) и для N :

$$N \frac{\partial}{\partial \lambda_i} = \lambda_i \frac{\partial}{\partial \lambda_i}, \quad N \frac{\partial}{\partial \mu_i} = \lambda_i \frac{\partial}{\partial \mu_i}.$$

Их часто называют координатами Дарбу–Нийенхейса (поскольку N иногда называется тензором Нийенхейса), они использовались в качестве координат разделения, например, в работах [9], [16]–[18].

4. ПЕРЕМЕННЫЕ РАЗДЕЛЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ НЕЙМАНА

В данном разделе мы используем условие разделимости (1) для нахождения переменных разделения для системы Неймана. Для этого мы будем искать на S^2 такое тензорное поле L типа $(1, 1)$ без кручения, что его полный подъем N на T^*S^2 удовлетворяет условию

$$\omega_H(X_H, NX_H) = 0, \quad (3)$$

где $\omega_H = d(N^*dH)$ и H – гамильтониан Неймана. Учитывая вид связи и потенциала, естественно проводить вычисления в локальных координатах $X = x^2$, $Y = y^2$, параметризующих каждую связную компоненту подмножества, получаемого удалением из S^2 ее пересечения с координатными плоскостями. В этих координатах гамильтониан системы Неймана имеет вид

$$H = 2[X(1-X)p_X^2 - 2XYp_Xp_Y + Y(1-Y)p_Y^2] + \frac{1}{2}(a_1 - a_3)X + \frac{1}{2}(a_2 - a_3)Y, \quad (4)$$

где (p_X, p_Y) – сопряженные к (X, Y) импульсы. Неизвестное тензорное поле L можно записать в виде

$$\begin{aligned} L^*(dX) &= A dX + B dY, \\ L^*(dY) &= C dX + D dY, \end{aligned} \quad (5)$$

где A, B, C, D – функции координат (X, Y) , которые должны удовлетворять двум дополнительным условиям. Первое состоит в том, чтобы кручение L обращалось в нуль, т.е.

$$\begin{aligned} B(C_Y - D_X) - BA_X - DA_Y + AA_Y + CB_Y &= 0, \\ C(B_X - A_Y) - AD_X - CD_Y + BC_X + DD_X &= 0. \end{aligned}$$

Второе условие состоит в независимости собственных значений L . Наша цель состоит в том, чтобы найти функции A, B, C, D , для которых удовлетворялись бы также условия разделимости (3). Таким образом, нам надо вычислить полный подъем N поля L , который оказывается равным

$$\begin{aligned} N^* dX &= A dX + B dY, \\ N^* dY &= C dX + D dY, \\ N^* dp_X &= -[p_X (B_X - A_Y) + p_Y (D_X - C_Y)] dY + A dp_X + C dp_Y, \\ N^* dp_Y &= [p_X (B_X - A_Y) + p_Y (D_X - C_Y)] dX + B dp_X + D dp_Y. \end{aligned} \quad (6)$$

Тогда условие (3) принимает вид дифференциального уравнения, в которое координаты (X, Y) , импульсы (p_X, p_Y) , неизвестные функции A, B, C, D и их производные входят полиномиально. Это подсказывает, что следует искать решение, также полиномиально зависящее от координат. Пробуя простейшее решение, находим

$$\begin{aligned} A &= (a_3 - a_1)X + a_1, \\ B &= (a_3 - a_2)X, \\ C &= (a_3 - a_1)Y, \\ D &= (a_3 - a_2)Y + a_2, \end{aligned} \quad (7)$$

что приводит к тензорному полю L , определенному как

$$\begin{aligned} L^*(dX) &= a_1 dX + X d[(a_3 - a_1)X + (a_3 - a_2)Y], \\ L^*(dY) &= a_2 dY + Y d[(a_3 - a_1)X + (a_3 - a_2)Y]. \end{aligned} \quad (8)$$

Можно проверить, что L продолжается на всю сферу. Действительно, оно является конформным тензором Киллинга, связанным со сфероконическими координатами [3]. Последние являются собственными значениями (λ_1, λ_2) поля L , поскольку

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - L) &= \lambda^2 - \lambda[(a_3 - a_1)X + (a_3 - a_2)Y + (a_1 + a_2)] + \\ &\quad + a_2(a_3 - a_1)X + a_1(a_3 - a_2)Y + a_1a_2 = \\ &= \lambda^2(x^2 + y^2 + z^2) - \\ &\quad - \lambda[(a_3 - a_1)x^2 + (a_3 - a_2)y^2 + (a_1 + a_2)(x^2 + y^2 + z^2)] + \\ &\quad + a_2(a_3 - a_1)x^2 + a_1(a_3 - a_2)y^2 + a_1a_2(x^2 + y^2 + z^2) = \\ &= \lambda^2(x^2 + y^2 + z^2) - \lambda[(a_2 + a_3)x^2 + (a_1 + a_3)y^2 + (a_1 + a_2)z^2] + \\ &\quad + a_2a_3x^2 + a_1a_3y^2 + a_1a_2z^2 = \\ &= (\lambda - a_2)(\lambda - a_3)x^2 + (\lambda - a_1)(\lambda - a_3)y^2 + (\lambda - a_1)(\lambda - a_2)z^2 = \\ &= \left[\frac{x^2}{\lambda - a_1} + \frac{y^2}{\lambda - a_2} + \frac{z^2}{\lambda - a_3} \right] (\lambda - a_1)(\lambda - a_2)(\lambda - a_3). \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\frac{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)}{(\lambda - a_1)(\lambda - a_2)(\lambda - a_3)} = \frac{x^2}{\lambda - a_1} + \frac{y^2}{\lambda - a_2} + \frac{z^2}{\lambda - a_3},$$

а это означает, что собственные значения поля L являются сфероконическими координатами на S^2 . Таким образом, мы получили обычные координаты разделения системы Неймана, просто используя условие разделимости (1).

5. ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ НЕЙМАНА

В настоящем разделе мы покажем, что в нашем подходе легко описать и другие интересные свойства системы Неймана, такие как простая конструкция интегралов движения и существование бигамильтоновой формулировки на подходящем расширении фазового пространства. Ключевым обстоятельством является то, что гамильтониан H системы Неймана и полный подъем N тензорного поля (8) удовлетворяют более сильному условию

$$d(N^* dH) = dp_1 \wedge dH, \quad p_1 = \text{tr } L = \lambda_1 + \lambda_2, \quad (9)$$

влекущему за собой условие разделимости (1). Этот факт имеет важные следствия, которые мы продемонстрируем в рамках общего подхода, изложенного в разделах 2 и 3.

Пусть L – тензорное поле типа $(1, 1)$ без кручения с функционально независимыми собственными значениями на n -мерном многообразии $\mathcal{Q}$, так что можно снабдить симплектическое многообразие $(T^*\mathcal{Q}, \{\cdot, \cdot\})$ дополнительной скобкой Пуассона

$$\{F, G\}' = \omega(NX_F, X_G),$$

используя полный подъем N поля L . Пусть

$$\det(\lambda I - L) = \lambda^n - (p_1 \lambda^{n-1} + p_2 \lambda^{n-2} + \dots + p_n)$$

– характеристический многочлен для L . Предположим, что $H \in C^\infty(T^*\mathcal{Q})$ удовлетворяет равенству

$$d(N^* dH) = dp_1 \wedge dH. \quad (10)$$

Тогда несложно показать, что 2-форма $\omega_H = d(N^* dH)$ обращается в нуль на распределении D_H , так что условие разделимости (1) выполнено и гамильтониан H является разделимым в координатах, связанных с L . Как было отмечено в разделе 3, имеются (локальные) интегралы движения для X_H . Если имеет место условие (10), их легко найти, записывая его в виде $d(N^* dH - p_1 dH) = 0$ и выбирая H_2 так, чтобы $dH_2 = N^* dH - p_1 dH$. Тогда (как показано в [12] для случая, когда H квадратичен по импульсам) 1-форма $N^* dH_2 - p_2 dH$ также замкнута, и процесс можно продолжить

итерациями, так что интегралы движения для X_H можно определить из рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} dH_2 &= N^* dH - p_1 dH, \\ dH_3 &= N^* dH_2 - p_2 dH, \\ &\dots\dots\dots \\ dH_n &= N^* dH_{n-1} - p_{n-1} dH. \end{aligned} \tag{11}$$

Более того, получаем

$$0 = N^* dH_n - p_n dH. \tag{12}$$

Для системы Неймана глобальное существование функции H_2 гарантировано тем фактом, что T^*S^2 односвязно. В локальных координатах находим

$$\begin{aligned} H_2 &= 2(a_1 p_Y^2 Y + a_2 p_X^2 X)(X + Y - 1) - 2a_3 XY(p_Y - p_X)^2 - \\ &\quad - \frac{1}{2}a_2(a_1 - a_3)X - \frac{1}{2}a_1(a_2 - a_3)Y, \end{aligned}$$

что совпадает с константой движения, даваемой матрицей Лакса. Заметим, что гамильтоново векторное поле X_H не является бигамильтоновым на $T^*\mathcal{Q}$. Тем не менее из соотношения (12) можно заключить

$$X_H = \{\cdot, H\} = \frac{1}{p_n} \{\cdot, H_n\}'.$$

В терминологии работы [19] это означает, что X_H является квазибигамильтоновым векторным полем (см. также [16], [17]). Следуя [12], [20], покажем, что можно получить бигамильтоново представление поля X_H на расширенном фазовом пространстве $\mathcal{M} := T^*\mathcal{Q} \times \mathbb{R}$. Сначала продолжим бигамильтонову структуру с $T^*\mathcal{Q}$ на $\mathcal{M}$. Если $c \in \mathbb{R}$ — координата в “дополнительной размерности” и $F \in C^\infty(T^*\mathcal{Q})$, то новые скобки Пуассона определяются как

$$\begin{aligned} \{F, c\}_{\mathcal{M}} &= 0, \\ \{F, c\}'_{\mathcal{M}} &= \{F, H\} - c\{F, p_1\}. \end{aligned}$$

Они наделяют пространство $\mathcal{M}$ бигамильтоновой структурой. Теперь заметим, что рекуррентные соотношения (11) на H_i принимают вид обычных соотношений Ленарда на функции $\hat{H}_i$, определенные на $\mathcal{M}$ как

$$\hat{H}_0 = c, \quad \hat{H}_i = H - cp_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

[illegible]

6. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

- Благодарности.** Представленные результаты были получены в сотрудничестве с Грегорио Фальки и Франко Магри, которым я очень благодарен. Я также благодарен Клаудио Барточчи, Серджио Бененти и Джованни Растелли за полезные обсуждения и организаторам конференции NEEDS 2001 за возможность представить эти результаты и за приятную атмосферу на конференции. Работа была частично поддержана со стороны M.I.U.R. в рамках исследовательского проекта “Геометрия интегрируемых систем”.

Список литературы

- [1] *B. A. Dubrovin, I. M. Krichever, S. P. Novikov.* Integrable systems I. In: Dynamical Systems IV: Symplectic Geometry and Its Applications (Encycl. Math. Sci., V. 4). Eds. V. I. Arnold, S. P. Novikov. Berlin: Springer, 1990. P. 173–280; русский оригинал: *Б. А. Дубровин, И. М. Кривевер, С. П. Новиков.* Интергрируемые системы I. В сб.: Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 4. Динамические системы-4. Ред. Р. В. Гамкрелидзе. М.: ВИНТИ, 1985. С. 179–283.
- [2] *M. R. Adams, J. Harnad, J. Hurtubise.* Commun. Math. Phys. 1993. V. 155. P. 385–413; *J. C. Hurtubise.* Duke Math. J. 1996. V. 83. P. 19–50.
- [3] *S. Benenti.* Orthogonal separable dynamical systems. In: Differential Geometry and Its Applications. Proc. of the 5th Int. Conf. (Opava, Czechoslovakia, August 24–28, 1992). Math. Publ. Opava. V. 1. Eds. O. Kowalski, D. Krupka. Opava: Open Education and Sciences, Silesian Univ., 1993. P. 163–184.
- [4] *E. G. Kalnins.* Separation of Variables for Riemannian Spaces of Constant Curvature. New York: Longman Scientific & Technical, Harlow: Longman; New York: Wiley, 1986; *K. Kiyohara.* Mem. Am. Math. Soc. 1997. V. 619. P. 1–143; *N. M. J. Woodhouse.* Commun. Math. Phys. 1975. V. 44. P. 9–38.
- [5] *E. K. Sklyanin.* Bäcklund transformations and Baxter's Q -operator. In: Integrable Systems: from Classical to Quantum. CRM Proc. Lect. Notes. V. 26. Eds. J. Harnad, G. Sabidussi, P. Winternitz. Providence, RI: Am. Math. Soc., 2000. P. 227–250; *V. Kuznetsov, P. Vanhaecke.* Bäcklund transformations for finite-dimensional integrable systems: a geometric approach. nlin.SI/0004003.
- [6] *A. Gorsky, N. Nekrasov, V. Rubtsov.* Commun. Math. Phys. 2001. V. 222. P. 299–318.
- [7] *G. Falqui, M. Pedroni.* Separation of variables for bi-Hamiltonian systems. nlin.SI/0204029.
- [8] *F. Magri, G. Falqui, M. Pedroni.* The method of Poisson pairs in the theory of nonlinear PDEs. Lectures given at the 1999 C.I.M.E. School (Cetraro, Italy), to appear. nlin.SI/0002009.
- [9] *G. Falqui, F. Magri, M. Pedroni, J. P. Zubelli.* Regul. Chaotic Dyn. 2000. V. 5. P. 33–52.
- [10] *G. Falqui, F. Magri, M. Pedroni.* J. Nonlinear Math. Phys. 2001. V. 8. P. 118–127.
- [11] *J. Moser.* Various aspects of integrable Hamiltonian systems. In: Dynamical Systems (C.I.M.E. Summer School, Bressanone, 1978). Progr. Math. V. 8. Eds. J. M. Guckenheimer et al. Boston, Mass.: Birkhäuser, 1980. P. 233–289; *T. S. Ratiu.* Trans. Am. Math. Soc. 1981. V. 264. P. 321–329; *M. Audin.* Regul. Chaotic Dyn. 2000. V. 5. P. 67–88; *J. Harnad.* Loop groups, R -matrices and separation of variables. In: Integrable Systems: from Classical to Quantum. CRM Proc. Lect. Notes. V. 26. Eds. J. Harnad, G. Sabidussi, P. Winternitz. Providence, RI: Am. Math. Soc., 2000. P. 21–54.
- [12] *A. Ibort, F. Magri, G. Marmo.* J. Geom. Phys. 2000. V. 33. P. 210–228.
- [13] *A. Nijenhuis.* Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A.. V. 54; Indagationes Math. 1951. V. 13. P. 200–212.
- [14] *K. Yano, S. Ishihara.* Tangent and Cotangent Bundles: Differential Geometry. New York: Marcel Dekker, 1973; *M. Crampin, F. Cantrijn, W. Sarlet.* J. Geom. Phys. 1987. V. 4. P. 469–492.
- [15] *N. J. Hitchin.* Asian J. Math. 1999. V. 3. P. 77–91.
- [16] *C. Morosi, G. Tondo.* J. Phys. A. 1997. V. 30. P. 2799–2806.
- [17] *M. Błaszak.* Phys. Lett. A. 1998. V. 243. P. 25–32.
- [18] *Г. Фальки, Ф. Маззу, Г. Тондо.* ТМФ. 2000. Т. 122. № 2. С. 212–230; *Yunbo Zeng, Wen-Xiu Ma.* J. Math. Phys. 1999. V. 40. P. 4452–4473.
- [19] *R. Brouzet, R. Caboz, J. Rabenivo, V. Ravoson.* J. Phys. A. 1996. V. 29. P. 2069–2076.
- [20] *M. Crampin, W. Sarlet, G. Thompson.* J. Phys. A. 2000. V. 33. P. 8755–8770.
- [21] *S. Rauch-Wojciechowski.* Phys. Lett. A. 1991. V. 160. P. 149–154.