Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Соколов, А. В. Цыганов, Коммутативные пуассоновы подалгебры для скобок Складина и деформации известных интегрируемых моделей, *ТМФ*, 2002, том 133, номер 3, 485–500

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf413>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 16:24:04

© 2002 г.

В. В. Соколов*, А. В. Цыганов†

КОММУТАТИВНЫЕ ПУАССОНОВЫ ПОДАЛГЕБРЫ ДЛЯ СКОБОК СКЛЯНИНА И ДЕФОРМАЦИИ ИЗВЕСТНЫХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ МОДЕЛЕЙ

Построены иерархии коммутативных пуассоновых подалгебр для скобок Склянина. Каждая из подалгебр порождается полным набором интегралов в инволюции. С использованием различных известных представлений скобок найдены новые интегрируемые системы и разделение переменных для них. Среди построенных моделей содержатся деформации волчка Горячева–Чаплыгина, цепочки Тоды и модели Гейзенберга.

Ключевые слова: конечномерные интегрируемые системы, представление Лакса, r -матричные алгебры, разделение переменных.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматриваются известные скобки Склянина [1], [2] на множестве матриц вида

$$T(\lambda) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

с коэффициентами, полиномиально зависящими от параметра λ . Определение скобок содержится в разделе 2.

Для первых скобок Склянина коэффициенты матрицы $T(\lambda)$ имеют вид

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= \lambda^N + A_{N-1}\lambda^{N-1} + \dots + A_0, & B(\lambda) &= B_{N-1}\lambda^{N-1} + \dots + B_0, \\ C(\lambda) &= C_{N-1}\lambda^{N-1} + \dots + C_0, & D(\lambda) &= D_{N-2}\lambda^{N-2} + \dots + D_0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Скобка Склянина задает структуру алгебры Пуассона на множестве $\mathfrak{A}_N$ всех функций, зависящих от коэффициентов

$$A_0, \dots, A_{N-1}, B_0, \dots, B_{N-1}, C_0, \dots, C_{N-1}, D_0, \dots, D_{N-2} \quad (1.3)$$

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау, Москва, Россия.
E-mail: sokolov@landau.ac.ru

†Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: tsiganov@mph.phys.spbu.ru

матрицы $T(\lambda)$.

Для второй скобки Складина коэффициенты $T(\lambda)$ имеют следующую структуру:

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= \bar{A}_{2N}\lambda^{2N} + \bar{A}_{2N-1}\lambda^{2N-1} + \dots + \bar{A}_0, \\ B(\lambda) &= \bar{B}_{N-1}\lambda^{2N-1} + \dots + \bar{B}_1\lambda^3 + \bar{B}_0\lambda, \\ C(\lambda) &= \lambda^{2N+1} + \bar{C}_{N-1}\lambda^{2N-1} + \bar{C}_{N-2}\lambda^{2N-3} + \dots + \bar{C}_0\lambda, \\ D(\lambda) &= A(-\lambda). \end{aligned} \quad (1.4)$$

В этом случае образующими пуассоновой алгебры $\mathfrak{A}_N$ являются переменные

$$\bar{A}_0, \dots, \bar{A}_{2N}, \bar{B}_0, \dots, \bar{B}_{N-1}, \bar{C}_0, \dots, \bar{C}_{N-1}. \quad (1.5)$$

Для обеих скобок размерность симплектического листа общего положения равна $2N$.

Основным свойством скобок Складина является то, что для некоторых специальных постоянных матриц $K(\lambda)$ коэффициенты следа матрицы $K(\lambda)T(\lambda)$ образуют N -мерную коммутативную подалгебру $\mathfrak{A}_N^0$ в $\mathfrak{A}_N$. Эта подалгебра порождена линейными многочленами переменных (1.3) или (1.5).

В этой статье мы строим другие N -мерные коммутативные подалгебры $\mathfrak{A}_N^M$ в $\mathfrak{A}_N$, $M \in \mathbb{N}$, порожденные многочленами $I_1^M, \dots, I_N^M$ более высоких степеней, задающими набор N интегралов в инволюции. Переменные разделения для всех этих наборов одни и те же, в то время как кривые разделения зависят от M .

Используя известные представления скобок Складина и наши семейства интегралов в инволюции, мы строим новые интегрируемые модели и разделения переменных для них. Эти модели являются деформациями базисных моделей, соответствующих подалгебре $\mathfrak{A}_N^0$, порожденной линейными интегралами. Наиболее интересные деформации связаны с коммутативной подалгеброй $\mathfrak{A}_N^1$, содержащей многочлен второй степени от переменных (1.3) или (1.5).

Один из примеров связан с представлением первых скобок Складина на алгебре $e(3)$ [1], [3] со скобками Пуассона

$$\{J_i, J_j\} = \varepsilon_{ijk} J_k, \quad \{J_i, x_j\} = \varepsilon_{ijk} x_k, \quad \{x_i, x_j\} = 0, \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad (1.6)$$

где ε_{ijk} — полностью кососимметрический тензор.

Оказывается, что построенная нами подалгебра $\mathfrak{A}_2^1$ соответствует квадратичной деформации [4] волчка Горячева–Чаплыгина с гамильтонианом

$$\begin{aligned} H &= J_1^2 + J_2^2 + 4J_3^2 + 2\alpha_1 x_1 + 2\alpha_2 x_2 + \alpha_3 J_3 + \\ &+ 4(\alpha_4 x_1 + \alpha_5 x_2)J_3 - (\alpha_4^2 + \alpha_5^2)x_3^2 + \frac{\alpha_6}{x_3^2}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

На нулевом уровне интеграла площадей динамическая система с таким гамильтонианом является интегрируемой по Лиувиллю. При $\alpha_4 = \alpha_5 = 0$ гамильтониан (1.7) хорошо известен [3]. В случае, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_6 = 0$, гамильтониан (1.7) определяет новый частично интегрируемый (т.е. интегрируемый на специальном уровне одного из

интегралов движения) случай для уравнений Кирхгофа. Переменные и кривую разделения для модели (1.7) можно найти в разделе 4.

Там же приведены (возможно) новые интегрируемые деформации цепочки Тоды и модели Гейзенберга. Нам не известно, существуют ли физические приложения для этих интегрируемых систем. Кроме того, в разделе 4 показано, что цепочки Тоды, соответствующие системам корней $B_N^{(1)}$, $C_N^{(1)}$, $A_{2N}^{(2)}$, $A_{2N+1}^{(2)}$ и $D_{N+1}^{(2)}$, а также деформация цепочки Тоды, найденная Иноземцевым в работе [5], допускают разделение в одном и том же наборе переменных разделения, описанном в нашей схеме.

2. СВОЙСТВА СКОБОК СКЛЯНИНА

2.1. Первые скобки. Явная форма скобок Складина для переменных (1.3) может быть извлечена из операторного определения

$$\{T(\lambda), T(\mu)\} = [r(\lambda - \mu), T(\lambda)T(\mu)]. \quad (2.1)$$

Здесь мы используем стандартные обозначения $\overset{1}{T}(\lambda) = T(\lambda) \otimes \text{Id}$, $\overset{2}{T}(\mu) = \text{Id} \otimes T(\mu)$ и

$$r(z) = \frac{\eta}{z} \Pi, \quad \Pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \eta \in \mathbb{C}. \quad (2.2)$$

ПРИМЕР. В простейшем случае $N = 2$ покомпонентная запись соотношения (2.1) имеет вид

$$\begin{aligned} \{A_1, A_0\} &= 0, & \{A_1, B_1\} &= \eta B_1, & \{A_1, C_1\} &= -\eta C_1, & \{A_1, B_0\} &= \eta B_0, \\ \{A_1, C_0\} &= -\eta C_0, & \{A_1, D_0\} &= 0, & \{A_0, B_1\} &= \eta B_0, & \{A_0, C_1\} &= -\eta C_0, \\ \{A_0, B_0\} &= \eta(B_0 A_1 - A_0 B_1), & \{A_0, C_0\} &= \eta(A_0 C_1 - C_0 A_1), \\ \{A_0, D_0\} &= \eta(B_0 C_1 - B_1 C_0), & \{B_1, C_1\} &= \{B_1, B_0\} = 0, \\ \{B_1, C_0\} &= -\eta D_0, & \{B_1, D_0\} &= 0, & \{B_0, C_1\} &= -\eta D_0, & \{B_0, C_0\} &= -\eta D_0 A_1, \\ \{B_0, D_0\} &= -\eta B_1 D_0, & \{C_1, C_0\} &= 0, & \{C_1, D_0\} &= 0, & \{C_0, D_0\} &= \eta C_1 D_0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

ЛЕММА 1 [1]. Для любой числовой матрицы K , не зависящей от спектрального параметра, коэффициенты следа матрицы $KT(\lambda)$ коммутируют друг с другом относительно первых скобок Складина.

Таким образом, коэффициенты следа матрицы $KT(\lambda)$ порождают коммутативную подалгебру $\mathfrak{A}_N^0$ в $\mathfrak{A}_N$, элементы которой являются линейными многочленами от переменных (1.3).

Коэффициенты определителя

$$d(\lambda) = \det T(\lambda) = A(\lambda)D(\lambda) - B(\lambda)C(\lambda) \quad (2.4)$$

принадлежат центру алгебры $\mathfrak{A}$ или, другими словами, являются функциями Казимира для скобок (2.1). Число функций Казимира равно $2N - 1$, и мы имеем $(4N - 1)$ -мерное пуассоново многообразие с вырожденной пуассоновой структурой (2.1) и $2N$ -мерными симплектическими листами общего положения.

Для приведения скобок Пуассона (2.1) к канонической форме можно использовать набор переменных

$$d_0, \dots, d_{2N-2}, \quad q_1, \dots, q_N, \quad p_1, \dots, p_N, \quad (2.5)$$

предложенных Складниным в работе [2]. Переменные $d_0, \dots, d_{2N-2}$ — это коэффициенты (2.4)

$$d(\lambda) = d_{2N-2}\lambda^{2N-2} + \dots + d_0,$$

переменные q_i определяются нулями многочлена

$$A(\lambda) = \prod_{j=1}^N (\lambda - q_j),$$

переменные p_i задаются формулой

$$p_j = \eta^{-1} \ln B(q_j). \quad (2.6)$$

Из (2.1) следует, что

$$\begin{aligned} \{A(\lambda), A(\mu)\} &= \{B(\lambda), B(\mu)\} = 0, \\ \{A(\lambda), B(\mu)\} &= \frac{\eta}{\lambda - \mu} (A(\lambda)B(\mu) - A(\mu)B(\lambda)), \end{aligned}$$

откуда нетрудно получить $\{q_j, q_k\} = \{p_j, p_k\} = 0$ и $\{p_j, q_k\} = \delta_{jk}$. Как обычно, если мы фиксируем значения функций Казимира d_j , то канонически сопряженные переменные q_i, p_i становятся симплектическими координатами на соответствующем симплектическом листе.

Исходные переменные (1.3) выражаются через переменные (2.5) с помощью формул

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= \prod_{j=1}^N (\lambda - q_j), \quad B(\lambda) = \sum_{j=1}^N e^{\eta p_j} \prod_{k \neq j}^N \left(\frac{\lambda - q_k}{q_j - q_k} \right), \\ C(\lambda) &= - \sum_{j=1}^N d(q_j) e^{-\eta p_j} \prod_{k \neq j}^N \left(\frac{\lambda - q_k}{q_j - q_k} \right), \quad D(\lambda) = \frac{d(\lambda) + B(\lambda)C(\lambda)}{A(\lambda)}. \end{aligned}$$

2.2. Вторые скобки. Вторые скобки Складнина определяются так называемым уравнением отражения

$$\{T^1(\lambda), T^2(\mu)\} = [r(\lambda - \mu), T^1(\lambda)T^2(\mu)] + T^1(\lambda)r(\lambda + \mu)T^2(\mu) - T^2(\mu)r(\lambda + \mu)T^1(\lambda), \quad (2.7)$$

где $r(z)$ задается формулой (2.2).

ЛЕММА 2 [6]. Если матрица $T(\lambda)$ удовлетворяет уравнению отражения (2.7), то для любой числовой матрицы K вида

$$K(\lambda) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \lambda + \alpha_0 & \beta_1 \lambda \\ \gamma_1 \lambda & -\alpha_1 \lambda + \alpha_0 \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ — произвольные постоянные, коэффициенты следа матрицы $K(\lambda)T(\lambda)$ коммутируют между собой относительно второй скобки Складина.

Канонические переменные

$$d_0, \dots, d_{2N}, \quad q_1, \dots, q_N, \quad p_1, \dots, p_N \quad (2.9)$$

для скобки Пуассона (2.7) были предложены в работе [2]. Функции Казимира $d_0, \dots, d_{2N}$ являются коэффициентами определителя (2.4)

$$d(\lambda) = -\lambda^{4N+2} + d_{2N}\lambda^{4N} + \dots + d_1\lambda^2 + d_0,$$

переменные q_i — нули многочлена

$$C(\lambda) = \lambda \prod_{j=1}^N (\lambda^2 - q_j^2),$$

сопряженные переменные p_i задаются формулой

$$p_j = \eta^{-1} \ln A(q_j).$$

2.3. Связь между скобками. Пусть матрица T задана формулами (1.1), (1.2). Рассмотрим матрицу

$$\mathcal{T}(\lambda) = T(\lambda)K_-(\lambda) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} T^t(-\lambda) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

где $K_-(\lambda)$ — произвольная матрица вида (2.8), индекс t означает матричное транспонирование. Нетрудно проверить, что элементы $\mathcal{T}(\lambda)$ имеют структуру (1.4). Формула (2.10) выражает коэффициенты (1.5) матрицы $\mathcal{T}(\lambda)$ через коэффициенты (1.3) матрицы T . Оказывается [6], что отображение Ψ согласовано со скобками Складина: $\Psi(\{f, g\}_2) = \{\Psi(f), \Psi(g)\}_1$ для любых функций f и g от переменных (1.5).

3. КОММУТАТИВНЫЕ ПОДАЛГЕБРЫ

3.1. Первые скобки. Рассмотрим матрицу

$$\tilde{T}(\lambda) = K(\lambda)T(\lambda), \quad (3.1)$$

где $T(\lambda)$ задано формулами (1.1) и (1.2), а элементы матрицы

$$K(\lambda) = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & 0 \end{pmatrix}(\lambda) \quad (3.2)$$

имеют следующую структуру:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\lambda) &= \mathcal{A}_M \lambda^M + \mathcal{A}_{M-1} \lambda^{M-1} + \dots + \mathcal{A}_0, \\ \mathcal{B}(\lambda) &= b_M \lambda^M + b_{M-1} \lambda^{M-1} + \dots + b_0, \quad \mathcal{C}(\lambda) = c_M \lambda^M + c_{M-1} \lambda^{M-1} + \dots + c_0, \end{aligned}$$

где $b_k, c_k \in \mathbb{C}$ – произвольные параметры.

Потребуем, чтобы след новой матрицы $\tilde{T}$ имел вид

$$\operatorname{tr} \tilde{T}(\lambda) = \sum_{i=N}^{N+M} a_{i-N} \lambda^i + \sum_{k=0}^{N-1} I_k \lambda^k, \quad a_i \in \mathbb{C}, \quad (3.3)$$

где a_i – произвольные постоянные параметры. Легко проверить, что неизвестные коэффициенты $\mathcal{A}_i$ многочлена $\mathcal{A}$ и неизвестные функции I_k в (3.3) однозначно определяются из (3.3) как функции от динамических переменных (1.3) и параметров a_i, b_i и c_i . Эти функции находятся последовательно приравниванием коэффициентов при степенях λ в (3.3) и оказываются многочленами от переменных (1.3) такими, что степени $\mathcal{A}_i$ равны $M - i$, а все многочлены I_k имеют одну и ту же степень $M + 1$.

ПРИМЕР (продолжение). При $N = 2$ и $M = 1$ многочлены $\mathcal{A}_i$ и I_i имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= a_1, \quad \mathcal{A}_0 = a_0 - a_1 A_1 - b_1 C_1 - c_1 B_1, \\ I_1 &= a_1(A_0 - A_1^2) + b_1(C_0 - A_1 C_1) + c_1(B_0 - A_1 B_1) + a_0 A_1 + b_0 C_1 + c_0 B_1, \\ I_0 &= (a_0 - a_1 A_1 - b_1 C_1 - c_1 B_1)A_0 + c_0 B_0 + b_0 C_0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

ТЕОРЕМА 1. *Определенные формулой (3.3) многочлены I_k , $k = 1, \dots, N$, от переменных (1.3) коммутируют друг с другом относительно скобки (2.1).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношение (3.3) имеет вид

$$\mathcal{A}(\lambda)A(\lambda) + \mathcal{B}(\lambda)C(\lambda) + C(\lambda)B(\lambda) = \sum_{k=0}^{N-1} I_k \lambda^k + \sum_{i=N}^{N+M} a_{i-N} \lambda^i.$$

Подставим $\lambda = q_j$ в это тождество. Тогда из соотношения $d(\lambda) = AD - BC$ следует, что

$$C(q_j) = -\frac{d(q_j)}{B(q_j)} = -d(q_j)e^{-\eta p_j}.$$

Используя эту формулу и определение переменных p_i , получаем N линейных уравнений

$$\mathcal{C}(q_j)e^{\eta p_j} - \mathcal{B}(q_j)d(q_j)e^{-\eta p_j} = \sum_{k=0}^{N-1} I_k q_j^k + \sum_{i=N}^{N+M} a_{i-N} q_j^i, \quad j = 1, \dots, N, \quad (3.5)$$

для N неизвестных функций I_k . Следуя работе [7], мы легко покажем, что функции I_k находятся в инволюции относительно скобки (2.1). Для этого перепишем систему уравнений (3.5) в матричной форме:

$$\phi(p, q) = \mathbf{S}(q)I(p, q) + U(q), \quad (3.6)$$

где

$$\begin{aligned} \phi_j &= \mathcal{C}(q_j)e^{\eta p_j} - \mathcal{B}(q_j)d(q_j)e^{-\eta p_j}, \quad U_j = \sum_{i=N}^{N+M} a_{i-N} q_j^i, \\ \mathbf{S} &= \begin{pmatrix} 1, & q_1, & \dots & q_1^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1, & q_N, & \dots & q_N^{N-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Решение системы (3.6) задается формулой

$$I(p, q, d) = \mathbf{W}(q)(\phi(p, q) - U(q)), \quad \mathbf{W}(q) = \mathbf{S}^{-1}(q). \quad (3.7)$$

Матрица $\mathbf{S}$ принадлежит к классу так называемых штекелевых матриц [7], для которых элементы S_{ij} строки с номером i зависят только от переменной q_i . Дифференцируя тождество

$$\sum_i W_{mi} S_{il} = \delta_{ml}$$

по переменной q_j и используя основное свойство штекелевых матриц, получим

$$\sum_i \frac{\partial W_{mi}}{\partial q_j} S_{il} = -W_{mj} \frac{\partial S_{jl}}{\partial q_j}.$$

Подставляя k вместо m , получим еще одно соотношение того же вида. Исключая выражение $\partial S_{jl}/\partial q_j$ из этих двух уравнений, находим

$$\sum_i \left(W_{jk} \frac{\partial W_{im}}{\partial q_j} - W_{jm} \frac{\partial W_{ik}}{\partial q_j} \right) S_{il} = 0.$$

Так как определитель матрицы $\mathbf{S}$ не равен нулю, имеем

$$W_{jk} \frac{\partial W_{im}}{\partial q_j} - W_{jm} \frac{\partial W_{ik}}{\partial q_j} = 0 \quad (3.8)$$

для всех j, k, i, m .

Вычисляя теперь скобки Пуассона между функциями I_k и I_m (3.7), получаем

$$\{I_k, I_m\} = \sum_{i,j} \left(W_{jk} \frac{\partial W_{im}}{\partial q_j} - W_{jm} \frac{\partial W_{ik}}{\partial q_j} \right) \frac{\partial \phi_j}{\partial p_j} (\phi_j - U_j(q_j)).$$

Из (3.8) следует, что $\{I_k, I_m\} = 0$. Доказательство завершено.

СЛЕДСТВИЕ 1. Функции q_j, p_j являются переменными разделения для интегралов движения I_k , удовлетворяющих разделяющим уравнениям (3.5), (3.6). Переменные

$$\lambda_j = q_j, \quad \mu_j = C(q_j)e^{\eta p_j} \quad (3.9)$$

удовлетворяют характеристическому уравнению $\text{Det}(\tilde{T}(\lambda) - \mu) = 0$. Это значит, что все пары переменных λ_j, μ_j лежат на одной и той же алгебраической кривой.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В случае $N = 2, M = 1$ матрица $\tilde{T}(\lambda)$ вида (3.1) с

$$K(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda + \mathcal{A}_0 & b_0 \\ c_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_0 = a_0 - A_1, \quad (3.10)$$

появилась в статье [1] в нефакторизованном виде. В работе [8] эта матрица была факторизована и обобщена на случай произвольного N . Отметим, что наша матрица K для $M = 1$

$$K(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda + \mathcal{A}_0 & b_1\lambda + b_0 \\ c_1\lambda + c_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_0 = a_0 - A_1 - b_1C_1 - c_1B_1,$$

имеет более общую форму, чем (3.10). Параметры b_1 и c_1 чрезвычайно существенны для построения новых квадратичных интегрируемых гамильтонианов.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Обобщая условие (3.3), можно предположить, что

$$\text{tr } \tilde{T}(\lambda) = \sum_{i \in \hat{\varrho}} a_i \lambda^i + \sum_{k \in \varrho} I_k \lambda^k, \quad a_k \in \mathbb{C}.$$

Здесь $\varrho = \{i_1, \dots, i_N\}$ — произвольное подмножество множества чисел $\{0, 1, \dots, N + M\}$, а $\hat{\varrho}$ — соответствующее дополнение: $\varrho \cup \hat{\varrho} = \{0, 1, \dots, N + M\}$. В этом случае I_i по-прежнему коммутируют между собой, но являются рациональными функциями переменных (1.3).

ПРИМЕР (продолжение). Если $N = 2, M = 1$ и $\text{tr } \tilde{T}(\lambda) = a_1\lambda^3 + I_1\lambda^2 + a_0\lambda + I_0$, то

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= a_1, \quad \mathcal{A}_0 = \frac{1}{A_1}(a_0 - a_1A_0 - c_0B_1 - b_0C_1 - b_1C_0 - c_1B_0), \\ I_1 &= \frac{1}{A_1}(a_0 - a_1(A_0 - A_1^2) - b_1(C_0 - C_1A_1) - c_1(B_0 - B_1A_1) - c_0B_1 - b_0C_1), \\ I_0 &= \frac{1}{A_1}(A_0(a_0 - c_1B_0 - a_1A_0 - b_1C_0) + b_0(C_0A_1 - A_0C_1) + c_0(B_0A_1 - A_0B_1)). \end{aligned} \quad (3.11)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Доказательство теоремы 1 может быть легко модифицировано на случай матриц (1.1), для которых матричный коэффициент при старшей степени λ имеет не жорданову, а диагональную структуру. А именно можно предположить, что элемент $D(\lambda)$ матрицы $T(\lambda)$ имеет вид

$$D(\lambda) = \lambda^N + D_{N-1}\lambda^{N-1} + D_{N-2}\lambda^{N-2} + \dots + D_0. \quad (3.12)$$

В этом случае имеются одна дополнительная переменная D_{N-1} и одна дополнительная функция Казимира $d_{2N-1} = A_{N-1} + D_{N-1}$.

3.2. Вторые скобки. Конструкция коммутативных подалгебр для вторых скобок очень близка к изложенной выше. Пусть матрица $T(\lambda)$ задана формулами (1.1), (1.4) и удовлетворяет уравнению отражения (2.7). Введем матрицу $\tilde{T} = KT$ (3.1), где элементы матрицы

$$K(\lambda) = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ 0 & \mathcal{D} \end{pmatrix}(\lambda) \quad (3.13)$$

имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\lambda) &= a_{2M}\lambda^{2M} + a_{2M-1}\lambda^{2M-1} + \dots + a_1\lambda + a_0, & \mathcal{D}(\lambda) &= \mathcal{A}(-\lambda), \\ \mathcal{B}(\lambda) &= \mathcal{B}_{M-1}\lambda^{2M-1} + \mathcal{B}_{M-2}\lambda^{2M-3} + \dots + \mathcal{B}_0\lambda. \end{aligned}$$

Здесь $a_k \in \mathbb{C}$ — произвольные параметры, а коэффициенты $\mathcal{B}_i$ — некоторые функции от переменных (1.5). Нетрудно проверить, что след матрицы $\tilde{T}(\lambda)$ является четным многочленом от λ .

Функции $\mathcal{B}_0, \dots, \mathcal{B}_{M-1}$ и $I_0, \dots, I_{N-1}$ однозначно определяются требованием

$$\text{tr } \tilde{T}(\lambda) = \sum_{i=N+1}^{N+M} b_{i-N}\lambda^{2i} + \sum_{k=1}^N I_k\lambda^{2k} + a_0d_0, \quad b_i \in \mathbb{C}, \quad (3.14)$$

где b_i — произвольные фиксированные числовые параметры, $d_0 = 2A_0$ — функция Казимира (2.9). Все функции $\mathcal{B}_i, I_i$ оказываются многочленами по переменным (1.5), например, $\mathcal{B}_{M-1} = b_M - 2a_{2M}A_{2N}$.

Те же самые рассуждения, что и при доказательстве теоремы 1, приводят к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 2. *Определенные соотношением (3.14) многочлены I_k от переменных (1.5) коммутируют между собой относительно скобки (2.7).*

СЛЕДСТВИЕ 2. *Канонические переменные p_i, q_i (2.9) являются переменными разделения для интегралов движения I_k (3.14). Разделяющие уравнения задаются формулой (3.6), где*

$$\begin{aligned} \phi_j &= \mathcal{A}(q_j)e^{\eta p_j} - \mathcal{D}(q_j)d(q_j)e^{-\eta p_j}, & U_j &= \sum_{i=1}^M b_i q_j^{2(N+i)} + a_0d_0, & (3.15) \\ \mathbf{S} &= \begin{pmatrix} q_1^2 & q_1^4 & \dots & q_1^{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_N^2 & q_N^4 & \dots & q_N^{2N} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Переменные

$$\lambda_j = q_j, \quad \mu_j = \mathcal{A}(q_j)e^{\eta p_j}$$

удовлетворяют характеристическому уравнению $\text{Det}(\tilde{T}(\lambda) - \mu) = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В случае, когда параметр γ_1 в формуле (2.8) равен нулю, утверждение леммы 2 совпадает с частным случаем $M = 1$, $a_2 = 0$ теоремы 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Теорема 2 остается верной, если предположить, что

$$\operatorname{tr} \tilde{T}(\lambda) = \sum_{i \in \widehat{\varrho}} b_i \lambda^{2i} + \sum_{k \in \varrho} I_k \lambda^{2k} + a_0 d_0, \quad b_i \in \mathbb{C},$$

где $\varrho = \{i_1, \dots, i_N\}$ — произвольное подмножество множества чисел $\{1, \dots, N + M\}$, а $\widehat{\varrho}$ — дополнение к ϱ . Однако в этом случае B_i и I_i становятся рациональными функциями переменных (1.5).

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Теорема 2 справедлива также для матриц (1.1), у которых элемент $B(\lambda)$ имеет вид

$$B(\lambda) = \lambda^{2N+1} + B_{N-1} \lambda^{2N-1} + B_{N-2} \lambda^{2N-3} + \dots + B_0 \lambda.$$

4. ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ ИЗВЕСТНЫХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ МОДЕЛЕЙ

Если для заданного пуассонова многообразия $\mathcal{M}$ отождествить скобки Пуассона на $\mathcal{M}$ со скобками Складина (2.1) или (2.7), то определения (2.1) и (2.7) можно рассматривать как уравнения для матриц $T(\lambda)$. Всякое решение этого уравнения представляет собой набор формул, выражающих переменные (1.3) или (1.5) как функции от координат на $\mathcal{M}$. Эти формулы определяют представление алгебры Складина (2.1) и (2.7) на многообразии $\mathcal{M}$.

4.1. Обобщенный волчок Горячева–Чаплыгина. Орбиты коприсоединенного представления группы движений трехмерного евклидова пространства $E(3)$ на $e(3)^*$ со скобкой Ли–Пуассона (1.6) являются четырехмерными симплектическими листами, представляющими собой общий уровень двух функций Казимира $(x, x) = \sum x_i^2$ и $\ell = \sum x_i J_i$.

Фазовое пространство для волчка Горячева–Чаплыгина $\mathcal{M}$ отождествляется с семейством симплектических листов, выделенных нулевым значением второй функции Казимира $\ell = 0$ (интеграла площадей).

Следуя работе [3], рассмотрим переменные (1.3)

$$\begin{aligned} A_1 &= -2J_3, & A_0 &= -J_1^2 - J_2^2 - \frac{\delta}{x_3^2}, & B_1 &= x_2 + ix_1, & B_0 &= -(J_2 + iJ_1)x_3, \\ C_1 &= -x_2 + ix_1, & C_0 &= (J_2 - iJ_1)x_3, & D_0 &= x_3^2, \end{aligned}$$

которые удовлетворяют соотношениям (2.3) с $\eta = -2i$ при условии, что $\ell = 0$, а левые части (2.3) вычисляются с помощью скобок Пуассона (1.6).

Формулы (3.4) дают

$$I_1 = a_1 \left(J_1^2 + J_2^2 + 4J_3^2 + \frac{\delta}{x_3^2} \right) + 2a_0 J_3 + b_0(x_2 - ix_1) - c_0(x_2 + ix_1) + \\ + b_1(2J_3x_2 - J_2x_3 - 2iJ_3x_1 + iJ_1x_3) - c_1(2J_3x_2 - J_2x_3 + 2iJ_3x_1 - iJ_1x_3), \quad (4.1)$$

$$I_0 = 2a_1(J_1^2 + J_2^2)J_3 + a_0(J_1^2 + J_2^2) + b_0(-J_2 + iJ_1)x_3 + c_0(J_2 + iJ_1)x_3 + \\ + b_1(J_1^2 + J_2^2)(x_2 - ix_1) - c_1(J_1^2 + J_2^2)(x_2 + ix_1) + \\ + \frac{\delta}{x_3^2} \left(2a_1J_3 + a_0 + b_1(x_2 - ix_1) - c_1(x_2 + ix_1) \right). \quad (4.2)$$

Согласно теореме 1 интегралы I_1 и I_0 находятся в инволюции. При $a_1 = 1$ функция Гамильтона $H_1 = I_1$ после канонического преобразования переменных

$$x \rightarrow x, \quad J \rightarrow J + Ux, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -ic_+ \\ 0 & 0 & -c_- \\ ic_+ & c_- & 0 \end{pmatrix}, \quad c_{\pm} = \frac{c_1 \pm b_1}{2},$$

и замены параметров

$$\alpha_1 = i(a_0(c_1 + b_1) - (c_0 + b_0)), \quad \alpha_2 = (a_0(c_1 - b_1) - (c_0 - b_0)), \\ \alpha_3 = 2a_0, \quad 2\alpha_5 = c_1 - b_1, \quad 2\alpha_4 = i(c_1 + b_1), \quad \alpha_6 = \delta$$

совпадает с гамильтонианом (1.7).

Приведем более общую деформацию гамильтониана Горячева–Чаплыгина, соответствующую $M = 2$. Она кубична по моментам J_i и имеет вид

$$\hat{I}_1 = I_1 + 4a_2J_3((J_1^2 + J_2^2 + 2J_3^2) + \delta x_3^{-2}) + \\ + b_2(2iJ_3x_3(J_1 + iJ_2) + (J_1^2 + J_2^2 + 4J_3^2 + \delta x_3^{-2})(x_2 - ix_1)) - \\ - c_2(2iJ_3x_3(J_1 - iJ_2) + (J_1^2 + J_2^2 + 4J_3^2 + \delta x_3^{-2})(x_2 + ix_1)),$$

где I_1 задается формулой (4.1).

Простейший рациональный интегрируемый гамильтониан, который можно построить с помощью схемы из п. 3.1, задается формулой (3.11) и имеет вид

$$\tilde{I}_1 = \frac{I_1 - a_0(2J_3 - 1)}{2J_3}.$$

Дополнительный интеграл $\tilde{I}_0$ определяется последней из формул (3.11).

Согласно теореме 1 и следствию 1, переменные разделения для всех деформаций одни и те же. В соответствии с определением (2.5) координаты $q_{1,2}$ являются нулями многочлена $A(\lambda) = \lambda^2 + A_1\lambda + A_0$, т.е.

$$q_{1,2} = J_3 \pm \sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 + \frac{\delta}{x_3^2}}.$$

Соответствующие импульсы $p_{1,2}$ определяются формулой (2.6):

$$p_{1,2} = \frac{1}{2i} \ln(q_{1,2}(ix_1 - x_2) - (iJ_1 - J_2)x_3).$$

Уравнения разделения (3.5) и соответствующие детерминантные кривые, связывающие переменные (3.9), для разных деформаций различны. Например, для интегралов (4.1), (4.2) детерминантная кривая имеет вид

$$a_1\lambda^3 + a_0\lambda^2 - I_1\lambda + I_0 = (c_1\lambda + c_0)\mu - \frac{(b_1\lambda + b_0)\lambda^2(x, x)}{\mu}.$$

Для рассмотренного выше рационального случая кривая отличается перестановкой местами параметра a_0 и интеграла движения I_1 :

$$a_1\lambda^3 + \tilde{I}_1\lambda^2 - a_0\lambda + \tilde{I}_0 = (c_1\lambda + c_0)\mu - \frac{(b_1\lambda + b_0)\lambda^2(x, x)}{\mu}.$$

4.2. Цепочки Тоды.

4.2.1. *Первые скобки.* Введем канонические координаты p_i, q_i , $\{p_i, q_k\} = \delta_{ik}$ на фазовом пространстве $\mathcal{M} = \mathbb{R}^{2N}$ и определим представление на $\mathcal{M}$ алгебры Складина (2.1) с $\eta = 1$ с помощью формулы (см. [9])

$$T(\lambda) = L_N L_{N-1} \dots L_1, \quad L_i(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda - p_i & e^{q_i} \\ -e^{-q_i} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Известно, что коэффициенты следа матрицы $T(\lambda)$ порождают интегралы движения для периодической цепочки Тоды:

$$P = -\sum_{i=1}^N p_i, \quad H = -\sum_{i>j}^N p_i p_j - \sum_{i=1}^N e^{q_{i+1}-q_i}, \quad q_{i+N} = q_i.$$

Взаимодействие становится локальным, если вместо H рассмотреть гамильтониан $H + P^2/2$.

Используя схему, предложенную в разделе 3, можно построить новые интегрируемые системы с полиномиальными по импульсам интегралами движения. В простейшем случае $M = 1$ коммутативная подалгебра, построенная в п. 3.1, содержит квадратичный интеграл

$$I_{N-1} = a_0 P + a_1 (H - P^2) + e^{q_1} (c_0 + c_1 p_1) - e^{-q_N} (b_0 + b_1 p_N).$$

Эта модель может рассматриваться как деформация открытой цепочки Тоды, соответствующая случаю $a_0 = c_0 = c_1 = b_0 = b_1 = 0$. Заметим, что если одна из постоянных b_i или c_i отлична от нуля, то модель не допускает линейного интеграла P и, в отличие от цепочки Тоды, мы не можем с помощью сдвига на P^2 сделать локальной кинетическую энергию.

4.2.2. *Вторые скобки.* Пусть $\mathcal{T}(\lambda)$ – частное решение уравнения отражения вида (2.10):

$$\mathcal{T}(\lambda) = T(\lambda) \begin{pmatrix} \alpha_1 \lambda + \alpha_0 & 0 \\ \lambda & -\alpha_1 \lambda + \alpha_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} T^t(-\lambda) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

где T задана формулой (4.3).

Рассмотрим теперь матрицу $\tilde{T}(\lambda) = K(\lambda)\mathcal{T}(\lambda)$ (3.1) при $M = 1$; тогда (см. (3.13))

$$K(\lambda) = \begin{pmatrix} a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 & \mathcal{B}_1 \lambda \\ 0 & a_2 \lambda^2 - a_1 \lambda + a_0 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Из условия, что след матрицы $\tilde{T}(\lambda)$ порождает интегралы движения (3.14), находим, что динамическая матрица K зависит только от координаты в N -м узле решетки

$$\mathcal{B}_1 = b_1 - 2a_2 e^{-q_N},$$

где без ограничения общности можно положить $b_1 = 1$. При условии $a_2 = 0$ эта матрица не зависит от динамических переменных, и справедлива лемма 2.

Так, если все параметры $a_i = 0$, то $\mathcal{B}_1 = 1$ и с точностью до канонического преобразования

$$p_1 \rightarrow p_1 - \alpha_1 e^{q_1} \quad (4.5)$$

гамильтониан равен

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} e^{q_{i+1}-q_i} - \alpha_0 e^{q_1} - \frac{\alpha_1^2}{2} e^{2q_1}. \quad (4.6)$$

Гамильтониан H описывает цепочки Тоды, связанные с классическими системами корней типа B_N (при $\alpha_1 = 0$) и C_N (при $\alpha_0 = 0$) [6], [10].

В общем случае $a_i \neq 1$ матрица $\tilde{T}(\lambda) = K(\lambda)\mathcal{T}(\lambda)$ порождает гамильтониан вида $H_a = H + \Delta H$, где дополнение к функции Гамильтона H (4.6) равно

$$\Delta H = -(a_2 p_N^2 - a_1 p_N + a_0) e^{-q_N} - a_2 e^{-q_N-1}.$$

При $a_2 = 0$ после канонического преобразования импульсов

$$p_N = \hat{p}_N - a_1 e^{-q_N}$$

данный гамильтониан имеет вид

$$H_a = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} e^{q_{i+1}-q_i} - \alpha_0 e^{q_1} - \frac{\alpha_1}{2} e^{2q_1} - a_0 e^{-q_N} - \frac{a_1^2}{2} e^{-2q_N}$$

и описывает цепочки Тоды, связанные с пополненными системами корней $C_N^{(1)}$ при $\alpha_0 = a_0 = 0$, $A_{2N}^{(2)}$ при $\alpha_1 = a_0 = 0$ и $D_{N+1}^{(2)}$ при $\alpha_1 = a_1 = 0$.

При $a_2 \neq 0$ каноническое преобразование пары координат

$$p_N = \frac{(\operatorname{ch} \hat{q}_N + 1)\hat{p}_N}{\operatorname{sh} \hat{q}_N} - \frac{a_1}{a_2(\operatorname{ch} \hat{q}_N - 1)}, \quad q_N = \ln(a_2(\operatorname{ch} \hat{q}_N + 1)) \quad (4.7)$$

приводит гамильтониан $H_a = H + \Delta H$ к натуральному виду

$$\begin{aligned} H_a = & \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} e^{q_{i+1}-q_i} - \alpha_0 e^{q_1} - \frac{\alpha_1}{2} e^{2q_1} + \\ & + a_2 (e^{\hat{q}_N - q_{N-1}} + e^{-\hat{q}_N - q_{N-1}}) - \frac{a_1^2}{a_2^2 \operatorname{sh}(\hat{q}_N)^2} - \frac{a_0}{a_2 \operatorname{sh}(\hat{q}_N/2)^2}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Полученный гамильтониан при $a_0 = a_1 = 0$ отвечает цепочке Тоды, связанной с корневыми системами $B_N^{(1)}$ при $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ и $A_{2N+1}^{(2)}$ при $\alpha_1 = \alpha_0 = 0$. Второе и третье добавочные слагаемые были найдены Иноземцевым в работе [5]. Нам не известна интерпретация этих добавок в терминах систем корней.

Все интегрируемые гамильтонианы, возникшие в п. 4.2.2, были известны. В данной работе они построены в рамках единого подхода, который позволил доказать, что цепочки Тоды, отвечающие корневым системам $B_N^{(1)}$, $C_N^{(1)}$, $A_{2N}^{(2)}$, $A_{2N+1}^{(2)}$ и $D_{N+1}^{(2)}$, допускают разделение в одном и том же (с точностью до канонических преобразований (4.5) и (4.7)) наборе переменных разделения.

4.3. Спиновые модели.

4.3.1. *Первые скобки.* Рассмотрим в качестве пространства $\mathcal{M}$ прямую сумму алгебр $sl^*(2)$ со скобками

$$\{s_3^i, s_{\pm}^i\} = \pm s_{\pm}^i, \quad \{s_+^i, s_-^i\} = 2s_3^i.$$

Тогда формула

$$T(\lambda) = L_N L_{N-1} \dots L_1, \quad L_i(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda + s_3^i & s_-^i \\ s_+^i & \lambda - s_3^i \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

задает на $\mathcal{M}$ представление алгебры Складина (2.1) с $\eta = 1$ [2]. Нетрудно проверить, что элементы A, B и C такой матрицы T имеют вид (1.2), а элемент $D(\lambda)$ и функция Казимира $d_{2n-1} = A_{N-1} + D_{N+1}$ равны нулю.

Интегралы, которые получаются с использованием леммы 2, не являются локальными. Однако, раскладывая функцию $\ln(\operatorname{tr} T)$ по степеням λ , можно получить гамильтониан

$$H = \sum_{i=1}^N (2s_3^i s_3^{i+1} + s_+^i s_-^{i+1} + s_-^i s_+^{i+1})$$

XXX -изотропного магнетика Гейзенберга и остальные интегралы движения для этой модели. Данная функция Гамильтона локальна, т.е. описывает взаимодействие только ближайших узлов в цепочке.

Дальнейшее построение новых интегрируемых систем с использованием представления скобок Склянина (4.9) проводится по схеме, предложенной в разделе 3. Однако, так как функции $\mathcal{A}_i$ зависят от всех спиновых переменных s^i в цепочке, стандартные методы построения интегралов движения приводят к заведомо нелокальным интегралам. Так, при $M = 1$ формулы (3.4) дают

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0 &= a_0 - a_1 S_3 - b_1 S_+ - c_1 S_-, \\ I_{N-1} &= a_0 S_3 + b_0 S_+ + c_0 S_- + a_1 \left(\sum_{j>i}^N (s_+^i s_-^j + s_3^i s_3^j) - S_3^2 \right) - \\ &\quad - 2b_1 \left(S_3 S_+ - \sum_{j>i}^N s_3^i s_+^j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N s_3^i s_+^i \right) - \\ &\quad - 2c_1 \left(S_3 S_- - \sum_{j<i}^N s_3^i s_-^j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N s_3^i s_-^i \right), \end{aligned} \quad (4.10)$$

где $S_3 = \sum s_3^i$, $S_- = \sum s_-^i$, $S_+ = \sum s_+^i$. Вопрос, можно ли преобразовать этот квадратичный гамильтониан к более компактному виду, в настоящей работе не обсуждается.

4.3.2. Вторые скобки. Пусть $T(\lambda)$ – матрица (2.10), где $T(\lambda)$ задана формулой (4.9), K_- – числовая матрица (2.8). Таким образом, исходное представление алгебры Склянина параметризуется элементами α_0 , α_1 , β_1 и γ_1 матрицы (2.8).

Следуя предложенной в разделе 3 схеме, рассмотрим матрицу $\tilde{T}(\lambda) = K(\lambda)T(\lambda)$, где матрица $K(\lambda)$ определена формулой (4.4). Из условия (3.14) находим, что

$$B_1 = -2a_2 \left(2\frac{\alpha_1}{\gamma_1} S_3 + \frac{\beta_1}{\gamma_1} S_- + S_+ + \gamma_1 \alpha_0 \right) - 2\frac{\alpha_1}{\gamma_1} a_1 + \frac{b_1}{\gamma_1},$$

где $S_{\pm}$ и S_3 – компоненты полного спина (4.10). При условии $a_2 = 0$ эта матрица не зависит от динамических переменных, и мы приходим к частному случаю $\hat{\gamma}_1 = 0$ конструкции, описанной леммой 2.

Коэффициенты следа матрицы $\tilde{T}$ приводят к нелокальным интегралам движения. Поскольку матрицы (2.8) и (4.4) являются регулярными, т.е. $K(0) \sim \text{Id}$, для построения локальных функций Гамильтона мы можем использовать формулу Склянина из работы [6]. Так, если $a_0 = a_1 = a_2 = 0$, эта формула приводит к гамильтониану

$$H = \sum_{i=1}^{N-1} (2s_3^i s_3^{i+1} + s_-^i s_+^{i+1} + s_+^i s_-^{i+1}) + \frac{1}{\alpha_0} (\alpha_1 s_3^1 - \gamma_1 s_-^1 - \beta_1 s_+^1). \quad (4.11)$$

При $a_2 = 0$, $a_1 \neq 0$ возникает дополнение к гамильтониану (4.11) вида

$$\Delta H = \frac{a_1}{a_0} s_3^N - \frac{2\alpha_1 a_1 - b_1}{a_0 \gamma_1} s_+^N.$$

При $a_2 \neq 0$ дополнение имеет вид

$$\Delta H = \frac{2a_1 s_3^N - s_+^N \mathcal{B}_1}{2(a_2 + a_0)}.$$

Данное слагаемое нелокально и описывает взаимодействие N -го узла цепочки с остальными узлами.

Известно [6], что использование постоянной матрицы K вида (2.8) с $\hat{\gamma}_1 \neq 0$ позволяет получить еще одно добавочное слагаемое

$$\Delta H = -\hat{\gamma}_1 s_-^N,$$

которое не воспроизводится в рамках предложенной схемы. Заметим, что для цепочек Toda подобное слагаемое появлялось в нашем методе благодаря наличию канонического преобразования (4.5).

Благодарности. Авторы благодарны Институту математических наук Исаака Ньютона (Кембридж) за гостеприимство. Работа частично поддержана грантами РФФИ № 99-01-00294 и № 99-01-00698; INTAS № 99-1782 и 99-01459; EPSRC GR K99015.

Список литературы

- [1] *Е. К. Склянин.* Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1984. V. 133. P. 236.
- [2] *Е. К. Склянин.* Progr. Theor. Phys. 1995. V. 118. P. 35.
- [3] *V. B. Kuznetsov, A. V. Tsiganov.* J. Phys. 1989. V. 22. P. L73.
- [4] *В. В. Соколов, А. В. Цыганов.* ТМФ. 2002. Т. 131. № 1. С. 118.
- [5] *V. I. Inozemtsev.* Commun. Math. Phys. 1989. V. 121. P. 629.
- [6] *Е. К. Склянин.* J. Phys. A. 1988. V. 21. P. 2375.
- [7] *P. Stäckel.* Über die integration der Hamilton–Jacobischen differentialgleichung mittels separation der variabeln. Halle: Habilitationsschrift, 1891; *L. A. Pars.* Amer. Math. Monthly. 1949. V. 56. P. 394.
- [8] *A. V. Tsiganov.* J. Math. Phys. 1997. V. 38. P. 196.
- [9] *Е. К. Склянин.* The quantum Toda chain. In: Nonlinear Equations in Classical and Quantum Field Theory. Proc. Semin. Meudon, Paris, 1983/1984. Lect. Notes Phys. V. 226. Berlin: Springer, 1985. P. 196.
- [10] *A. V. Tsiganov.* J. Phys. A. 1998. V. 31. P. 8049.