Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Семихатов, И. Ю. Типунин, Б. Л. Фейгин, Полубесконечная реализация унитарных представлений $N = 2$ алгебры и родственные конструкции, *ТМФ*, 2001, том 126, номер 1, 3–62

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf414>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 16:26:40

© 2001 г. А. М. Семихатов*, И. Ю. Типунин*, Б. Л. Фейгин†

ПОЛУБЕСКОНЕЧНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ УНИТАРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ $N = 2$ АЛГЕБРЫ И РОДСТВЕННЫЕ КОНСТРУКЦИИ¹⁾

На примере $N = 2$ супералгебры Вирасоро и аффинной $\widehat{sl}(2)$ -алгебры исследуются построения унитарных представлений бесконечномерных алгебр в терминах “коллективных возбуждений” над заполненным дираковским морем фермионных или бозонных операторов, удовлетворяющих обобщенному принципу запрета и являющихся полубесконечными формами по модам одного из генераторов. Развиваются методы для исследования свойств полубесконечных пространств (полиномиальная реализация двойственного пространства) и определения действия на них соответствующей алгебры (фильтрация подпространствами, аналогичными модулям Демазюра). Рассматриваются связи полубесконечных реализаций с тождествами типа Роджерса–Рамануджана, выражением коинвариантов через мероморфные функции на произведениях римановых поверхностей с предписанным поведением на кратных диагоналях и некоторыми комбинаторными фактами, а также связь между модулярными функторами и правилами слияния для $N = 2$ и $\widehat{sl}(2)$ -теорий.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	4
2. $N = 2$ алгебра	12
2.1. $N = 2$ алгебра и спектральный поток	12
2.2. Унитарные представления $N = 2$ алгебры	14
2.3. Эквивалентность категорий и связанные вопросы	15
2.4. Мотивировка полубесконечной конструкции	16
3. Полубесконечное пространство $W_{r,p;\theta}$	18
3.1. Индуктивный предел	18
3.2. Разреженный базис	19

---

¹⁾Статья написана по заказу Редколлегии.

---

*Отделение теоретической физики им. И. Е. Тамма, Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия

†Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Черноголовка, Московская обл., Россия

4. Функциональная реализация и характеры	21
4.1. Функциональная реализация пространства $W_{r,p}(0)^*$	21
4.2. Характеры пространств $W_{r,p;\theta}(\iota)$	23
4.3. Линейная независимость разреженных мономов	26
4.4. Характер полубесконечного пространства	29
4.5. Полубесконечная конструкция для $\widehat{sl}(2)$ -алгебры	30
5. Действие $N = 2$ алгебры на пространстве $W_{r,p;\theta}$	31
5.1. Положительная фильтрация	32
5.2. Дифференциальные операторы для генераторов на подпространствах	33
5.3. Двойственные к дифференциальным операторы на функциональных пространствах	35
5.4. Склеивка действия алгебры на пространстве $W_{r,p;\theta}$	38
5.5. $\widehat{sl}(2)$ -Действие на полубесконечном пространстве	43
5.6. Изоморфизм с представлением $\mathfrak{K}_{r,p;\theta}$	45
6. Некоторые родственные конструкции	47
6.1. Положительные базисы: пути и обобщенные треугольники Паскаля	47
6.2. $N = 2$ модулярный функтор и функции на римановых поверхностях	52
6.3. Унитарная $N = 2$ алгебра слияния	56
7. Заключительные замечания	59

1. ВВЕДЕНИЕ

В физических терминах полубесконечные конструкции [1]–[6] представлений бесконечномерных алгебр (например, аффинных алгебр Ли) являются коллективными эффектами “квазичастичного” типа: пространство представления заполняется возбуждениями над дираковским морем фермионов или бозонов (или анионов), удовлетворяющих некоторому принципу запрета. Это приводит к нестандартным реализациям представлений (идеологически восходящим к работе [7]), с утилитарной точки зрения их можно рассматривать как выбор квазичастичного базиса в пространстве состояний²⁾. Из конструкции, как правило, совершенно не очевидно, что построенные состояния заполняют в точности неприводимое представление какой-либо алгебры. Но если это все же так, то подсчет характера (статсуммы на торе) двумя способами – в соответствии с квазичастичной картиной и в стандартном базисе – дает нетривиальное тождество типа обобщенных тождеств Роджерса–Рамануджана [10], [11]. Напомним, что такие тождества (называемые тождествами Роджерса–Рамануджана–Гордона–Эндрюса), исходно мотивированные комбинаторными соответствиями³⁾, исследовались различными ме-

²⁾ Терминология связана с тем, что, например, в (интегрируемой) деформации конформной теории поля вне конформной точки естественно перечислять состояния в терминах массивных (квази)частиц. При стремлении параметра деформации к нулю получается набор квазичастичных состояний в пространстве представления конформной теории поля [4], [8], [9].

³⁾ Напомним классическое утверждение (см. [10]): “Разбиения целого числа n , в которых разница между любыми двумя частями не меньше двух, равночисленны разбиениям n на части $\equiv 1$ или $4 \pmod{5}$ ”. Связи между тождествами Роджерса–Рамануджана и характерами конформных теорий

тодами, в том числе и в их связи с конформной теорией поля [14]–[21]. Полубесконечные конструкции представлений дают, таким образом, теоретико-представленную интерпретацию ряда нетривиальных комбинаторных явлений [22], [1]. Соответствующие формулы для характеров могут быть интерпретированы как результат совместного существования и взаимодействия нескольких сортов частиц⁴⁾. Такие формулы для статсуммы на торе связаны с термодинамическим анзацем Бете [23]–[28] и исследовались также в работах [22], [29]–[31].

В полубесконечных конструкциях пространство представления (строго определяемое как индуктивный предел) порождается *полубесконечными формами*, или произведениями

$$V_{\alpha_1}^{(s_1)} V_{\alpha_2}^{(s_2)} \dots V_{\alpha_n}^{(s_n)} \dots$$

Нижние индексы (“моды”) принимают бесконечное число значений, например $\alpha_i \in \mathbb{Z}$, и, как правило, можно считать, что $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots$. Верхние индексы различают конечное число $(s_1, s_2, \dots \in \{1, 2, \dots, M\})$ “типов” элементов (в простейшем случае все элементы одного типа). При этом требуется, чтобы начиная с некоторого номера ι последовательность $(s_i, \alpha_i)_{i \geq \iota}$ была периодической, т.е. для некоторого ν сдвиг $\alpha_i \mapsto \alpha_i + \nu$ отображал последовательность в себя. Существенным обстоятельством является то, что полубесконечные формы рассматриваются по модулю некоторых отождествлений, роль которых сводится к возможности выразить полубесконечную форму со “слишком тесной” последовательностью (α_i) через линейную комбинацию “более разреженных”.

В известных конструкциях полубесконечного типа элементы $V^{(s)}$ являются или некоторыми вертексными операторами для данной бесконечномерной алгебры, или какими-то токами из алгебры. Так, в полубесконечной конструкции работ [1], [32] для аффинной алгебры $\hat{\mathfrak{a}}$ элементы $V^{(s)}$ – это часть токов со значениями в нильпотентной подалгебре алгебры $\mathfrak{a}$; описание того же пространства в терминах других операторов дано в работе [2], где полубесконечная конструкция является в известном смысле промежуточной между случаями, когда операторы $V^{(s)}$ суть токи в алгебре и когда они вертексные операторы, действующие между различными модулями. Полубесконечные конструкции для $\widehat{sl}(2)$ -модулей, в которых $V^{(s)}$ являются вертексными операторами, возникают [33], [3] из спиновых цепочек Холдейна–Шастри [34], [35] и связанной с ними модели Калоджеро со спином [36]. Соответствующий квазичастичный базис получается как конформный предел (взятый в окрестности антиферромагнитного состояния) пространства состояний модели Холдейна–Шастри, этот предел дает прямую сумму двух интегрируемых $\widehat{sl}(2)$ -представлений уровня 1. Разложение по неприводимым представлениям янгиана приводит к новому базису в представлениях уровня 1. Новый ба-

поля восходят к работам [12], [13].

⁴⁾Стандартная логика здесь такова [5]. Рассмотрим для примера два типа бозонов (“цветов” 1 и 2), тогда в отсутствие взаимодействия между ними их статсумма есть $1/(q)^2_\infty$, что по формуле Дюрфи равно $\sum_{n_1 \geq 0} \sum_{n_2 \geq 0} q^{n_1 + n_2} / (q)_{n_1} (q)_{n_2}$ (мы используем стандартное обозначение, см. ниже (1.5)). “Полубесконечные” формулы для характеров имеют сходный вид, однако в показателе степени в числителе появляется квадратичная форма от $n_1, n_2, \dots$, что и интерпретируется как вид *взаимодействия* между различными типами квазичастиц.

зис записывается с помощью $\widehat{sl}(2)$ -вертексных операторов спина $1/2$, которые в контексте модели Холдейна–Шастри интерпретируются как операторы рождения *спинонных* возбуждений – квазичастиц со спином $1/2$ и с полуцелой статистикой [37], [33], [3], [38]. Заметим, что конформный предел модели Калоджеро со спином и вывод симметрии относительно янгиана в модели Холдейна–Шастри из соответствующей модели Калоджеро опираются на формализм полубесконечных форм [6]. Для фермионных операторов $V_\alpha^{(s)}$ (как, например, в случае $N = 2$ суперконформной алгебры) полубесконечную конструкцию можно рассматривать как обобщение на “взаимодействующие” фермионы infinite-wedge представления, являющегося классическим средством в исследовании целого ряда задач в теории представлений, и не только в ней (см., например, [39]–[41]). “Взаимодействие” здесь понимается не вполне буквально, а в том смысле, что полубесконечные формы рассматриваются по модулю упомянутых выше отождествлений, т.е. удовлетворяют набору соотношений (в результате, в отличие от infinite-wedge конструкции, полубесконечные конструкции дают неприводимые представления или их конечные прямые суммы).

Для построения и анализа полубесконечных пространств используется *фильтрация*, т.е. “аппроксимация” всего пространства некоторыми удобными для изучения подпространствами. Например, одна из таких фильтратов в полубесконечной конструкции работы [1] для вакуумного представления $\widehat{sl}(2)$ -алгебры уровня k составлена конечномерными пространствами $M^+[\iota]$, которые, как векторные пространства, изоморфны $(\iota+1)$ -кратному произведению $\mathbb{C}^{k+1} \otimes \mathbb{C}^{k+1} \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^{k+1}$ [42]. Подобное же наблюдается в методе угловой трансфер-матрицы, пространство состояний которой является полубесконечным тензорным произведением конечномерных пространств, а его “аппроксимация” имеет вид вышеуказанного тензорного произведения. Напомним, что результаты, полученные при исследовании интегрируемых моделей статистической механики, указывают на тесную связь между пространством состояний соответствующей решеточной модели и представлением некоторой бесконечномерной алгебры [43]–[48]. Хотя соответствие не буквально, весьма интересно исследование связи полубесконечных конструкций представлений с точно интегрируемыми моделями статистической механики (для этого требуется q -деформация действия алгебры на полубесконечном пространстве).

Последовательное построение полубесконечных конструкций представлений рассматривается ниже для $N = 2$ супералгебры Вирасоро (суперконформной алгебры) и, отчасти, для аффинной алгебры Ли $\widehat{sl}(2)$. Первая из этих алгебр интересна, в частности, тем, что не является аффинной. Отметим также интерес к $N = 2$ суперсимметрии, возникший именно при исследовании обобщенных тождеств Роджерса–Рамануджана–Гордона–Эндрюса [14], [16]. В полубесконечной реализации строятся унитарные представления этих алгебр (для алгебры $\widehat{sl}(2)$ унитарные представления также характеризуются как интегрируемые [39]). Для унитарных представлений $N = 2$ алгебры эффект “уменьшения числа генераторов” в полубесконечной реализации сводится к тому, что из всех генераторов $N = 2$ алгебры (генераторы Вирасоро $\mathcal{L}_n$ и Гайзенберга $\mathcal{H}_n$ и моды двух фермионных токов $\mathcal{Q}_n$ и $\mathcal{G}_n$, $n \in \mathbb{Z}$) для порождения *всего* модуля требуются толь-

ко моды $\mathcal{G}_n$. Это контринтуитивное утверждение суммировано в теореме 1 (см. ниже).

Пусть $p \geq 3$ – фиксированное целое положительное число, и пусть $\mathbf{G}(p)$ – алгебра, порожденная антикоммутирующими элементами $(\mathcal{G}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ и обратимым оператором $\mathbf{U}$ таким, что $\mathbf{U}\mathcal{G}_n\mathbf{U}^{-1} = \mathcal{G}_{n+1}$, причем $\mathcal{G}_n$ удовлетворяют связям $S_a^p = 0$ ($a \in \mathbb{Z}$), где⁵⁾

$$S_a^p = \sum_{\substack{i_0 < \dots < i_{p-2} \\ i_0 + \dots + i_{p-2} = a}} \left(\prod_{m < n} (i_m - i_n) \right) \mathcal{G}_{i_0} \dots \mathcal{G}_{i_{p-2}}, \quad a \in \mathbb{Z}. \quad (1.1)$$

Основной результат (доказательством которого мы занимаемся начиная с теоремы 3 и заканчивая теоремой 7) состоит в том, что полубесконечные формы от этих грассманово-нечетных элементов $\mathcal{G}_n$, удовлетворяющие условиям $S_a^p = 0$, кодируют (все!) унитарные представления $N = 2$ алгебры с центральным зарядом $3(1 - 2/p)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть W – представление алгебры $\mathbf{G}(p)$, индуцированное из тривиального одномерного представления грассмановой алгебры с генераторами $(\mathcal{G}_n)_{n \geq 0}$ (на вакуумном векторе $|0\rangle$). Пусть r – фиксированное целое число такое, что $1 \leq r \leq p - 1$, и пусть C_r – $\mathbf{G}(p)$ -подмодуль в W , порожденный из вектора $\mathcal{G}_{-r} \dots \mathcal{G}_{-1}|0\rangle$, а $V_{r,p}$ – подмодуль, порожденный из набора векторов

$$\mathcal{G}_{\alpha-p+1} \dots \mathcal{G}_{\alpha-r-1} \mathcal{G}_{\alpha-r+1} \dots \mathcal{G}_{\alpha-1} |\alpha\rangle = |\alpha - p\rangle, \quad \alpha \in \mathbb{Z},$$

где $|\alpha\rangle = \mathbf{U}^\alpha |0\rangle$. Факторпространство $W/(V_{r,p} + C_r)$ является представлением $N = 2$ алгебры с центральным зарядом

$$c = 3 \left(1 - \frac{2}{p} \right) \quad (1.2)$$

и, более того, изоморфно прямой сумме унитарных представлений $N = 2$ алгебры⁶⁾:

$$W(r, p) \equiv \frac{W}{V_{r,p} + C_r} \simeq \bigoplus_{\theta=0}^{p-1} \mathfrak{K}_{r,p;\theta}. \quad (1.3)$$

“Полубесконечность” скрыта здесь в налагаемых (посредством взятия фактора) соотношениях $|\alpha\rangle = \mathcal{G}_{\alpha+1} \dots \mathcal{G}_{\alpha+p-r-1} \mathcal{G}_{\alpha+p-r+1} \dots \mathcal{G}_{\alpha+p-1} |\alpha + p\rangle$, которые можно применять рекуррентно, так что элементы пространства $W(r, p)$ можно рассматривать как полубесконечные формы по $(\mathcal{G}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, удовлетворяющие набору соотношений (наиболее существенные из которых те, что следуют из условия $S_a^p = 0$). Если перейти к характеристам, то получим комбинаторное следствие теоремы 1: взятие характеров представлений, изоморфизм которых установлен в теореме 7 (см. п. 5.6), дает

⁵⁾ Мы рассматриваем только градуированные представления $\mathbf{G}(p)$ вида $W = \bigoplus_{i \geq 0} W_i$, причем $\mathcal{G}_n W_i \subset W_{i-n}$. Хотя выражение S_a^p содержит бесконечные суммы, его действие на представления указанного вида корректно определено; следуя стандартной практике, говоря “алгебра, порожденная элементами $\mathcal{G}_n$ ”, мы подразумеваем, что она включает, в частности, бесконечные комбинации, которые хорошо действуют на градуированные пространства указанного вида.

⁶⁾ Напомним (см. ниже п. 2.2), что унитарные $N = 2$ представления $\mathfrak{K}_{r,p;\theta}$ с центральным зарядом (1.2) занумерованы парой целых чисел (r, θ) таких, что $0 \leq \theta \leq r - 1$ и $1 \leq r \leq p - 1$. Можно считать, что $0 \leq \theta \leq p - 1$, в этом случае представления перечисляются дважды, а суммирование в (1.3) ведется по орбите спектрального потока (см. п. 2.1).

СЛЕДСТВИЕ. При $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq r \leq k+1$ и $0 \leq \theta \leq k+1$ справедливо тождество

$$\sum_{N_1 \geq \dots \geq N_k \in \mathbb{Z}} \frac{z^{\sum_{m=1}^k N_m} q^{\frac{1}{2} \left(\sum_{m=r}^k - \sum_{m=1}^{r-1} \right) N_m - \theta \sum_{m=1}^k N_m + \frac{3}{2} \sum_{m=1}^k N_m^2 + \sum_{1 \leq m < n \leq k} N_m N_n}}{(q)^{N_1 - N_2} (q)^{N_2 - N_3} \dots (q)^{N_{k-1} - N_k} (q)^\infty} =$$

$$= \prod_{\substack{n \geq 1 \\ n \not\equiv \theta, r - \theta \pmod{k+2}}} \frac{1 + zq^n}{1 - q^n} \prod_{\substack{n \geq 1 \\ n \not\equiv \theta, \theta - r \pmod{k+2}}} \frac{1 + z^{-1}q^n}{1 - q^n}. \quad (1.4)$$

Здесь использовано стандартное обозначение

$$(q)_n = (1 - q) \dots (1 - q^n). \quad (1.5)$$

Полезно заметить также, что целочисленный параметр k есть $p - 2$ в терминах параметра из теоремы 1, а по поводу квазичастичной интерпретации левой части (1.4) см. сноску 4.

Хотя изоморфизм (1.3), а следовательно, и тождество (1.4) выводятся из структуры правой части (1.1), связь между (1.1) и (1.3) далеко не очевидна. Поэтому мы подробно описываем применяемые методы построения и доказательств. Интерес к ним определяется еще и тем, что задачи, решаемые нами в процессе построения полубесконечной реализации, типичны для ряда полубесконечных конструкций, а не только для данной (ср. с конструкцией спинного базиса [3]), однако в силу объективных сложностей полубесконечные построения в значительной мере являются областью *в разной степени доказанных* утверждений и правдоподобных гипотез. Решаемые нами задачи укладываются в общую для ряда полубесконечных конструкций схему:

- выбор элементов, которыми порождается пространство, и формулировка системы условий (связей) на них (для $N = 2$ алгебры это фермионы $\mathcal{G}_n$ и условия (1.1));
- подсчет числа состояний, остающихся в каждой градуировке после наложения условий, т.е. нахождение характера (основная сложность здесь состоит именно в учете условий, т.е. в работе с *несвободно*-порожденным пространством);
- построение подходящего – *мономиального* – базиса в полубесконечном пространстве, как правило путем некоторого “прореживания” (заметим, что на множестве *всех* полубесконечных форм имеются линейные зависимости в силу наложенных связей)⁷⁾;
- определение действия алгебры на полубесконечных формах, построенных из элементов, удовлетворяющих выбранным условиям (очевидная сложность возникает, когда, как в нашей конструкции, полубесконечные формы, составленные из мод “малого” числа токов, должны нести представление *всей* алгебры);

⁷⁾ Этот пункт является в действительности более фундаментальным, чем это может представляться с первого взгляда, поскольку существование любого мономиального базиса, само по себе не очевидное, коль скоро оно установлено, оказывается мощным средством при анализе пространств, подобных полубесконечным, которые не являются свободно-порожденными. Существование мономиального базиса определяется некоторыми тонкими свойствами налагаемых связей (для $N = 2$ алгебры это условия $S_a^p = 0$ и (1.1)) и позволяет контролировать свойства отображений между различными подпространствами полубесконечного пространства.

- разложение полубесконечного пространства в (прямую, если удастся) сумму представлений основной алгебры;
- поиск представлений каких-либо других алгебраических структур на подпространствах полубесконечного пространства.

Реализация подобной программы (из которой мы в данной работе не рассматриваем последний пункт) требует комбинации различных средств. Опишем их более детально применительно к $N = 2$ суперконформной алгебре, в основном следуя содержанию работы, хотя и в последовательности, несколько отличающейся от порядка разделов.

Индуктивный предел (п. 3.1). Полубесконечное пространство $W_{r,p;\theta}$, которое оказывается изоморфным унитарному $N = 2$ представлению $\mathfrak{K}_{r,p;\theta}$, определяется как индуктивный предел пространств $W_{r,p;\theta}(\iota)$, порожденных при возрастающих ι из все более и более твистованных состояний старшего веса, а именно из таких состояний, по отношению к которым все большая часть генераторов $\mathcal{G}_n$ становится операторами рождения при $\iota \rightarrow \infty$, тогда как “только” генераторы $(\mathcal{G}_n)_{n \geq \iota p + \theta}$ остаются операторами уничтожения.

Двойственное пространство (п. 4.1). Для изучения индуктивного предела ключевым оказывается двойственное пространство, реализуемое с помощью “многочленов от бесконечного числа переменных” (более точно, полиномиальных дифференциальных форм) [1]. Двойственным к факторпространству (1.3) является подпространство многочленов, удовлетворяющих определенным условиям на $(p - 1)$ -кратных диагоналях $x_1 = \dots = x_{p-1}$ и в нуле. Конкретно, исследуется пространство

$$W_{r,p;0}(0)^* \subset \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}[x] dx \oplus \mathbb{C}\langle x_1, x_2 \rangle dx_1 dx_2 \oplus \mathbb{C}\langle x_1, x_2, x_3 \rangle dx_1 dx_2 dx_3 \oplus \dots,$$

где $\mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ – кососимметрические многочлены от n переменных, а пространство $W_{r,p;0}(0)^*$ задается условиями обращения в нуль на кратных диагоналях и в нуле. Характер этого пространства удастся вычислить, вводя на каждом $\mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ фильтрацию, индуцированную лексикографическим порядком на разбиениях числа n .

Характеры (п. 4.2). Сумма по разбиениям дает формулу типа Роджерса–Рамануджана–Гордона–Эндрюса для характера пространства $W_{r,p;0}(0)$, а после применения автоморфизмов $N = 2$ -алгебры – и для всех пространств $W_{r,p;\theta}(\iota)$, $\iota \in \mathbb{Z}$, участвующих в построении индуктивного предела. Замечательное свойство этих формул для характера состоит в том, что они допускают предел при $\iota \rightarrow \infty$. Такой предел является кандидатом на характер полубесконечного пространства $W_{r,p;\theta} = \lim_{\iota \rightarrow \infty} W_{r,p;\theta}(\iota)$, но доказательство того, что он именно им и является, требует установления того факта, что все используемые при построении индуктивного предела отображения $W_{r,p;\theta}(\iota) \rightarrow W_{r,p;\theta}(\iota + 1)$ суть вложения (а потому предел характеров равен характеру индуктивного предела).

Разреженный базис (п. 3.2). Упомянутый факт относительно вложения следует из существования замечательного мономиального базиса, составленного из состояний, в которых моды $\mathcal{G}_n$ “разрежены” в соответствии с процедурой, описанной в приводимой ни-

же теореме 2. Последовательностью *чисел заполнения*, ассоциированной с полубесконечной формой $\mathcal{G}_{i_1} \dots \mathcal{G}_{i_n} \dots$ ($i_1 < \dots < i_n < \dots$), будем называть последовательность $(\gamma(n))$ из элементов, занумерованных целыми числами $n \geq i_1$, которые равны нулю во всех случаях, за исключением $\gamma(i_1) = \gamma(i_2) = \dots = 1$. Конструкцию специального мономиального базиса, называемого *разреженным базисом*, дает следующая теорема (эквивалентное утверждение доказывается в лемме 1 (см. п. 3.2)).

ТЕОРЕМА 2. *В пространстве $W_{r,p;\theta}$ существует базис, элементы которого являются полубесконечными формами $\mathcal{G}_{i_1} \mathcal{G}_{i_2} \dots$, удовлетворяющими следующим условиям:*

1. *Для всякого n выполняется $i_{n+p-2} - i_n \geq p$ (тем самым любой отрезок $[n, n+p-1] \subset \mathbb{Z}$ длины p может нести не более $p-2$ ненулевых чисел заполнения).*
2. *При $n \gg 1$ последовательность чисел заполнения $\gamma(n)$ периодична с периодом p и ровно $p-2$ значениями 1 на периоде и имеет вид*

$$\underbrace{1, \dots, 1, 0}_{r-1}, \underbrace{1, \dots, 1, 0}_{p-r-1}, \dots, \underbrace{1, \dots, 1, 0}_{r-1}, \underbrace{1, \dots, 1, 0}_{p-r-1}, \dots$$

Решетка, кресты и рекурсия (п. 4.3). Конструкция разреженного базиса соответствует модельной статистической системе на полубесконечной одномерной решетке. Каждую полубесконечную форму $\mathcal{G}_{i_1} \dots \mathcal{G}_{i_n} \dots$ можно представить конфигурацией крестов на решетке, например

$$\times \quad \circ \quad \times \quad \times \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \times \quad \circ \quad \circ \quad \times \quad \dots \quad (1.6)$$

(узел с крестом соответствует числу заполнения 1, а остальные — нулю). “Перечисление” элементов разреженного базиса становится тогда задачей о нахождении статсуммы всех конфигураций, в которых *любые p последовательных узлов решетки несут не более $p-2$ крестов*. Такие статсуммы можно анализировать, используя вариант так называемого метода Эндрюса–Шура, состоящего в установлении рекуррентных соотношений и в последующем переходе к пределу при стремящемся к бесконечности “парамetre финитизации”. Таким образом, удастся показать, что полубесконечные формы описанного в теореме 2 вида действительно составляют базис в полубесконечном пространстве.

Действие алгебры на полубесконечном пространстве (раздел 5). Можно непосредственно показать, что найденные характеры полубесконечных пространств $W_{r,p;\theta}$ совпадают с характерами соответствующих унитарных $N = 2$ представлений $\mathfrak{K}_{r,p;\theta}$; тогда из имеющегося отображения $W_{r,p;\theta} \rightarrow \mathfrak{K}_{r,p;\theta}$ несложно вывести, что $W_{r,p;\theta}$ в действительности изоморфно $\mathfrak{K}_{r,p;\theta}$, откуда, в свою очередь, следует существование действия $N = 2$ алгебры на $W_{r,p;\theta}$. Впрочем, явный вид этого действия остается в таком случае неизвестным. Мы выбираем более “концептуальный” подход и непосредственно строим $N = 2$ действие на полубесконечном пространстве $W_{r,p;\theta}$. В определении полубесконечного пространства нет указаний на то, что оно несет действие генераторов $\mathcal{Q}_n, \mathcal{L}_n$

и $\mathcal{H}_n$ при $n \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющих алгебре (2.1), существование такого действия чрезвычайно чувствительно к виду налагаемых связей $S_a^p = 0$. Развиваемые нами методы построения действия должны быть полезны при исследовании других полубесконечных пространств, для которых связи другого вида могут оказаться совместимыми с действием некоторой алгебры. Эти методы таковы:

А. Положительная фильтрация (п. 5.1). При построении действия $N = 2$ алгебры на полубесконечном пространстве используется некая фильтрация пространства $W_{r,p;\theta}$ конечномерными пространствами, называемая *положительной фильтрацией*. Для аффинных алгебр аналогичные подпространства известны как *модули Демазюра* и изучались с различных точек зрения (см. [49]–[51] и цитированные там работы).

Б. Дифференциальные операторы (п. 5.2). На конечномерных подпространствах можно построить действие части генераторов $N = 2$ алгебры с помощью дифференциальных операторов (от конечного числа грассмановых переменных $\mathcal{G}_n$, $0 \leq n \leq N$). Точнее, дифференциальные операторы а priori действуют на свободно-порожденном пространстве, поэтому следует показать, что их действие согласовано со взятием фактора по соотношениям, индуцируемым на подпространстве основными условиями (1.1).

В. Двойственная картина (п. 5.3). Чтобы убедиться в согласованности действия дифференциальных операторов с соотношениями (1.1), мы снова применяем функциональную реализацию. Операторы, двойственные к дифференциальным, принимают вид дифференциалов “гомологического типа” на многочленах, и подлежащие доказательству утверждения заметно упрощаются.

Г. Склейка действия из частей (п. 5.4). Действие $N = 2$ генератора на векторе из полубесконечного пространства не должно зависеть от того, элементом какого из членов фильтрации считается данный вектор. Мы доказываем это, а также независимость построенного действия от какого бы то ни было произвола в построениях. В действительности строится действие только части $N = 2$ генераторов, *порождающих всю алгебру*, и мы также доказываем, что построенные генераторы порождают именно $N = 2$ суперконформную алгебру.

Д. Изоморфизм с унитарным представлением (п. 5.6). Как только установлено, что полубесконечное пространство $W_{r,p;\theta}$ является модулем над $N = 2$ алгеброй, несложно убедиться, что отображение $W_{r,p;\theta} \rightarrow \mathcal{K}_{r,p;\theta}$ в унитарное представление есть изоморфизм $N = 2$ модулей, чем и завершается построение полубесконечной конструкции.

Полубесконечная конструкция унитарных $N = 2$ модулей тесно связана с аналогичной конструкцией унитарных $\widehat{s\ell}(2)$ -модулей [1]. В частности, метод, применяемый для построения действия $N = 2$ алгебры на полубесконечном пространстве, позволяет определить и действие $\widehat{s\ell}(2)$ -алгебры на соответствующем полубесконечном пространстве, где для этого используются в точности модули Демазюра (п. 5.5). Другие рассматриваемые связи между $\widehat{s\ell}(2)$ - и $N = 2$ структурами относятся к соотношению между модулярными функторами [32], а также к комбинаторному построению базисов в “демазюровских” подпространствах. Это построение (п. 6.1) основано на комбинаторной

структуре модулей Демазюра (ср. [49]–[51]), соответствующие характеры связаны также с обобщенными треугольниками Паскаля [14] и с суперномиальными коэффициентами [52].

Из-за того что в полубесконечной конструкции представление порождается только частью токов, она позволяет, в частности, более явно описать *модулярный функтор* (см. п. 6.2), а именно отождествить пространство, двойственное к коинвариантам, с пространством мероморфных функций на произведениях римановых поверхностей с отмеченными точками, где от функций требуется определенное поведение на кратных диагоналях (что отражает основные соотношения $S_a^p = 0$) и в выделенных точках. В некоторых случаях размерности этих функциональных пространств можно вычислить непосредственно, а на произведениях $\mathbb{CP}^1$ эти размерности следуют из правил слияния для $N = 2$ алгебры (п. 6.3). Унитарные $N = 2$ правила слияния были получены ранее из гипотезы Верлинде [53], но мы дадим независимый вывод, основанный на применении к правилам слияния для $\widehat{sl}(2)$ -алгебры функтора, осуществляющего эквивалентность категорий [54], [55]⁸⁾. Соответствие между $\widehat{sl}(2)$ - и $N = 2$ алгебрами слияния можно рассматривать как частный случай более общего соответствия между $\widehat{sl}(2)$ - и $N = 2$ модулярными функторами, которое обобщает эквивалентность категорий представлений (см. п. 2.3).

2. $N = 2$ АЛГЕБРА

В этом разделе мы напомним основные факты о $N = 2$ суперконформной алгебре и дадим мотивировку полубесконечной конструкции. При желании читатель может перейти сразу к п. 2.4, рассматривая п. 2.1, 2.2 и (частично) 2.3 как справочные.

2.1. $N = 2$ алгебра и спектральный поток. $N = 2$ суперконформная алгебра порождается бозонными операторами $\mathcal{L}_n$ (генераторы алгебры Вирасоро) и $\mathcal{H}_n$ и фермионными генераторами $\mathcal{G}_n$ и $\mathcal{Q}_n$. Мы рассматриваем алгебру в базисе, где ненулевые коммутационные соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}_m, \mathcal{L}_n] &= (m - n)\mathcal{L}_{m+n}, & [\mathcal{H}_m, \mathcal{H}_n] &= \frac{c}{3}m\delta_{m+n,0}, \\ [\mathcal{L}_m, \mathcal{G}_n] &= (m - n)\mathcal{G}_{m+n}, & [\mathcal{H}_m, \mathcal{G}_n] &= \mathcal{G}_{m+n}, \\ [\mathcal{L}_m, \mathcal{Q}_n] &= -n\mathcal{Q}_{m+n}, & [\mathcal{H}_m, \mathcal{Q}_n] &= -\mathcal{Q}_{m+n}, \\ [\mathcal{L}_m, \mathcal{H}_n] &= -n\mathcal{H}_{m+n} + \frac{c}{6}(m^2 + m)\delta_{m+n,0}, & & \\ [\mathcal{G}_m, \mathcal{Q}_n] &= 2\mathcal{L}_{m+n} - 2n\mathcal{H}_{m+n} + \frac{c}{3}(m^2 + m)\delta_{m+n,0}, & & \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $m, n \in \mathbb{Z}$ и скобки $[\cdot, \cdot]$ обозначают суперкоммутатор. Центральный заряд $c \neq 3$ удобно параметризовать как $c = 3(1 - 2/p)$ при $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

⁸⁾Эта эквивалентность имеет место “по модулю” спектральных потоков, и именно поэтому алгебры слияния для $\widehat{sl}(2)$ - и $N = 2$ теорий не совпадают, но тем не менее имеющееся утверждение об эквивалентности оказывается достаточным для того, чтобы *вывести* $N = 2$ алгебру слияния из соответствующей $\widehat{sl}(2)$ -алгебры.

Среди автоморфизмов алгебры имеется группа $\mathbb{Z}$ автоморфизмов U_θ , $\theta \in \mathbb{Z}$, называемых спектральным потоком [56]. В базисе, выбранном в (2.1), спектральный поток действует как

$$U_\theta : \begin{aligned} \mathcal{L}_n &\mapsto \mathcal{L}_n + \theta \mathcal{H}_n + \frac{c}{6}(\theta^2 + \theta)\delta_{n,0}, & \mathcal{H}_n &\mapsto \mathcal{H}_n + \frac{c}{3}\theta\delta_{n,0}, \\ \mathcal{Q}_n &\mapsto \mathcal{Q}_{n-\theta}, & \mathcal{G}_n &\mapsto \mathcal{G}_{n+\theta}, \end{aligned} \quad \theta \in \mathbb{Z}. \quad (2.2)$$

При действии спектрального потока на $N = 2$ модули получаются, вообще говоря, неизоморфные представления. Модули, преобразованные спектральным потоком, называются *твистованными* модулями. Мы используем обозначение $\mathfrak{D}_{\bullet, \theta} = U_\theta \mathfrak{D}_{\bullet}$, которое будет применяться к модулям, несущим другие метки, например $\mathfrak{K}_{r,p;\theta} = U_\theta \mathfrak{K}_{r,p}$ для рассматриваемых ниже унитарных представлений. Параметр θ будет называться твистом. Мы опускаем нулевой твист в обозначениях.

Характер $N = 2$ модуля $\mathfrak{D}$ определяется как

$$\omega_{\mathfrak{D}}(z, q) = \text{Tr}_{\mathfrak{D}}(z^{\mathcal{H}_0} q^{\mathcal{L}_0}), \quad (2.3)$$

где взятие следа по пространству $\mathfrak{D}$ подразумевает полуторалинейную форму [57], которая приведена в работе [55] в наших обозначениях. Под действием спектрального потока характеры преобразуются следующим образом:

$$\omega_{U_\theta \mathfrak{D}}(z, q) = z^{-\frac{c}{3}\theta} q^{\frac{c}{6}(\theta^2 - \theta)} \omega_{\mathfrak{D}}(z q^{-\theta}, q). \quad (2.4)$$

Мы определяем *твистованный вектор старшего веса* $|h, p; \theta\rangle$ как состояние, удовлетворяющее условиям уничтожения

$$\mathcal{Q}_{-\theta+m}|h, p; \theta\rangle = \mathcal{G}_{\theta+m}|h, p; \theta\rangle = \mathcal{L}_{m+1}|h, p; \theta\rangle = \mathcal{H}_{m+1}|h, p; \theta\rangle = 0, \quad m \in \mathbb{N}_0, \quad (2.5)$$

а также условиям

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{H}_0 + \frac{c}{3}\theta\right)|h, p; \theta\rangle &= h|h, p; \theta\rangle, \\ \left(\mathcal{L}_0 + \theta\mathcal{H}_0 + \frac{c}{6}(\theta^2 + \theta)\right)|h, p; \theta\rangle &= 0, \end{aligned}$$

где второе равенство следует из условий уничтожения.

Забегая вперед, заметим, что в полубесконечной конструкции определяются твистованные состояния, на которых, однако, определено действие только операторов $\mathcal{G}_n$, которые обращаются в нуль так же, как на соответствующих состояниях из унитарного модуля, действие же остальных генераторов должно быть реконструировано (таким образом, чтобы оказались выполнены все соотношения, имеющие место в унитарном модуле).

2.2. Унитарные представления $N = 2$ алгебры [55]. Унитарные $N = 2$ представления [57] периодичны с периодом p по спектральному потоку, т.е. спектральный поток U_p дает изоморфное представление:

$$\mathfrak{K}_{r,p;\theta+p} \approx \mathfrak{K}_{r,p;\theta}, \quad (2.6)$$

поэтому для унитарных представлений параметр твиста θ можно рассматривать по модулю p . Более того, при заданном p имеются только $p(p-1)/2$ неизоморфных унитарных представлений $\mathfrak{K}_{r,p;\theta}$, которые можно занумеровать с помощью $0 \leq \theta \leq r-1$ и $1 \leq r \leq p-1$, поскольку имеются *изоморфизмы $N = 2$ модулей*

$$\mathfrak{K}_{r,p;\theta+r} \approx \mathfrak{K}_{p-r,p;\theta}, \quad 1 \leq r \leq p-1, \quad \theta \in \mathbb{Z}_p. \quad (2.7)$$

Представления с нулевым твистом будут обозначаться для краткости $\mathfrak{K}_{r,p} \equiv \mathfrak{K}_{r,p;0}$.

Характеры $\omega_{r,p;\theta}^{\mathfrak{K}} \equiv \omega_{\mathfrak{K}_{r,p;\theta}}$ унитарных $N = 2$ представлений $\mathfrak{K}_{r,p;\theta}$ в обозначениях [55] (см. также [58]–[60]) имеют вид

$$\omega_{r,p;\theta}^{\mathfrak{K}}(z, q) = z^{\frac{2\theta-r+1}{p}-1} q^{\frac{\theta-r-\theta^2}{p}+\theta} \frac{\eta(q^p)^3}{\eta(q)^3} \frac{\vartheta_{1,0}(z, q) \vartheta_{1,1}(q^r, q^p)}{\vartheta_{1,0}(zq^{-\theta}, q^p) \vartheta_{1,0}(zq^{r-\theta}, q^p)}, \quad (2.8)$$

$$1 \leq r \leq p-1, \quad 0 \leq \theta \leq r-1,$$

где введены тэта-функции

$$\begin{aligned} \vartheta_{1,1}(z, q) &= q^{\frac{1}{8}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} (-1)^m q^{\frac{1}{2}(m^2-m)} z^{-m} = \\ &= q^{\frac{1}{8}} \prod_{m \geq 0} (1 - z^{-1} q^m) \prod_{m \geq 1} (1 - zq^m) \prod_{m \geq 1} (1 - q^m), \\ \vartheta_{1,0}(z, q) &= q^{\frac{1}{8}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} q^{\frac{1}{2}(m^2-m)} z^{-m} = \\ &= q^{\frac{1}{8}} \prod_{m \geq 0} (1 + z^{-1} q^m) \prod_{m \geq 1} (1 + zq^m) \prod_{m \geq 1} (1 - q^m). \end{aligned}$$

Эти характеры (в которых для простоты можно положить $\theta = 0$, поскольку поведение характеров при преобразованиях спектрального потока определяется формулой (2.4)) можно также разложить по тэта-функциям $\vartheta_{1,0}(\cdot, q^{p(p-2)})$ как

$$\begin{aligned} \omega_{r,p}^{\mathfrak{K}}(z, q) &= z^{\frac{1+2\theta-r}{p}-\theta} q^{\frac{1}{2}(1-\frac{2}{p})(\theta^2-\theta)-\frac{1-r}{p}\theta-\frac{p(p-2)}{8}} \times \\ &\times \sum_{a=0}^{p-3} z^a q^{\frac{1}{2}(a^2-(2\theta+1)a)} \vartheta_{1,0}(z^{p-2} q^{pa-(r-1)-(p-2)\theta-\frac{(p-1)(p-2)}{2}}, q^{p(p-2)}) C_{r,p}^a(q), \quad (2.9) \end{aligned}$$

где *струнные функции* $C_{r,p}^a(q)$ зависят только от q .

2.3. Эквивалентность категорий и связанные вопросы. Линейная комбинация унитарных $N = 2$ характеров, составляющих орбиту спектрального потока, дает характеры $\chi_{r,k}^{\mathfrak{L}}$ унитарных $\widehat{sl}(2)_k$ -представлений $\mathfrak{L}_{r,k}$

$$\begin{aligned} \chi_{r,p-2}^{\mathfrak{L}}(z, q) \vartheta_{1,0}(zy, q) &= q^{\frac{r^2-1}{4p} - \frac{p}{4} + \frac{1}{8}} y^{\frac{r-1}{p}} z^{\frac{r-1}{2}} \times \\ &\times \sum_{a=0}^{p-1} \omega_{r,p}^{\mathfrak{K}}(yq^{-a}, q) y^{-a} z^{-a} q^{\frac{a^2-a}{2} - \frac{r-1}{p}a} \vartheta_{1,0}(z^p y^2 q^{-p+r-2a}, q^{2p}). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Такое равенство следует из изоморфизма $N = 2$ модулей [54], [55]

$$\mathfrak{L}_{r,k} \otimes \Omega \approx \bigoplus_{\theta=0}^{k+1} \mathfrak{K}_{r,k+2;\theta} \otimes \left(\bigoplus_{\nu \in \sqrt{2(k+2)}\mathbb{Z}} \mathcal{H}_a^+ \sqrt{\frac{2}{k+2}} \left(\frac{r-1}{2} - \theta \right) - \nu \right), \quad (2.11)$$

где Ω – модуль над свободными фермионами, а $\mathcal{H}_a^+$ – пространства Фока (причем сумма по решетке $\sqrt{2(k+2)}\mathbb{Z}$ определяет алгебру вертексных операторов). Равенство (2.11) позволяет установить функториальное соответствие

$$\mathfrak{L}_{r,k;\bullet} \rightsquigarrow \mathfrak{K}_{r,k+2;\bullet} \quad (2.12)$$

между орбитами спектральных потоков каждой из алгебр. Оно является эквивалентностью между категориями, объекты которых суть орбиты спектральных потоков [54]. Другими словами, это эквивалентность категорий представлений алгебр, полученных присоединением оператора спектрального потока к универсальной обертывающей алгебре (соответственно $\widehat{sl}(2)$ - и $N = 2$ алгебр).

Развивая тему эквивалентности категорий, опишем соответствие между модулярными функторами для $\widehat{sl}(2)$ - и $N = 2$ теорий. Такое соответствие интересно, в частности, потому, что $\widehat{sl}(2)$ -модулярный функтор имеет хорошо известную геометрическую интерпретацию в терминах пространства модулей SL_2 -векторных расслоений, тогда как для $N = 2$ модулярного функтора никакой априорной геометрической интерпретации не известно.

Для выбранной римановой поверхности $\mathcal{E}$ модулярный функтор $\text{MOD}_{\widehat{sl}(2)}(k, \mathcal{E})$ $\widehat{sl}(2)$ -теории Весса–Зумино–Виттена уровня k и модулярный функтор $\text{MOD}_{N=2}(p, \mathcal{E})$ теории, основанной на $N = 2$ алгебре с центральным зарядом (1.2), связаны как

$$\text{MOD}_{N=2}(p, \mathcal{E}) = \text{Coinv}_{H^1(\mathcal{E}, \mathbb{Z}_2)/V_+} \left(\text{Inv } V_+ \left(\text{MOD}_{\widehat{sl}(2)}(p-2, \mathcal{E}) \otimes \text{MOD}_{\text{free}}(p, \mathcal{E}) \right) \right). \quad (2.13)$$

Здесь $\text{MOD}_{\text{free}}(p, \mathcal{E})$ – модулярный функтор свободной теории, алгебра вертексных операторов которой ассоциирована с решеткой $\sqrt{2p}\mathbb{Z}$ (см. (2.11)), а $\widehat{sl}(2)$ -модулярный функтор $\text{MOD}_{\widehat{sl}(2)}(k, \mathcal{E})$ несет проективное действие $\mathcal{O}(\cdot)$ группы $H^1(\mathcal{E}, \mathbb{Z}_2)$, при котором $\mathcal{O}(\alpha\beta) = \mathcal{O}(\alpha)\mathcal{O}(\beta)(-1)^{k\langle\alpha,\beta\rangle}$ для циклов α и β с формой пересечения $\langle\alpha, \beta\rangle$, другими словами, имеется действие группы Гайзенберга Γ с центром $\mathbb{Z}_2$, при котором $\Gamma/\mathbb{Z}_2 =$

$H^1(\mathcal{E}, \mathbb{Z}_2)$. Модулярный функтор свободной теории, который является пространством тэта-функций уровня $2p$ на якобиане поверхности $\mathcal{E}$, есть неприводимое представление группы Гайзенберга, получаемое центральным расширением $H^1(\mathcal{E}, \mathbb{Z}_{2p}) \simeq \mathbb{Z}_{2p}^{2g}$ с помощью $\mathbb{Z}_{2p}$, где g – род $\mathcal{E}$. Он тем самым оказывается проективным представлением подгруппы $H^1(\mathcal{E}, \mathbb{Z}_2) \subset H^1(\mathcal{E}, \mathbb{Z}_{2p})$ (вложение которой индуцировано посредством $\mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_{2p}$). Отсюда следует, что группа Γ действует на тензорном произведении $\text{MOD}_{\widehat{sl}(2)}(p-2, \mathcal{E}) \otimes \text{MOD}_{\text{free}}(p, \mathcal{E})$. Более того, центр при этом действует тривиально, так что тензорное произведение становится представлением группы $H^1(\mathcal{E}, \mathbb{Z}_2)$. В этой группе, которая изоморфна $\mathbb{Z}_2^{2g}$, следует выбрать максимальное $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -изотропное подпространство V_+ и взять *инварианты* по отношению к V_+ в тензорном произведении. На инвариантах определено действие фактора $\mathbb{Z}_2^{2g}/V_+$, и далее следует взять *коварианты* по отношению к этому действию. Тем самым описаны все обозначения, используемые в (2.13).

2.4. Мотивировка полубесконечной конструкции. Выбор полубесконечной конструкции унитарных представлений $N = 2$ алгебры подсказывается следующими наблюдениями. В вакуумном представлении рассмотрим условие отщепления сингулярного вектора $\mathcal{Q}_{1-p}\mathcal{Q}_{2-p}\dots\mathcal{Q}_{-1}|0, p; 0\rangle$. Отвечающее этому вектору поле

$$\partial^{p-2}\mathcal{Q}(z)\dots\partial\mathcal{Q}(z)\mathcal{Q}(z)$$

($\partial = \partial/\partial z$ и $\mathcal{Q}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{Q}_n z^{-n-1}$) имеет нулевые корреляционные функции со всеми полями из соответствующей “минимальной” модели (ср. [61]). Поэтому в унитарных представлениях выполнено тождество $\partial^{p-2}\mathcal{Q}(z)\dots\partial\mathcal{Q}(z)\mathcal{Q}(z) = 0$, которое является “операторным” в том смысле, что оно выполняется при действии на любой вектор любого унитарного представления. Аналогичным образом выполнено и “симметричное” соотношение $\partial^{p-2}\mathcal{G}(z)\dots\partial\mathcal{G}(z)\mathcal{G}(z) = 0$ для $\mathcal{G}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{G}_n z^{-n-2}$. В качестве отправной точки для построения полубесконечной конструкции можно выбрать любое из этих соотношений. Удивительно, что этого оказывается достаточно для восстановления всего представления. Мы выбрали $\mathcal{G}$ -соотношения (что является вопросом соглашения и/или применения автоморфизмов $N = 2$ алгебры). Таким образом, определим

$$S^p(z) = \partial^{p-2}\mathcal{G}(z)\dots\partial\mathcal{G}(z)\mathcal{G}(z), \quad \mathcal{G}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{G}_n z^{-n-2}, \quad (2.14)$$

и перепишем условия $S^p(z) = 0$ в терминах мод $\mathcal{G}_n$ как $S_a^p = 0$ (см. (1.1)). Например, при $p = 3$ несколько первых соотношений, выполненных на вакуумном векторе, имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{-2}\mathcal{G}_{-1} &= 0, & \mathcal{G}_{-3}\mathcal{G}_{-1} &= 0, & 3\mathcal{G}_{-4}\mathcal{G}_{-1} + \mathcal{G}_{-3}\mathcal{G}_{-2} &= 0, \\ 4\mathcal{G}_{-5}\mathcal{G}_{-1} + 2\mathcal{G}_{-4}\mathcal{G}_{-2} &= 0, & 5\mathcal{G}_{-6}\mathcal{G}_{-1} + 3\mathcal{G}_{-5}\mathcal{G}_{-2} + \mathcal{G}_{-4}\mathcal{G}_{-3} &= 0, & \dots \end{aligned} \quad (2.15)$$

Кроме того, для вектора старшего веса $|r, p; \theta\rangle_{\text{irr}}$ в выбранном унитарном представлении $\mathfrak{K}_{r,p,\theta}$ имеем еще одно условие обращения в нуль: $\mathcal{G}_{\theta-r}\dots\mathcal{G}_{\theta-1}|r, p; \theta\rangle_{\text{irr}} = 0$, что является условием отщепления (другого) сингулярного вектора. Далее, состояние

$\mathcal{G}_{\theta-p+1} \cdots \mathcal{G}_{\theta-r-1} \mathcal{G}_{\theta-r+1} \cdots \mathcal{G}_{\theta-1} |r, p; \theta\rangle_{\text{irr}}$ удовлетворяет твистованным топологическим условиям старшего веса (2.5) с твистом $\vartheta = \theta - p$. Действуя на него операторами $\mathcal{G}_{-p+\theta-p+1} \cdots \mathcal{G}_{-p+\theta-r-1} \mathcal{G}_{-p+\theta-r+1} \cdots \mathcal{G}_{-p+\theta-1}$, снова получим твистованное топологическое состояние старшего веса с твистом $\vartheta = \theta - 2p$ и т.д. Действуя модами $\mathcal{Q}$ на $|r, p; \theta\rangle_{\text{irr}}$, аналогичным образом получим твистованные топологические состояния старшего веса с твистами $\theta + p, \theta + 2p, \dots$. Занумеруем эти *экстремальные состояния* как $|r, p; \theta|_{\iota}\rangle$, где число $\iota \in \mathbb{Z}$ определяет твист как $\vartheta = \theta + \iota p$. В явном виде координаты заряд–уровень для состояний $|r, p; \theta|_{\iota}\rangle$ определяются из соотношений

$$\mathcal{L}_0 |r, p; \theta|_{\iota}\rangle = \left(\theta \frac{r-1}{p} + \frac{1}{2} \frac{p-2}{p} (\theta^2 - \theta) - \iota \frac{p}{2} + \iota^2 \frac{p(p-2)}{2} + \iota r + \iota(p-2)\theta \right) |r, p; \theta|_{\iota}\rangle, \quad (2.16)$$

$$\mathcal{H}_0 |r, p; \theta|_{\iota}\rangle = \left(-\frac{r-1}{p} - \frac{p-2}{p} \theta - (p-2)\iota \right) |r, p; \theta|_{\iota}\rangle. \quad (2.17)$$

Эти состояния удовлетворяют, в частности, равенствам

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_n |r, p; \theta|_{\iota}\rangle &= 0 \quad \text{при } n \geq \iota p + \theta, \\ \mathcal{G}_{\iota p + \theta - r} \cdots \mathcal{G}_{\iota p + \theta - 1} |r, p; \theta|_{\iota}\rangle &= 0, \\ \mathcal{G}_{\iota p + \theta - p + 1} \cdots \mathcal{G}_{\iota p + \theta - r - 1} \mathcal{G}_{\iota p + \theta - r + 1} \cdots \mathcal{G}_{\iota p + \theta - 1} |r, p; \theta|_{\iota}\rangle &= |r, p; \theta|_{\iota-1}\rangle, \end{aligned} \quad (2.18)$$

где $\iota \in \mathbb{Z}$. В координатах заряд–уровень на плоскости изобразим состояния $\dots \mathcal{G}_{-3} \mathcal{G}_{-2} \times \mathcal{G}_{-1} |r, p; 0|0\rangle$ стрелками (см. рис. 1) или несколько более схематично – заменяя несколько последовательных стрелок отрезками парабол; состояния (2.18) являются тогда *изломами*, соединяющими отрезки парабол (половина изломов соответствуют пропущенной в (2.18) моде $\mathcal{G}_{\iota p + \theta - r}$, а вторая половина – состояниям $|r, p; \theta|_{\iota}\rangle$).

Рис. 1. Экстремальная диаграмма унитарного $N = 2$ модуля.

Идея, лежащая в основе полубесконечной конструкции, состоит в том, чтобы “породить модуль из состояния $|r, p; \infty\rangle$ ”, находящегося бесконечно далеко внизу справа на рис. 1, причем только модами $\mathcal{G}_n$, и сводится к введению полубесконечных форм от фермионных операторов $(\mathcal{G}_i)_{i \in \mathbb{Z}}$. Мы увидим, что всякое унитарное представление $\mathfrak{K}_{r,p;\theta}$ можно реализовать таким полубесконечным образом.

3. ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЕ ПРОСТРАНСТВО $W_{r,p;\theta}$

Фиксируем целое число $p \geq 3$, а также r и θ такие, что $1 \leq r \leq p-1$ и $0 \leq \theta \leq r-1$. Пусть $\mathfrak{g}(p)$ обозначает фактор грасмановой алгебры операторов $\mathcal{G}_n$, $n \in \mathbb{Z}$, по идеалу $\mathcal{S}^p$, порожденному элементами $(S_a^p)_{a \in \mathbb{Z}}$ (1.1) (позднее мы отождествим $\mathcal{G}_n$ с соответствующими $N = 2$ генераторами).

3.1. Индуктивный предел. Полубесконечное пространство $W_{r,p;\theta}$ линейно порождено многочленами от $\mathcal{G}_n \in \mathfrak{g}(p)$, $n \in \mathbb{Z}$, действующими на состояния

$$(|r, p; \theta|_{\iota}\rangle_{\infty/2})_{\iota \in \mathbb{Z}}, \quad (3.1)$$

для которых

$$\mathcal{G}_n |r, p; \theta|_{\iota}\rangle_{\infty/2} = 0, \quad n \geq \iota p + \theta, \quad (3.2)$$

$$\mathcal{G}_{\iota p + \theta - r} \dots \mathcal{G}_{\iota p + \theta - 1} |r, p; \theta|_{\iota}\rangle_{\infty/2} = 0, \quad (3.3)$$

$$\mathcal{G}_{\iota p + \theta - p + 1} \dots \mathcal{G}_{\iota p + \theta - r - 1} \mathcal{G}_{\iota p + \theta - r + 1} \dots \mathcal{G}_{\iota p + \theta - 1} |r, p; \theta|_{\iota}\rangle_{\infty/2} = |r, p; \theta|_{\iota - 1}\rangle_{\infty/2}. \quad (3.4)$$

Таким образом, $W_{r,p;\theta}$ является линейной оболочкой состояний вида $\mathcal{G}_{i_1} \mathcal{G}_{i_2} \dots \mathcal{G}_{i_m} \times |r, p; \theta|_{\iota}\rangle_{\infty/2}$, рассматриваемых по модулю идеала $\mathcal{S}^p$. Будем называть элементы из $W_{r,p;\theta}$ *полубесконечными формами*; допуская вольность речи, будем также использовать термин “полубесконечная форма” для многочленов от $\mathcal{G}_n$, действующих на $|r, p; \theta|_{\iota}\rangle_{\infty/2}$, а не только для их образов в факторе. Будем писать $W_{r,p}$ вместо $W_{r,p;0}$. Очевидно, $W_{r,p;\theta}$ — модуль над $\mathfrak{g}(p)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В менее формальных терминах состояние $|r, p; \theta|_{\iota}\rangle_{\infty/2}$ можно понимать как полубесконечное произведение

$$\begin{aligned} & \mathcal{G}_{\iota p + \theta + 1} \dots \mathcal{G}_{\iota p + \theta + p - r - 1} \mathcal{G}_{\iota p + \theta + p - r + 1} \dots \mathcal{G}_{\iota p + \theta + p - 1} \times \\ & \times \mathcal{G}_{\iota p + \theta + p + 1} \dots \mathcal{G}_{\iota p + \theta + 2p - r - 1} \mathcal{G}_{\iota p + \theta + 2p - r + 1} \dots \mathcal{G}_{\iota p + \theta + 2p - 1} \dots, \end{aligned} \quad (3.5)$$

связанная с которым последовательность чисел заполнения периодична с периодом p . Тогда элементы из $W_{r,p;\theta}$ — такие полубесконечные формы от $(\mathcal{G}_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ (по модулю $\mathcal{S}^p$), что последовательность чисел заполнения $\alpha(i)$ становится периодичной с периодом p при $i \gg 1$.

Пусть $W_{r,p;\theta}(\iota)$ обозначает пространство, порожденное элементами $(\mathcal{G}_n) \in \mathfrak{g}(p)$, $n \in \mathbb{Z}$, из состояния $|r, p; \theta|_{\iota}\rangle$, удовлетворяющего тем же условиям уничтожения, что и в (3.2) и (3.3). Имеются отображения

$$\dots \rightarrow W_{r,p;\theta}(-2) \rightarrow W_{r,p;\theta}(-1) \rightarrow W_{r,p;\theta}(0) \rightarrow W_{r,p;\theta}(1) \rightarrow \dots, \quad (3.6)$$

которые индуцированы отображением вакуумных векторов вида

$$|r, p; \theta|_{\iota - 1}\rangle \mapsto \mathcal{G}_{p\iota + \theta - p + 2} \dots \mathcal{G}_{p\iota + \theta - r - 1} \mathcal{G}_{p\iota + \theta - r + 1} \dots \mathcal{G}_{p\iota + \theta - 1} |r, p; \theta|_{\iota}\rangle, \quad \iota \in \mathbb{Z}. \quad (3.7)$$

Отображения (3.6) коммутируют с действием $\mathcal{G}_n$. Отображения $W_{r,p;\theta}(\iota) \rightarrow W_{r,p;\theta}$, индуцированные отображениями $|r, p; \theta|\iota\rangle \mapsto |r, p; \theta|\iota\rangle_{\infty/2}$, делают коммутативными все диаграммы

$$\begin{array}{ccc} W_{r,p;\theta}(\iota) & \longrightarrow & W_{r,p;\theta}(\iota+1) \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & W_{r,p;\theta} & \end{array} \quad (3.8)$$

Таким образом, пространство $W_{r,p;\theta}$ является индуктивным пределом последовательности (3.6): $W_{r,p;\theta} = \varinjlim_{\iota \rightarrow \infty} W_{r,p;\theta}(\iota)$.

Кроме заданного действия спектрального потока U_p вида $U_p \mathcal{G}_n U_{-p} = \mathcal{G}_{n+p}$, определим

$$U_{\pm p} |r, p; \theta|\iota\rangle_{\infty/2} = |r, p; \theta|\iota \pm 1\rangle_{\infty/2}. \quad (3.9)$$

Тем самым полубесконечное пространство превращается в модуль над $G^p(p)$, полупрямым произведением $\mathfrak{g}(p)$ и $(U_{pn})_{n \in \mathbb{Z}}$.

Приведенное формальное определение ничего не сообщает о структуре полубесконечного пространства и, в частности, о том, являются ли отображения (3.6) вложениями (и дают ли поэтому пространства $W_{r,p;\theta}(\iota)$ хоть какую-нибудь “аппроксимацию” предела). Для того чтобы доказать, что отображения в формуле (3.6) являются вложениями, требуется, чтобы обращения в нуль, происходящие среди многочленов от $\mathcal{G}_n$ при отображениях (3.7), были очень точно согласованы с обращениями в нуль вследствие взятия фактора по идеалу, порожденному $(S_a^p)_{a \in \mathbb{Z}}$. Сложность установления подобного обстоятельства состоит в том, что идеал не описан явно. Например, уравнения (2.15) влекут дополнительные соотношения $\mathcal{G}_{-5}\mathcal{G}_{-3}\mathcal{G}_{-2} = 0$ и $\mathcal{G}_{-6}\mathcal{G}_{-3}\mathcal{G}_{-2} = 0$; продолжая список (2.15), получаем все новые элементы в идеале. Ситуация усложняется для общих соотношений (1.1). Тем не менее мы покажем, что отображения, участвующие в индуктивном пределе, являются вложениями. Это будет означать, что устанавливаемые для отдельных пространств $W_{r,p;\theta}(\iota)$ свойства дают аппроксимацию свойств полного полубесконечного пространства $W_{r,p;\theta}$.

ТЕОРЕМА 3. *Все отображения в (3.8) являются вложениями, т.е. пространство $W_{r,p;\theta}$ допускает фильтрацию*

$$\cdots \subset W_{r,p;\theta}(-2) \subset W_{r,p;\theta}(-1) \subset W_{r,p;\theta}(0) \subset W_{r,p;\theta}(1) \subset \cdots \quad (3.10)$$

Этот результат выводится из существования в $W_{r,p;\theta}(\iota)$ замечательного мономиального базиса, согласованного с отображениями $W_{r,p;\theta}(\iota) \rightarrow W_{r,p;\theta}(\iota+1)$, к обсуждению которого мы и переходим.

3.2. Разреженный базис. Мы построим в каждом пространстве $W_{r,p;\theta}(\iota)$ мономиальный базис, называемый *разреженным базисом*, потому что он составлен из полубесконечных форм, в которых моды $\mathcal{G}_n$ “разрежены” так, как это описано в теореме 2. Переформулируем желаемый результат следующим образом (теорема 2 воспроизводится, если записать $|r, p; \theta|\iota\rangle_{\infty/2}$ в виде полубесконечного произведения (3.5)).

ЛЕММА 1. Набор состояний $\mathcal{G}_{i_m} \dots \mathcal{G}_{i_2} \mathcal{G}_{i_1} |r, p; \theta | \iota\rangle_{\infty/2}$, для которых $\iota p + \theta > i_1 > i_2 > \dots > i_m$, $i_a - i_{a+p-2} \geq p$ для любого a и $\iota p + \theta - i_r > r$, образует базис в пространстве $\mathcal{W}_{r,p;\theta}(\iota)$.

Будем называть элементы разреженного базиса *разреженными мономами*. Теорема 3 следует из того наблюдения, что в терминах разреженных мономов отображения $\mathcal{W}_{r,p;\theta}(\iota) \rightarrow \mathcal{W}_{r,p;\theta}(\iota + 1)$ осуществляются как

$$\mathcal{G}_{i_m} \dots \mathcal{G}_{i_2} \mathcal{G}_{i_1} |r, p; \theta | \iota\rangle_{\infty/2} \mapsto \mathcal{G}_{i_m} \dots \mathcal{G}_{i_2} \mathcal{G}_{i_1} \times \\ \times \mathcal{G}_{\iota p + \theta + 1} \dots \mathcal{G}_{\iota p + \theta + p - r - 1} \mathcal{G}_{\iota p + \theta + p - r + 1} \dots \mathcal{G}_{\iota p + \theta + p - 1} |r, p; \theta | \iota + 1\rangle_{\infty/2}. \quad (3.11)$$

Действительно, коль скоро индексы $i_m, \dots, i_1$ удовлетворяют условиям леммы 1, этим условиям удовлетворяют и индексы $i_m, \dots, i_1, \iota p + \theta + 1, \dots, \iota p + \theta + p - r - 1, \iota p + \theta + p - r + 1, \dots, \iota p + \theta + p - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1 состоит из двух частей, первая из которых простая, а вторая требует определенных усилий. Мы кратко опишем первую, а затем уделим больше внимания второй.

Первая часть доказательства состоит в утверждении, что всякую полубесконечную форму можно переписать в виде линейной комбинации состояний $\mathcal{G}_{i_m} \mathcal{G}_{i_{m-1}} \dots \mathcal{G}_{i_1} \times |r, p; \theta | \iota\rangle_{\infty/2}$, удовлетворяющих условиям леммы. Это следует из того факта, что если какой-либо моном по $\mathcal{G}_n$ содержит комбинацию мод, нарушающую условие леммы, то согласно соотношению $S_a^p = 0$ этот моном можно выразить через линейную комбинацию других, причем каждый из вновь появившихся мономов окажется лексикографически меньше исходного. Во вновь появившихся мономах, конечно, также могут присутствовать комбинации мод, нарушающие условие леммы, однако аргумент о лексикографическом порядке позволяет развить итерационную процедуру. Она сойдется за конечное число шагов, т.е. возникнет линейная комбинация мономов, удовлетворяющих условиям леммы, поскольку:

- 1) пространство $\overline{\mathcal{W}}_{r,p;\theta}(\iota)$ биградуировано посредством $\mathcal{G}_{i_m} \mathcal{G}_{i_{m-1}} \dots \mathcal{G}_{i_1} \times |r, p; \theta | \iota\rangle_{\infty/2} \mapsto (m, i_1 + i_2 + \dots + i_m)$;
- 2) каждая градуированная компонента является конечномерным пространством;
- 3) процедура выражения монома через линейную комбинацию других с помощью соотношений $S_a^p = 0$ сохраняет биградуировку.

Во второй части доказательства остается показать, что разреженные мономы линейно независимы. Это будет следовать из сравнения характеров. Вычисление характеров занимает немало места, мы посвятим ему раздел 4. Доказательство завершается утверждением леммы 3 в п. 4.3.

ПРИМЕРЫ. Приведем несколько примеров преобразования к разреженному базису.

А. $p = 3, r = 1$. Непосредственное исключение плотных комбинаций мод приводит к $\mathcal{G}_{-15} \mathcal{G}_{-14} \mathcal{G}_{-12} \mathcal{G}_{-13} \mathcal{G}_{-4} \mathcal{G}_{-3} |1, 3; 0|0\rangle = 3393 \mathcal{G}_{-21} |1, 3; 0| - 5\rangle + 4185 \mathcal{G}_{-20} \mathcal{G}_{-15} \times |1, 3; 0| - 4\rangle + 5697 \mathcal{G}_{-19} \mathcal{G}_{-16} |1, 3; 0| - 4\rangle + 1755 \mathcal{G}_{-19} \mathcal{G}_{-15} \mathcal{G}_{-12} |1, 3; 0| - 3\rangle + 315 \mathcal{G}_{-18} \times \mathcal{G}_{-15} \mathcal{G}_{-12} \mathcal{G}_{-9} |1, 3; 0| - 2\rangle$.

Б. $p = 4$, $r = 1$. В качестве простого примера имеем $\mathcal{G}_{-5}\mathcal{G}_{-4}\mathcal{G}_{-2}|1, 4; 0|0\rangle = -2\mathcal{G}_{-6}|1, 4; 0|-1\rangle$. Аналогичным образом $\mathcal{G}_{-5}\mathcal{G}_{-4}\mathcal{G}_{-3}|1, 4; 0|0\rangle = -10\mathcal{G}_{-7}|1, 4; 0|-1\rangle - 8\mathcal{G}_{-6}\mathcal{G}_{-4}\mathcal{G}_{-2}|1, 4; 0|0\rangle$.

В. $p = 5$, $r = 1$. Из двух следующих примеров второй является надстройкой над первым: $\mathcal{G}_{-2}\mathcal{G}_{-1}\mathcal{G}_0\mathcal{G}_1|1, 5; -1|1\rangle = -35\mathcal{G}_{-5}|1, 5; -1|0\rangle - 45\mathcal{G}_{-4}\mathcal{G}_{-1}\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2|1, 5; -1|1\rangle - 20\mathcal{G}_{-3}\mathcal{G}_{-2}\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2|1, 5; -1|1\rangle - 15\mathcal{G}_{-3}\mathcal{G}_{-1}\mathcal{G}_0\mathcal{G}_2|1, 5; -1|1\rangle$ и $\mathcal{G}_{-5}\mathcal{G}_{-4}\mathcal{G}_{-2}\mathcal{G}_{-1}\mathcal{G}_0\mathcal{G}_1 \times |1, 5; -1|1\rangle = -45\mathcal{G}_{-7}\mathcal{G}_{-4}\mathcal{G}_{-3}|1, 5; -1|0\rangle - (245/3)\mathcal{G}_{-6}\mathcal{G}_{-5}\mathcal{G}_{-3}|1, 5; -1|0\rangle - 75\mathcal{G}_{-6}\mathcal{G}_{-4} \times \mathcal{G}_{-3}\mathcal{G}_{-1}\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2|1, 5; -1|1\rangle$.

4. ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ И ХАРАКТЕРЫ

Мы используем реализацию (*градуированно*-)двойственного пространства к полубесконечному пространству в терминах полиномиальных дифференциальных форм. Эта *функциональная реализация* оказывается весьма мощным средством при изучении свойств полубесконечных пространств.

4.1. Функциональная реализация пространства $W_{r,p}(0)^*$. Заметим сначала, что для любого пространства, порожденного из вакуума $|\rangle$ фермионными генераторами $\mathcal{G}_{\leq -1}$, градуированно-двойственное пространство можно отождествить с дифференциальными формами от некоторых переменных $x_1, x_2, \dots$ следующим образом. В каждой градуированной компоненте с фиксированным зарядом (числом операторов $\mathcal{G}_\bullet$) $n \geq 1$ упакуем все состояния в производящую функцию $\mathcal{G}(x_1) \dots \mathcal{G}(x_n)|\rangle$, где

$$\mathcal{G}(x) = \sum_{m \leq -1} \mathcal{G}_m x^{m-1}.$$

Состояния $\mathcal{G}_{i_1} \dots \mathcal{G}_{i_n}|\rangle$ воспроизводятся взятием интегралов

$$\oint dx_1 x_1^{i_1} \dots \oint dx_n x_n^{i_n} \mathcal{G}(x_1) \dots \mathcal{G}(x_n)|\rangle.$$

Любой функционал $\langle \ell |$ на подпространстве с зарядом n задается всеми своими значениями⁹⁾:

$$\langle \ell | \mathcal{G}(x_1) \dots \mathcal{G}(x_n) | \rangle = f_\ell(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n, \quad (4.1)$$

где f_ℓ – кососимметрический многочлен от $x_1, \dots, x_n$ (а произведение дифференциалов симметрично). Таким образом, пространство, двойственное к пространству $W(0)$, *свободно*-порожденному модами $\mathcal{G}_{n \leq -1}$, можно отождествить с полиномиальными дифференциальными формами от $x_1, x_2, \dots$:

$$W(0)^* = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}[x] dx \oplus \mathbb{C}\langle x_1, x_2 \rangle dx_1 dx_1 \oplus \mathbb{C}\langle x_1, x_2, x_3 \rangle dx_1 dx_2 dx_3 \oplus \dots, \quad (4.2)$$

⁹⁾ Вопрос о том, рассматривается ли $\mathcal{G}(x)$ как 1-дифференциал или, например, 2-дифференциал, относится к области соглашений; эти соглашения, однако, должны соответствовать выбору функциональных пространств в функциональной реализации. При сделанном нами выборе все функциональные пространства состоят из многочленов $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, а не $(x_1 \dots x_n)^\nu \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ с положительным или отрицательным ν .

где $\mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ – кососимметрические многочлены.

Для факторпространств функциональная реализация соответствующего двойственного дается *подпространством* в пространстве многочленов. Пусть $W(0)_n$ обозначает подпространство с зарядом n , а $W(0)_n^*$ – его двойственное, т.е. подпространство полиномов от n переменных в (4.2). На языке двойственных пространств взятие фактора по идеалу, порожденному S_a^p (см. (1.1)), соответствует ограничению на такие кососимметрические многочлены $f(x_1, \dots, x_n)$, для которых

$$\frac{d^{p-2}}{\partial x_{i_1}^{p-2}} \frac{\partial^{p-3}}{\partial x_{i_2}^{p-3}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{i_{p-2}}} f(x_1, x_2, \dots) \Big|_{x_{i_1}=x_{i_2}=\dots=x_{i_{p-2}}=x_{i_{p-1}}} = 0. \quad (4.3)$$

Еще одно условие возникает из соотношения (3.3) (при $\theta = \iota = 0$):

$$\frac{\partial^{r-1}}{\partial x_{i_1}^{r-1}} \frac{\partial^{r-2}}{\partial x_{i_2}^{r-2}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{i_{r-1}}} f(x_1, x_2, \dots) \Big|_{x_{i_1}=x_{i_2}=\dots=x_{i_{r-1}}=x_{i_r}=0} = 0. \quad (4.4)$$

Пусть $W_{r,p}(0)^*$ обозначает пространство кососимметрических многочленов f , удовлетворяющих этим условиям.

Поскольку всякий кососимметрический многочлен можно представить в виде

$$f(x_1, x_2, \dots) = \Delta(x_1, x_2, \dots) \phi(x_1, x_2, \dots), \quad \Delta(x_1, x_2, \dots) = \prod_{1 \leq i < j} (x_i - x_j), \quad (4.5)$$

с *симметрическим* многочленом $\phi(x_1, x_2, \dots)$, условия (4.4) и (4.3) принимают вид следующих ограничений на симметрические многочлены:

$$\text{M1)} \quad \phi\left(\underbrace{0, \dots, 0}_r, x_{r+1}, \dots, x_n\right) = 0;$$

$$\text{M2)} \quad \phi\left(\underbrace{x, x, \dots, x}_{p-1}, x_p, x_{p+1}, \dots, x_n\right) = 0.$$

ПРИМЕР. При $p = 3$ условия M2 легко разрешаются:

$$f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \prod_{i < j} (x_i - x_j)^3 \varphi(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n, \quad (4.6)$$

где φ – симметрический многочлен. При $r = 1$ условие M1 имеет своим решением $\varphi(x_1, \dots, x_n) = x_1 \dots x_n \bar{\varphi}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, откуда следует, что пространство $W_{1,3}(0)_n^*$ состоит из дифференциальных форм

$$\prod_{i < j} (x_i - x_j)^3 x_1 \dots x_n \bar{\varphi}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n, \quad (4.7)$$

где $\bar{\varphi}$ – произвольные симметрические многочлены. Подобное явное описание уже невозможно при $p \geq 4$.

4.2. Характеры пространств $W_{r,p;\theta}(\iota)$. Функциональная реализация позволяет вычислить характеры пространств $W_{r,p;\theta}(\iota)$. Идея работы [1] состоит в том, чтобы при каждом $n \geq 1$ найти характер пространства $W_{r,p}(0)_n^* = W_{r,p}(0)^* \cap \mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$, который совпадает с характером $W_{r,p}(0)_n$ (подпространства в $W_{r,p}(0)$, порожденного n модами $\mathcal{G}_i$); тогда

$$\text{ch } W_{r,p}(0)(z, q) = \sum_{n \geq 0} z^n \text{ch } W_{r,p}(0)_n(q).$$

Зависимости как от ι , так и от θ восстанавливаются в соответствии со спектральным потоком.

4.2.1. Пример: $p = 3$. Функциональная модель пространства $W_{1,3}(0)_n^*$ определена в (4.7), причем пространство симметрических многочленов от n переменных алгебраически порождено элементарными симметрическими многочленами, а поэтому их вклад в характер $W_{1,3}(0)_n^*$ равен $1/(q)_n$. Далее, произведение $\prod_{i < j} (x_i - x_j)^3$ дает вклад в характер, равный $q^{3n(n-1)/2}$, дифференциалы $dx_1 \dots dx_n$ дают вклад q^n , и еще один множитель q^n мы получаем из $x_1 \dots x_n$. Таким образом,

$$\text{ch } W_{1,3}(0) = \text{ch } W_{1,3}(0)^* = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n q^{\frac{3n^2+n}{2}}}{(q)_n}. \quad (4.8)$$

Применяя преобразование спектрального потока в соответствии с (2.4), находим

$$\begin{aligned} \text{ch } W_{1,3}(\iota)(z, q) &= z^{-\iota} q^{\frac{\iota}{2}(3\iota-1)} \text{ch } W_{1,3}(0)(z q^{-3\iota}, q) = \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{z^{n-\iota} q^{\frac{3(n-\iota)^2+n-\iota}{2}}}{(q)_n} = \sum_{n \geq -\iota} \frac{z^n q^{\frac{3n^2+n}{2}}}{(q)_{n+\iota}}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Это выражение допускает предел

$$\lim_{\iota \rightarrow \infty} \text{ch } W_{1,3}(\iota)(z, q) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{z^n q^{\frac{3n^2+n}{2}}}{\prod_{m \geq 1} (1 - q^m)} = q^{-\frac{1}{3}} \frac{\vartheta_{1,0}(z q^{-1}, q^3)}{\eta(q)}, \quad (4.10)$$

который совпадает с (2.8). Гораздо большие усилия требуются для доказательства этого замечательного совпадения в общем случае.

4.2.2. Общий случай: $p \geq 4$.

ЛЕММА 2. При $p \geq 3$ и $1 \leq r \leq p-1$ характер пространства $W_{r,p}(0)$ равен

$$\text{ch } W_{r,p}(0)(z, q) = \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{N_1 \geq \dots \geq N_{p-2} \geq 0 \\ N_1 + \dots + N_{p-2} = n}} \frac{z^{n - \frac{r-1}{p}} q^{\sum_{m=r}^{p-2} N_m} q^{\frac{1}{2}n(n-1)} q^{\sum_{m=1}^{p-2} N_m^2}}{(q)_{N_1-N_2} (q)_{N_2-N_3} \dots (q)_{N_{p-3}-N_{p-2}} (q)_{N_{p-2}}}. \quad (4.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В функциональной реализации $W_{r,p}(0)_n^*$ рассмотрим все разбиения множества $\{x_1, \dots, x_n\}$ и введем лексикографическое упорядочение на разбиениях (т.е. положим $(r_1, r_2, \dots, r_k) \prec (r'_1, r'_2, \dots, r'_{k'})$, если $r_i < r'_i$ для первой пары (r_i, r'_i) , для которой $r_i \neq r'_i$).

Фиксируем разбиение числа n , записанное в виде $\{1, \dots, n\} = M_1 \cup \dots \cup M_\ell$, и пусть при этом $|M_\alpha| = r_\alpha$. Будем говорить, что многочлен $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ обращается в нуль на этом разбиении, если он обращается в нуль, когда все переменные x_{i_α} при $i_\alpha \in M_\alpha$ принимают одно и то же значение, $x_{i_\alpha} = a_\alpha$ при всех $\alpha = 1, \dots, \ell$, и будем писать $\varphi(a_1; \dots; a_\ell) = 0$.

Характер $W_{r,p}(0)^*$ можно записать в виде

$$\text{ch } W_{r,p}(0)(z, q) = z^{-\frac{r-1}{p}} \sum_{n \geq 0} z^n q^{\frac{n^2-n}{2}} Z_{r,p}^n(q), \quad (4.12)$$

где множитель $q^{(n^2-n)/2}$ соответствует $\Delta(x_1, \dots, x_n)$ в (4.5), а $Z_{r,p}^n(q)$ — статсумма симметрических многочленов от n переменных, обращающихся в нуль на разбиении $\hat{p} = (p-1, 1, 1, \dots, 1)$.

Выбрав разбиение P , рассмотрим множество симметрических многочленов, обращающихся в нуль на каждом разбиении $P' \succ P$. Лексикографический порядок на разбиениях индуцирует фильтрацию на симметрических многочленах от n переменных. Если $Z_{r,p}^{n,P}(q)$ — статсумма, соответствующая *ассоциированному градуированному фактору* Gr_P , то мы имеем

$$Z_{r,p}^n(q) = \sum_{\{P|P \prec \hat{p}\}} Z_{r,p}^{n,P}(q). \quad (4.13)$$

Чтобы найти $Z_{r,p}^{n,P}(q)$, рассмотрим сначала случай, когда $r = p-1$. Условие M1 тогда следует из M2. Для разбиения P с частями $M_1, \dots, M_\ell$ (причем $|M_\alpha| = r_\alpha$) градуированные факторы Gr_P порождены многочленами $\varphi(a) \equiv \varphi(a_1; \dots; a_\ell)$, удовлетворяющими условиям:

- 1) $\varphi(a) = 0$, если $a_\alpha = a_\beta$, причем нуль имеет кратность $2 \min(r_\alpha, r_\beta)$;
- 2) $\varphi(\dots; a_\alpha; \dots; a_\beta; \dots) = \varphi(\dots; a_\beta; \dots; a_\alpha; \dots)$ всегда, когда $r_\alpha = r_\beta$.

Учитывая дифференциалы из (4.1), видим, что статсумма $Z_{p-1,p}^{n,P}(q)$ градуированного фактора совпадает со статсуммой пространства, порожденного элементами вида

$$\prod_{1 \leq \alpha \leq \beta \leq \ell} (a_\alpha - a_\beta)^{2r_\beta} \cdot \bar{\varphi}(a) \cdot \prod_{\alpha=1}^{\ell} (da_\alpha)^{r_\alpha}, \quad (4.14)$$

где многочлен $\bar{\varphi}$ удовлетворяет требованию симметрии (условие 2). Пусть ν_m — число таких частей M_α , что $r_\alpha = m$. Вклад выбранного разбиения P в статсумму равен

$$\frac{q^{\sum_{\alpha < \beta} 2r_\beta + \sum_{\alpha} r_\alpha}}{\prod_{j \geq 1} (q)^{\nu_j}} = \frac{q^{\sum_{\beta=1}^{\ell} (2\beta-1)r_\beta}}{\prod_{j \geq 1} (q)^{\nu_j}} = \frac{q^{\sum_{m=1}^{p-2} N_m^2}}{(q)^{N_1 - N_2} (q)^{N_2 - N_3} \dots}, \quad (4.15)$$

где $N_m = \nu_m + \nu_{m+1} + \dots + \nu_\ell$ — элементы сопряженного (транспонированного) разбиения к P . Таким образом,

$$Z_{p-1,p}^n(q) = \sum_{\substack{N_1 \geq \dots \geq N_{p-2} \geq 0 \\ N_1 + \dots + N_{p-2} = n}} \frac{q^{\sum_{m=1}^{p-2} N_m^2}}{(q)_{N_1-N_2} (q)_{N_2-N_3} \dots (q)_{N_{p-2}}}. \quad (4.16)$$

Если $r \neq p-1$, следует дополнительно учесть условие M1, что сводится к взятию симметрических многочленов $\bar{\varphi}(a)$, удовлетворяющих условиям $\bar{\varphi}(a)|_{a_1=a_2=\dots=a_r=0} = 0$. Для этого используем фильтрацию $\mathcal{P}_1^n \subset \dots \subset \mathcal{P}_{r-1}^n \subset \mathcal{P}_r^n$ на пространстве симметрических многочленов $\mathcal{P}_r^n$ от n переменных, удовлетворяющих условию M1,

$$\mathcal{P}_r^n = \sigma_n \mathbb{C}[\sigma_1, \dots, \sigma_n] + \sigma_{n-1} \mathbb{C}[\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}] + \dots + \sigma_{n-r+1} \mathbb{C}[\sigma_1, \dots, \sigma_{n-r+1}], \quad (4.17)$$

где $\sigma_1 = x_1 + \dots + x_n$, ..., $\sigma_n = x_1 \dots x_n$ — элементарные симметрические многочлены от n переменных. В соответствующем градуированном факторе явные множители σ_i приводят к дополнительному умножению статсуммы (4.15) на $q^{\sum_{m=r}^{p-2} N_m}$. Таким образом,

$$Z_{r,p}^n(q) = \sum_{\substack{N_1 \geq \dots \geq N_{p-2} \geq 0 \\ N_1 + \dots + N_{p-2} = n}} \frac{q^{\sum_{m=r}^{p-2} N_m} q^{\sum_{m=1}^{p-2} N_m^2}}{(q)_{N_1-N_2} (q)_{N_2-N_3} \dots (q)_{N_{p-3}-N_{p-2}} (q)_{N_{p-2}}}. \quad (4.18)$$

Подставляя (4.18) в (4.12), получаем (4.11).

Используя соотношение (2.4) при $\theta = p\iota$, находим характеры пространств, преобразованных спектральным потоком:

$$\begin{aligned} \text{ch } W_{r,p}(\iota)(z, q) &= z^{-(p-2)\iota} q^{\frac{p-2}{2}(p\iota^2 - \iota)} \text{ch } W_{r,p}(0)(z q^{-p\iota}, q) = \\ &= q^{\frac{p-2}{2}(p\iota^2 - \iota) + (r-1)\iota} \sum_{n \geq -(p-2)\iota} \sum_{\substack{N_1 \geq \dots \geq N_{p-2} \geq 0 \\ N_1 + \dots + N_{p-2} = n + (p-2)\iota}} q^{-p\iota[n + (p-2)\iota]} z^{n - \frac{r-1}{p}} \times \\ &\times q^{\frac{1}{2} \sum_{m=r}^{p-2} N_m - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{r-1} N_m} \frac{q^{\frac{1}{2}(n^2 + 2n(p-2)\iota + (p-2)^2 \iota^2)} q^{\sum_{m=1}^{p-2} N_m^2}}{(q)_{N_1-N_2} (q)_{N_2-N_3} \dots (q)_{N_{p-3}-N_{p-2}} (q)_{N_{p-2}}} = \\ &= z^{\frac{1-r}{p}} \sum_{n \geq -(p-2)\iota} \sum_{\substack{N_1 \geq \dots \geq N_{p-2} \geq -\iota \\ N_1 + \dots + N_{p-2} = n}} \frac{z^n q^{\frac{1}{2}n^2}}{(q)_{N_1-N_2} (q)_{N_2-N_3} \dots (q)_{N_{p-3}-N_{p-2}} (q)_{N_{p-2}+\iota}} \times \\ &\times q^{\sum_{m=1}^{p-2} N_m^2 + \frac{1}{2} \sum_{m=r}^{p-2} N_m - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{r-1} N_m}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

4.3. Линейная независимость разреженных мономов. Покажем теперь, что разреженный базис, определенный в п. 3.2, действительно является базисом в $W_{r,p}(0)$ (а тогда в силу спектрального потока он является базисом и в $W_{r,p;\theta}(t)$), т.е. что разреженные мономы, определенные в лемме 1, линейно независимы в $W_{r,p}(0)$. В действительности мы докажем, что статсумма разреженных мономов совпадает с (4.11). Для этого представим каждую полубесконечную форму в терминах чисел заполнения, т.е. как конфигурацию крестов на полубесконечной одномерной решетке (см. (1.6)). Нас интересует статсумма всех конфигураций, удовлетворяющих основному условию, что любые p последовательных узлов решетки несут не более $p - 2$ крестов.

Рассмотрим сначала это условие на конфигурации крестов на решетке с конечным числом узлов L , занумерованных как $1 \leq i \leq L$. Каждая конфигурация крестов в узлах $(i_1, \dots, i_m)$ дает вклад $z^m q^{i_1 + \dots + i_m}$ в статсумму. Пусть $\omega_{L,r,p}(z, q)$ — статсумма всех конфигураций крестов на L узлах, удовлетворяющих следующим условиям:

K1) имеются не более $r - 1$ крестов в узлах $1, \dots, r$;

K2) на любых p последовательных узлах имеются не более $p - 2$ крестов.

При $r = p - 1$ первое условие следует из второго. Конфигурации крестов, кодирующие элементы разреженного базиса, воспроизводятся в пределе $L \rightarrow \infty$. Замечательным образом справедлива

ЛЕММА 3. *Статсумма конфигураций крестов, удовлетворяющих условиям K1 и K2 на полубесконечной решетке, равна характеру $\text{ch } W_{r,p}(0)(z, q)$, определенному в лемме 2:*

$$z^{-\frac{r-1}{p}} \lim_{L \rightarrow \infty} \omega_{L,r,p}(z, q) = \text{ch } W_{r,p}(0)(z, q). \quad (4.20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Идея доказательства такова: разлагая обе части (4.20) по степеням z , получаем две системы функций, каждая из которых полностью определяется набором рекуррентных соотношений и соответствующими начальными значениями; эти два набора рекуррентных соотношений и начальные значения идентичны, откуда и следует (4.20). Перейдем теперь к деталям этого плана.

Статсумма конфигураций крестов удовлетворяет рекуррентным соотношениям

$$\omega_{L,r,p}(z, q) = \sum_{j=0}^{r-1} z^j q^{\frac{j(j+1)}{2}} \omega_{L-j-1,p-j-1,p}(z q^{j+1}, q). \quad (4.21)$$

Действительно, условия K1 выделяют конфигурации, являющиеся непересекающимся объединением $\bigcup_{j=0}^{r-1}$ конфигураций с *ровно* j занятыми узлами (тогда как узел $j + 1$ свободен). При каждом j , отрезая эти занятые узлы и соседний свободный узел, получаем конфигурацию крестов на $L - j - 1$ узлах; эти конфигурации удовлетворяют “граничному условию”, которое принимает во внимание кресты в узлах $1, \dots, j$ на исходной решетке: в силу условия K2 в начальных узлах подрешетки может оказаться не более $p - j - 2$ крестов. Общий множитель $z^j q^{j(j+1)/2}$ в (4.21) есть в точности вклад крестов в узлах $1, \dots, j$, а преобразование типа спектрального потока $z \mapsto z q^{j+1}$ в аргументе учитывает перенумерацию узлов на подрешетке. Тем самым установлено (4.21).

Начальными условиями для рекуррентных соотношений являются решетки при $L \leq p-2$, на которых условие К2 не может быть применено, а потому

$$\omega_{L,r,p}(z, q) = \chi_{L-1,p}(zq, q) + \sum_{\substack{j=1 \\ L-j-1 \geq 0}}^{r-1} z^j q^{\frac{j(j+1)}{2}} \chi_{L-j-1,p}(zq^{j+1}, q), \quad (4.22)$$

где $L \leq p-2$, а

$$\chi_{\ell,p}(z, q) = \sum_{i=0}^{\ell} z^i q^{\frac{i(i+1)}{2}} \left[\begin{matrix} \ell \\ i \end{matrix} \right]_q = (-qz)_{\ell} \quad \text{при} \quad 0 < \ell \leq p-2 \quad (4.23)$$

(и $\chi_{0,p}(z, q) = 1$). При этих начальных условиях соотношения (4.21) полностью определяют $\omega_{L,r,p}(z, q)$.

В пределе $L \rightarrow \infty$ разложим статсумму по степеням z как

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \omega_{L,r,p}(z, q) = \sum_{n \geq 0} z^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} B_{r,p}^n(q). \quad (4.24)$$

Тогда из (4.21) следует, что

$$B_{r,p}^n(q) = \sum_{j=0}^{r-1} q^n B_{p-j-1,p}^{n-j}(q) \quad (4.25)$$

(при $n < r-1$ суммирование в правой части идет от 0 до n ; удобно положить $B_{r,p}^n(q) = 0$ при $n < 0$, что позволяет использовать (4.25) во всех случаях). Эти равенства можно переписать как рекуррентные соотношения, выражающие $B_{r,p}^n(q)$ через $B_{r,p}^m(q)$ при $m < n$. Начальными значениями для этих рекуррентных соотношений являются $B_{r,p}^m$ при $m < p-1$, когда условие К2 неприменимо. Но мы уже видели в (4.22) и (4.23), как вычислить $\omega_{L,r,p}(z, q)$ на решетке, на которой не налагается условие К2, так что остается только взять предел $L \rightarrow \infty$ в (4.22). Пусть P обозначает проектор на многочлены от z порядка $< p-1$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{p-2} z^m q^{\frac{m(m-1)}{2}} B_{r,p}^m(q) &= P \sum_{j=0}^{r-1} z^j q^{\frac{j(j+1)}{2}} (-zq^{j+2})_{\infty} = \\ &= P \sum_{j=0}^{r-1} z^j q^{\frac{j(j+1)}{2}} \left(1 + \sum_{n \geq 1} \frac{(zq^{j+2})^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(1-q) \dots (1-q^n)} \right) = \\ &= P \sum_{n \geq 0} z^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} \sum_{\substack{j=0 \\ j \leq n}}^{r-1} \frac{q^{2n-j}}{(1-q) \dots (1-q^{n-j})}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Внутренняя сумма в правой части, таким образом, определяет начальные значения $B_{r,p}^n(q)$ при $n \leq p-2$.

Обращаясь к характеру $W_{r,p}(0)(z, q)$, вспомним разложение (4.12), где, как мы видели,

$$Z_{r,p}^n(q) = \sum_{\substack{n_1, \dots, n_{p-2} \geq 0 \\ N_1 + \dots + N_{p-2} = n}} \frac{q^{N_1^2 + \dots + N_{p-2}^2 + N_r + \dots + N_{p-2}}}{(q)_{n_1} \dots (q)_{n_{p-2}}} \quad (4.27)$$

при $N_i = n_i + \dots + n_{p-2}$; эти выражения удовлетворяют соотношению [10]

$$Z_{r,p}^n(q) = \sum_{j=0}^{r-1} q^n Z_{p-j-1,p}^{n-j}(q). \quad (4.28)$$

Действительно, в обозначениях [10] равенство (4.27) принимает вид $Z_{i,p}^n(q) = R_{p-1,i}^n(q)$, причем известно, что производящие функции $\sum_{n \geq 0} x^n R_{\kappa,i}^n(q) = R_{\kappa,i}(x; q) = J_{\kappa,i}(0; x; q)$ удовлетворяют тождествам

$$\begin{aligned} R_{\kappa,i}(x; q) - R_{\kappa,i-1}(x; q) &= (xq)^{i-1} R_{\kappa,\kappa-i+1}(xq; q) \quad \text{при} \quad 1 \leq i \leq \kappa, \\ R_{\kappa,0}(x; q) &= 0. \end{aligned}$$

Суммируя эти соотношения (при $\kappa = p-1$) по $i = 1, \dots, r-1$, получаем (4.28).

Чтобы завершить доказательство, остается найти начальные значения для этой рекурсии, а именно $Z_{r,p}^m(q)$ при $m < \kappa$. Имеем [10]

$$R_{\kappa,i}(x; q) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^{\kappa n} q^{\kappa n + \kappa n^2 + n - in} (1 - x^i q^{2ni+i}) (-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(q)_n (xq^{n+1})_{\infty}}. \quad (4.29)$$

Коэффициенты в разложении по степеням x^j при $j \leq \kappa-1$ получаются только из членов с $n = 0$ в этой сумме, откуда

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\kappa-1} x^n R_{\kappa,i}^n(q) &= P \frac{1 - x^i q^i}{(xq)_{\infty}} = P \frac{1 - x^i q^i}{(1 - xq)} \cdot \frac{1}{(1 - xq^2)(1 - xq^3) \dots} = \\ &= P \sum_{m=0}^{i-1} x^m q^m \left(1 + \sum_{n \geq 1} \frac{q^{2n} x^n}{(1 - q) \dots (1 - q^n)} \right) = \\ &= P \sum_{n \geq 0} x^n \sum_{\substack{j=0 \\ j \leq n}}^{i-1} \frac{q^{2n-j}}{(1 - q) \dots (1 - q^{n-j})}, \end{aligned} \quad (4.30)$$

и внутреннее суммирование в правой части дает $R_{\kappa,i}^n \equiv Z_{i,\kappa+1}^n$ при $n < \kappa$. Как видно, это те же выражения, что и для $B_{i,\kappa}^n$ (очевидно, нет зависимости от $\kappa = p-1$, поскольку она возникает только в высших по n функциях $B_{r,\kappa}^n$ и $Z_{r,\kappa}^n$ из-за условий К2 и М2).

Итак, имеем $Z_{r,p}^m(q) = B_{r,p}^m(q)$ при $m < p$; в силу рекуррентных соотношений отсюда следует, что $Z_{r,p}^n(q) = B_{r,p}^n(q)$ при всех n , откуда вытекает равенство (4.20).

Совпадение характеров показывает, что нет линейных зависимостей между разреженными мономами. Это завершает доказательство леммы 1, а следовательно, и теоремы 3.

4.4. Характер полубесконечного пространства. Теорема 3 имеет важное следствие.

ТЕОРЕМА 4. *Характер полубесконечного пространства $W_{r,p;\theta}$ равен*

$$\begin{aligned} \text{ch } W_{r,p;\theta}(z, q) &= z^{\frac{1-r+2\theta}{p}-\theta} q^{(1-\frac{2}{p})\frac{\theta^2-\theta}{2}-\theta\frac{1-r}{p}} \times \\ &\times \sum_{N_1 \geq \dots \geq N_{p-2} \in \mathbb{Z}} \frac{z^{\sum_{m=1}^{p-2} N_m}}{(q)^{N_1-N_2} (q)^{N_2-N_3} \dots (q)^{N_{p-3}-N_{p-2}} (q)^\infty} \times \\ &\times q^{\frac{1}{2}(\sum_{m=r}^{p-2} - \sum_{m=1}^{r-1}) N_m - \theta \sum_{m=1}^{p-2} N_m + \frac{3}{2} \sum_{m=1}^{p-2} N_m^2 + \sum_{1 \leq m < m' \leq p-2} N_m N_{m'}}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В качестве прямого следствия теоремы 3 имеем

$$\begin{aligned} \text{ch } W_{r,p;\theta}(z, q) &= \lim_{\iota \rightarrow \infty} \text{ch } W_{r,p;\theta}(\iota)(z, q) = \\ &= \lim_{\iota \rightarrow \infty} z^{-(p-2)\iota} q^{\frac{p-2}{2}(p\iota^2-\iota)} \text{ch } W_{r,p;\theta}(0)(z q^{-p\iota}, q), \end{aligned} \quad (4.32)$$

где в последнем равенстве применено преобразование спектрального потока (2.4). Далее, замечательное свойство выражения (4.19) состоит в том, что оно имеет хорошо определенный предел при $\iota \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{\iota \rightarrow \infty} \text{ch } W_{r,p;\theta}(\iota)(z, q) &= z^{\frac{1-r+2\theta}{p}-\theta} q^{(1-\frac{2}{p})\frac{\theta^2-\theta}{2}-\theta\frac{1-r}{p}} \times \\ &\times \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{\substack{N_1 \geq \dots \geq N_{p-2} \in \mathbb{Z} \\ N_1 + \dots + N_{p-2} = n}} \frac{z^n q^{\frac{1}{2}n^2 - \theta n + \sum_{m=1}^{p-2} N_m^2 + \frac{1}{2} \sum_{m=r}^{p-2} N_m - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{r-1} N_m}}{(q)^{N_1-N_2} (q)^{N_2-N_3} \dots (q)^{N_{p-3}-N_{p-2}} (q)^\infty} \end{aligned} \quad (4.33)$$

(где зависимость от θ восстановлена в соответствии со спектральным потоком).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из существования разреженного базиса вытекает следующий факт о конструкции антисимметрических многочленов, удовлетворяющих условиям (4.3). Пусть $\mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_n \rangle^{(p)}$ — многочлены из $\mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$, удовлетворяющие (4.3). Имеется ассоциативное умножение на кососимметрических многочленах: при $f \in \mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ и $g \in \mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_{n'} \rangle$ определим $f * g \in \mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_{n+n'} \rangle$ как

$$\begin{aligned} (f * g)(x_1, \dots, x_{n+n'}) &= \\ &= \text{Alt}_{x_1, \dots, x_{n+n'}} \left(f(x_1, \dots, x_n) g(x_{n+1}, \dots, x_{n+n'}) \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ n+1 \leq i' \leq n+n'}} (x_i - x_{i'}) \right), \end{aligned} \quad (4.34)$$

где Alt означает альтернирование. Например, при $n = 2$ и $n' = 1$

$$\begin{aligned} (f * g)(x_1, x_2, x_3) &= f(x_1, x_2) g(x_3) (x_1 - x_3) (x_2 - x_3) + \\ &+ f(x_2, x_3) g(x_1) (x_2 - x_1) (x_3 - x_1) - \\ &- f(x_1, x_3) g(x_2) (x_1 - x_2) (x_3 - x_2). \end{aligned} \quad (4.35)$$

Далее, если $f_1 \in \mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_{n_1} \rangle^{(p_1)}$ и $f_2 \in \mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_{n_2} \rangle^{(p_2)}$, то легко видеть, что многочлен $f_1 * f_2$ лежит в $\mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_{n_1+n_2} \rangle^{(p_1+p_2-2)}$, т.е.

$$*: \mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_{n_1} \rangle^{(p_1)} \times \mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_{n_2} \rangle^{(p_2)} \rightarrow \mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_{n_1+n_2} \rangle^{(p_1+p_2-2)}. \quad (4.36)$$

Вследствие леммы о разреженном базисе имеется более сильное утверждение: отображение

$$*: \bigoplus_{\substack{n_1, n_2 \geq 1 \\ n_1 + n_2 = n}} \mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_{n_1} \rangle^{(p_1)} \times \mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_{n_2} \rangle^{(p_2)} \rightarrow \mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_n \rangle^{(p_1+p_2-2)} \quad (4.37)$$

является *эпиморфизмом*. Польза от этой конструкции определяется тем, что при $p = 3$ многочлены, удовлетворяющие (4.3), известны явно (см. (4.7)).

4.5. Полубесконечная конструкция для $\widehat{sl}(2)$ -алгебры [1]. Для $\widehat{sl}(2)$ -алгебры

$$\begin{aligned} [h_i, e_n] &= e_{n+i}, & [h_i, f_n] &= -f_{n+i}, \\ [e_i, f_j] &= 2h_{i+j} + ki\delta_{i+j,0}, & [h_i, h_j] &= \frac{1}{2}ki\delta_{i+j,0} \end{aligned} \quad (4.38)$$

уровня k имеется полубесконечная конструкция для всякого унитарного представления $\mathfrak{L}_{r,k}$ (где $1 \leq r \leq k+1$). Основным элементом конструкции являются полубесконечные формы от *коммутирующих* элементов $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, подчиненных связям, следующим из условий

$$f(z)^{k+1} = 0 \quad \text{при} \quad f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n z^{-n-1}. \quad (4.39)$$

Полубесконечное пространство порождено элементами $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ из векторов $|r, k|_\iota\rangle_{\widehat{sl}(2)}$ таких, что $f_{2\iota+i}|r, k|_\iota\rangle_{\widehat{sl}(2)} = 0$, $i \geq 1$, и

$$(f_{2\iota})^r |r, k|_\iota\rangle_{\widehat{sl}(2)} = 0, \quad (4.40)$$

$$(f_{2\iota-1})^{k-r+1} (f_{2\iota})^{r-1} |r, k|_\iota\rangle_{\widehat{sl}(2)} = |r, k|_{\iota-1}\rangle_{\widehat{sl}(2)}. \quad (4.41)$$

В более формальных терминах имеется теорема, аналогичная теореме 1. Пусть $F(k)$ — алгебра, порожденная элементами $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ по модулю (4.39) и обратимым оператором U таким, что $U f_n U^{-1} = f_{n+1}$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть M — представление алгебры $F(k)$, индуцированное из тривиального одномерного представления алгебры $(f_n)_{n \geq 0}$ (на вакуумном векторе $|0\rangle$). Пусть C_r ($1 \leq r \leq k+1$) — $F(k)$ -подмодуль, порожденный из вектора $f_{-1}^r |0\rangle$, и пусть $N_{r,k}$ — $F(k)$ -подмодуль, порожденный из набора векторов

$$f_{\alpha-2}^{k-r+1} f_{\alpha-1}^{r-1} |\alpha\rangle - |\alpha-2\rangle, \quad \alpha \in \mathbb{Z},$$

где $|\alpha\rangle = U^\alpha|0\rangle$. Факторпространство $M/(N_{r,k} + C_r)$ является представлением алгебры $\widehat{sl}(2)_k$ и, более того, изоморфно прямой сумме унитарных $\widehat{sl}(2)_k$ -представлений,

$$M(r, k) \equiv \frac{M}{N_{r,k} + C_r} = \bigoplus_{\theta=0}^1 \mathfrak{L}_{r,k;\theta} = \mathfrak{L}_{r,k} \oplus \mathfrak{L}_{k+2-r,k}. \quad (4.42)$$

В полубесконечном $\widehat{sl}(2)_k$ -пространстве также существует мономиальный базис, состоящий из разреженных мономов [1]; приведенное выше для $N = 2$ алгебры доказательство этого утверждения с минимальными модификациями справедливо и в случае $\widehat{sl}(2)$ -алгебры. Конструкция для действия $N = 2$ алгебры на полубесконечном пространстве может быть легко перенесена и на случай $\widehat{sl}(2)$ -алгебры (см. п. 5.5).

5. ДЕЙСТВИЕ $N = 2$ АЛГЕБРЫ НА ПРОСТРАНСТВЕ $W_{r,p;\theta}$

Накладываемые на полубесконечную конструкцию связи а priori не подсказывают, что пространство является представлением какой бы то ни было алгебры, однако для связей (1.1) такое представление можно обнаружить.

ТЕОРЕМА 6. *Полубесконечное пространство $W_{r,p;\theta}$ является модулем над $N = 2$ алгеброй.*

Задача построения $N = 2$ действия на пространстве $W_{r,p;\theta}$ нетривиальна, поскольку предстоит определить действие генераторов $\mathcal{Q}_n$, $\mathcal{L}_n$ и $\mathcal{H}_n$ на состояниях $\mathcal{G}_{i_1}\mathcal{G}_{i_2}\dots\mathcal{G}_{i_m} \times |r, p; \theta| \iota\rangle_{\infty/2}$, построенных только из $\mathcal{G}_n$, и показать, что это действие можно продвинуть на фактор по идеалу S^p , порожденному S_a^p . Действие $N = 2$ алгебры на $W_{r,p;\theta}$ определяется в несколько шагов. Основным средством здесь является *положительная фильтрация* на $W_{r,p;\theta}$ конечномерными подпространствами $W_{r,p;\theta}^+[\iota]$ (аналогами модулей Демазюра, см. [49]–[51]), позволяющая переписать любой элемент из $W_{r,p;\theta}$ в виде линейной комбинации полубесконечных форм, содержащих только неотрицательные моды $\mathcal{G}_{n \geq 0}$. Следующая проблема состоит во взятии фактора, т.е. в проверке независимости действия от выбранного представителя состояния в терминах неотрицательных $\mathcal{G}$ -мод. В п. 5.2 определяется действие части $N = 2$ генераторов с помощью дифференциальных операторов, действующих на конечномерных подпространствах, факторами которых являются подпространства из положительной фильтрации. Чтобы доказать, что эти дифференциальные операторы можно продвинуть на фактор, в п. 5.3 берется двойственное пространство и используется функциональная реализация. Затем в п. 5.4 показано, что действие всей $N = 2$ алгебры на всем полубесконечном пространстве можно непротиворечивым образом собрать из “частичных” действий на подпространствах. Таким образом, в частности, строится действие генераторов $\mathcal{Q}_{n \geq 0}$; вместе с $\mathcal{G}_{n \leq 0}$, которые действуют на полубесконечном пространстве по определению, эти операторы порождают всю $N = 2$ алгебру, и остается только проверить, что их действие на $W_{r,p;\theta}$ — это в точности действие $N = 2$ алгебры. Мы покажем, что необходимые для этого соотношения выполнены на любом векторе из полубесконечного пространства.

5.1. Положительная фильтрация. Пусть $W_{r,p;\theta}^+[\iota] \subset W_{r,p;\theta}$ — подпространство, порожденное из экстремального состояния $|r, p; \theta|_\iota\rangle_{\infty/2}$ генераторами $\mathcal{G}_{\geq 0} \in \mathfrak{g}(p)$. Соотношения (3.4) при $\iota \geq 1$ определяют последовательность вложений

$$W_{r,p;\theta}^+[0] \subset \dots \subset W_{r,p;\theta}^+[\iota] \subset W_{r,p;\theta}^+[\iota + 1] \subset \dots \quad (5.1)$$

ЛЕММА 4. *Последовательность (5.1) является фильтрацией на пространстве $W_{r,p;\theta}$.*

Таким образом, каждое состояние в $W_{r,p;\theta}$ можно представить как линейную комбинацию мономов, содержащих только неотрицательные моды $\mathcal{G}_{n \geq 0}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Злоупотребляя терминологией, будем говорить “полубесконечная форма $\mathcal{G}_{i_m} \dots \mathcal{G}_{i_1} |r, p; \theta|_\iota\rangle_{\infty/2}$ ”, имея в виду ее *представителя* в свободно-порожденном пространстве, фактором которого является $W_{r,p;\theta}$. Утверждение леммы состоит в том, что каждая полубесконечная форма имеет представителя, выраженного только через неотрицательные моды $\mathcal{G}_n$, т.е. представителя каждого состояния $\mathcal{G}_{i_m} \dots \mathcal{G}_{i_1} \times |r, p; \theta|_\iota\rangle_{\infty/2} \in W_{r,p;\theta}$ можно выбрать из некоторого пространства $W_{r,p;\theta}^+[\iota']$. Если $\iota < 0$, то равенство (3.4) позволяет переписать состояние как $\mathcal{G}_{i_m} \dots \mathcal{G}_{i_1} \cdot \mathcal{G}_{\iota p + \theta + 1} \dots \mathcal{G}_{\iota p + \theta + p - r - 1} \dots \mathcal{G}_{\iota' p + \theta - r + 1} \dots \mathcal{G}_{\iota' p + \theta - 1} |r, p; \theta|_{\iota'}\rangle_{\infty/2}$ с $\iota' \geq 0$. Поэтому можно считать, что $\iota \geq 0$. Выберем тогда ближайшую к $|r, p; \theta|_\iota\rangle_{\infty/2}$ отрицательную моду $\mathcal{G}_{i_a}$ (т.е. $i_a < 0$, но $i_b \geq 0$ при всех $a > b \geq 1$) и рассмотрим состояние $\mathcal{G}_{i_a} \dots \mathcal{G}_{i_1} |r, p; \theta|_\iota\rangle_{\infty/2}$. Переписывая его (снова пользуясь (3.4)) в виде

$$\begin{aligned} & \mathcal{G}_{i_a} \dots \mathcal{G}_{i_1} \mathcal{G}_{\iota p + \theta + 1} \dots \mathcal{G}_{\iota p + \theta + p - r - 1} \mathcal{G}_{\iota p + \theta + p - r + 1} \dots \mathcal{G}_{(\iota+1)p + \theta - 1} |r, p; \theta|_{\iota+1}\rangle_{\infty/2} = \\ & = (-1)^{a-1} \mathcal{G}_{i_{a-1}} \dots \mathcal{G}_{i_1} \times \\ & \times \underbrace{\mathcal{G}_{i_a} \mathcal{G}_{\iota p + \theta + 1} \dots \mathcal{G}_{\iota p + \theta + p - r - 1} \mathcal{G}_{\iota p + \theta + p - r + 1} \dots \mathcal{G}_{(\iota+1)p + \theta - 1}}_{\text{}} |r, p; \theta|_{\iota+1}\rangle_{\infty/2}, \quad (5.2) \end{aligned}$$

применим основное тождество $S_A^p = 0$ при $A = (p-2)(p\iota + \theta + p) - p(p-1)/2 + r + i_a$ к выделенным модам. В результате получим линейную комбинацию состояний, в каждом из которых самая правая отрицательная мода $\mathcal{G}_{i_{a'}}$ такова, что $i_a < i_{a'}$ (это так, поскольку в типичном члене $\text{coeff} \cdot \mathcal{G}_{j_0} \mathcal{G}_{j_1} \dots \mathcal{G}_{j_{p-r-1}} \mathcal{G}_{j_{p-r+1}} \dots \mathcal{G}_{j_{p-1}}$, следующем из применения условия $S_A^p = 0$, имеем $j_b < \iota p + \theta + b$ при $1 \leq b \leq p-1$, $b \neq r$, тогда как сумма $\sum_{b \geq 0} j_b$ фиксирована; таким образом, $j_0 > i_a$). Повторяя эту процедуру с каждым из получающихся членов, имеем произведение $\mathcal{G}_{i_m} \dots \mathcal{G}_{i_{a+1}}$, примененное к линейной комбинации состояний из некоторых $W_{r,p;\theta}^+[\iota']$. Эта процедура затем повторяется для $\mathcal{G}_{i_{a+1}}$ и т.д. В итоге получаем состояния, принадлежащие *конечной* сумме $\sum_{\iota'} W_{r,p;\theta}^+[\iota']$, а следовательно, некоторому пространству $W_{r,p;\theta}^+[\iota'']$ при достаточно большом ι'' .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Выбор мод $\mathcal{G}_{n \geq 0}$ ничем не выделен, для любого $\mu \geq 0$ точно так же существует фильтрация подпространствами, порожденными модами $\mathcal{G}_{n \geq \mu}$. Обозначим ее как

$$W_{r,p;\theta}^{(\mu)}[0] \subset \dots \subset W_{r,p;\theta}^{(\mu)}[\iota] \subset W_{r,p;\theta}^{(\mu)}[\iota + 1] \subset \dots, \quad (5.3)$$

Рис. 2. Подпространство $W_{r,p;\theta}^{(0)}[l] = W_{r,p;\theta}^+[l]$ порождено модами $G_0, \dots, G_{l p + \theta - 1}$.

так что построенная выше положительная фильтрация соответствует $\mu = 0$, $W_{r,p;\theta}^+[l] \equiv W_{r,p;\theta}^{(0)}[l]$ (см. рис. 2). Эти фильтрации играют ключевую роль при построении $N = 2$ действия.

Приведем несколько примеров того, как полубесконечные формы переписываются через положительные моды. Напомним, что состояния $|r, p; \theta|_l\rangle$ определены в (3.1)–(3.4). При $p = 3$ и $r = 1$ имеем $|1, 3; 0|_{-1}\rangle = (1/24)G_1G_2G_3G_4|1, 3; 0|3\rangle - (3/40)G_1G_2G_3G_6G_8 \times |1, 3; 0|4\rangle$. Сложность выражений в терминах положительных мод нарастает весьма быстро, как видно, например, из следующего равенства:

$$\begin{aligned} G_{-4}|1, 3; 0|0\rangle = & -\frac{9}{125}G_1G_2G_3G_4G_8|1, 3; 0|4\rangle - \frac{818}{17325}G_1G_2G_3G_5G_7|1, 3; 0|4\rangle + \\ & + \frac{4}{2475}G_1G_2G_4G_5G_6|1, 3; 0|4\rangle - \frac{66}{2275}G_1G_2G_3G_4G_8G_{12}|1, 3; 0|5\rangle + \\ & + \frac{12498}{175175}G_1G_2G_3G_5G_9G_{11}|1, 3; 0|5\rangle + \frac{342}{2275}G_1G_2G_3G_6G_8G_{11}|1, 3; 0|5\rangle + \\ & + \frac{24769}{175175}G_1G_2G_3G_6G_9G_{10}|1, 3; 0|5\rangle + \frac{21}{3575}G_1G_2G_5G_6G_8G_9|1, 3; 0|5\rangle - \\ & - \frac{19}{3185}G_1G_3G_4G_6G_8G_9|1, 3; 0|5\rangle + \frac{4808}{175175}G_1G_3G_5G_6G_7G_9|1, 3; 0|5\rangle - \\ & - \frac{3}{3185}G_2G_3G_4G_5G_8G_9|1, 3; 0|5\rangle - \frac{6}{2275}G_2G_3G_5G_6G_7G_8|1, 3; 0|5\rangle + \\ & + \frac{9}{280}G_1G_2G_3G_5G_9G_{12}G_{15}|1, 3; 0|6\rangle - \frac{171}{980}G_1G_2G_3G_6G_9G_{12}G_{14}|1, 3; 0|6\rangle - \\ & - \frac{171}{1960}G_1G_3G_5G_6G_9G_{11}G_{12}|1, 3; 0|6\rangle + \frac{9}{980}G_2G_3G_5G_6G_9G_{10}G_{12}|1, 3; 0|6\rangle. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем состояния из $W_{1,3;0}^+[l = 6]$.

5.2. Дифференциальные операторы для генераторов на подпространствах. Для доказательства теоремы 6 сначала построим действие *части* $N = 2$ генераторов на каждом из пространств $W_{r,p;\theta}^{(\mu)}[l]$ из (5.3) (см. рис. 2 при $\mu = 0$). В $W_{r,p;\theta}^{(\mu)}[l]$ определим действие генераторов $Q_{-\mu}, Q_{\mu+1}, \dots, Q_{l p + \theta - 1}$, $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \dots$, $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots$ и

$\mathcal{G}_\mu, \mathcal{G}_{\mu+1}, \dots, \mathcal{G}_{\iota p+\theta-1}$ (действие последних тавтологическое), которое в итоге окажется частью действия $N = 2$ алгебры на всем полубесконечном пространстве $W_{r,p;\theta}$.

В качестве первого шага “стандартизуем” пространство, применив к ним спектральный поток, отображающий каждое $W_{r,p;\theta}^{(\mu)}[l]$ в пространство $V_{r,p}^N$, порожденное модами $\mathcal{G}_{-1}, \dots, \mathcal{G}_{-N}$. Пусть $V(N)$ (где N – положительное целое число) – подпространство в $W(0)$, порожденное модами $\mathcal{G}_{-1}, \mathcal{G}_{-2}, \dots, \mathcal{G}_{-N}$ из соответствующего вакуумного вектора $|\rangle$. Как и в п. 4.1, $W(0)$ обозначает свободно-порожденное пространство, а $W_{r,p}(0)$ является фактором $W(0)$ по подпространству $\mathcal{I}_{r,p}|\rangle$, где $\mathcal{I}_{r,p}$ – идеал, порожденный элементами

$$\begin{aligned} \bar{S}_a^p &= \sum_{\substack{n_0 < \dots < n_{p-2} \leq -1 \\ n_0 + \dots + n_{p-2} = a}} \left(\prod_{i < j} (n_i - n_j) \right) \mathcal{G}_{n_0} \dots \mathcal{G}_{n_{p-2}}, \\ a &= -\frac{p(p-1)}{2}, -\frac{p(p-1)}{2} - 1, \dots, \end{aligned} \quad (5.4)$$

и элементом $S_r = \mathcal{G}_{-r} \mathcal{G}_{-r+1} \dots \mathcal{G}_{-1}$. Определим $V_{r,p}^N$ как подпространство в $W_{r,p}(0)$, порожденное из вакуумного вектора $|\rangle \equiv |r, p; 0|0\rangle$ модами $\mathcal{G}_{-1}, \dots, \mathcal{G}_{-N}$. Таким образом, $V_{r,p}^N = V(N)/\mathcal{I}_{r,p}(N)$, где $\mathcal{I}_{r,p}(N) = V(N) \cap \mathcal{I}_{r,p}$ (здесь использовано обозначение $\mathcal{I}_{r,p} \equiv \mathcal{I}_{r,p}|\rangle$), или эквивалентным образом

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{I}_{r,p} & \longrightarrow & W(0) & \longrightarrow & W_{r,p}(0) \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{I}_{r,p}(N) & \longrightarrow & V(N) & \longrightarrow & V_{r,p}^N \longrightarrow 0. \end{array} \quad (5.5)$$

Через ∂_n будем обозначать оператор $\partial/\partial \mathcal{G}_n$ на свободно-порожденном пространстве $W(0)$ и его подпространствах. Хотя операторы ∂_n , конечно, не действуют на факторпространстве $V_{r,p}^N$, тем не менее имеются дифференциальные операторы, построенные из ∂_n и $\mathcal{G}_m$, которые там действуют, и они оказываются частью $N = 2$ генераторов.

ЛЕММА 5. *Имеется хорошо определенное действие на пространстве $V_{r,p}^N$ дифференциальных операторов*

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_\ell^{(r,p,N)} &= q^{(r,p,N)} \delta_{\ell,N} \partial_{-N} + \sum_{\substack{n, m = -N \\ m+n+\ell \leq -1}}^{-1} (m-n) \mathcal{G}_{\ell+n+m} \partial_n \partial_m, \\ \ell &= N, N+1, \dots, 2N-1, \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n^{(r,p,N)} &= \sum_{m=-N}^{-n-1} (n-m) \mathcal{G}_{n+m} \partial_m + l^{(r,p,N)} \delta_{n,0}, \\ \mathcal{H}_n^{(r,p,N)} &= \sum_{m=-N}^{-n-1} \mathcal{G}_{n+m} \partial_m + h^{(r,p,N)} \delta_{n,0}, \end{aligned} \quad n \geq 0, \quad (5.7)$$

где (при произвольном $h^{(r,p,N)}$)

$$l^{(r,p,N)} = \frac{p-2}{p}N + Nh^{(r,p,N)} - N\frac{p-r-1}{p}, \quad (5.8)$$

$$q^{(r,p,N)} = \frac{p-2}{p}(N^2 + N) - 2N\frac{p-1-r}{p}. \quad (5.9)$$

Вместе с $\mathcal{G}_\ell$ при $\ell \geq -N$ эти операторы удовлетворяют соответствующим коммутационным соотношениям из (2.1).

Входящие в положительную фильтрацию пространства $W_{r,p;\theta}^+[l]$ связаны с $V_{r,p}^N$ при $N = \iota p + \theta$ преобразованиями спектрального потока, а именно

$$U_{-\iota p - \theta} W_{r,p;\theta}^+[l] \simeq V_{r,p}^{\iota p + \theta}. \quad (5.10)$$

Эти изоморфизмы позволяют перенести операторы на определенные выше пространства $W_{r,p;\theta}^+[l]$.

Основная сложность в доказательстве леммы 5 связана с тем, что идеал $\mathcal{I}_{r,p}(N) \subset V(N)$ не описывается явно (ср. с замечаниями перед теоремой 3). Идея доказательства выражена в более компактной форме для $\widehat{sl}(2)$ -алгебры в п. 5.5.

5.3. Двойственные к дифференциальным операторы на функциональных пространствах. Для доказательства леммы 5 заметим прежде всего, что значение $q^{(r,p,N)}$ фиксировано тем требованием, чтобы $\mathcal{Q}_N^{(r,p,N)}$ сохраняли соотношения $\overline{S}_a^p = 0$ (что видно из непосредственного применения дифференциальных операторов); вид $l^{(r,p,N)}$ выбирается так, чтобы коммутатор $[\mathcal{Q}_N^{(r,p,N)}, \mathcal{G}_{-N}^{(r,p,N)}]$ был тем же, что и в $N = 2$ алгебре. Однако $h^{(r,p,N)}$ пока произвольно; более того, центральный член, возникающий в последнем коммутаторе, можно включить в $\mathcal{L}_0^{(r,p,N)}$ и $\mathcal{H}_0^{(r,p,N)}$, и поэтому $N = 2$ центральный заряд остается пока неопределенным. Таким образом, операторы $\mathcal{G}_\ell^{(r,p,N)}$, $\mathcal{Q}_\ell^{(r,p,N)}$, $\mathcal{L}_\ell^{(r,p,N)}$ и $\mathcal{H}_\ell^{(r,p,N)}$ сохраняют подпространство $V(N)$. Проверке подлежит тот факт, что они сохраняют идеал $\mathcal{I}_{r,p}$. Мы заменим это утверждение двойственным и применим функциональную реализацию из п. 4.1. Дуализация (5.5) дает

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ & & W_{r,p}(0)^* \cap \mathcal{J}(N) & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ 0 & \longrightarrow & W_{r,p}(0)^* & \longrightarrow & W(0)^* & \longrightarrow & \mathcal{I}_{r,p}^* \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & V_{r,p}^{N*} & \longrightarrow & V(N)^* & \longrightarrow & \mathcal{I}_{r,p}(N)^* \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & & & \\ & & 0. & & & & \end{array} \quad (5.11)$$

Свойство операторов иметь хорошо определенное действие на факторе переформулируется как условие, что двойственные им операторы сохраняют подпространство $W_{r,p}(0)^*$ кососимметрических многочленов, удовлетворяющих условиям (4.3) и (4.4), по модулю подпространства $\mathcal{J}(N)$, порожденного мономами $x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$, в которых $i_j \geq N$ по крайней мере для одного j (точнее, по модулю его пересечения с пространством кососимметрических многочленов).

Пусть $\mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_M \rangle^{(p)}$ по-прежнему обозначает многочлены из $\mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_M \rangle$, удовлетворяющие условию (4.3). Мы собираемся установить, что при $f \in \mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_M \rangle^{(p)}$

$$\mathcal{K}_n^{(r,p,N)*} f \in \mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_M \rangle^{(p)}, \quad \mathcal{K}_n = \mathcal{H}_n \text{ или } \mathcal{L}_n, \quad (5.12)$$

тогда как $\mathcal{Q}_\ell$ сохраняют условия только по модулю $\mathcal{J}(N)$:

$$\mathcal{Q}_\ell^{(r,p,N)*} f \in \mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_{M+1} \rangle^{(p)} + \mathcal{J}(N), \quad (5.13)$$

так что выражение

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \dots \frac{\partial^{p-2}}{\partial x_{p-1}^{p-2}} (\mathcal{Q}_\ell^{(r,p,N)*} f)(x_1, \dots, x_{M+1}) \Big|_{x_1=x_2=\dots=x_{p-1}}$$

обращается в нуль только по модулю $\mathcal{J}(N - p + 2)$. Выведем для этого подходящую форму двойственных операторов.

Операторы, двойственные к $\mathcal{G}_i$, действуют между M -аргументными подпространствами в $W(0)^*$ как

$$\mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_{M-1} \rangle dx_1 \dots dx_{M-1} \xleftarrow{\mathcal{G}_i^*} \mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_M \rangle dx_1 \dots dx_M, \quad (5.14)$$

$$(\mathcal{G}_{-\ell}^{(r,p,N)*} f)(x_1, \dots, x_{M-1}) = \frac{1}{(\ell-1)!} \frac{\partial^{\ell-1}}{\partial x_M^{\ell-1}} f(x_1, \dots, x_M) \Big|_{x_M=0}. \quad (5.15)$$

Двойственные к $\partial_{-\ell} = \partial / \partial \mathcal{G}_{-\ell}$ операторы суть попарно антикоммутирующие дифференциалы

$$\mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_M \rangle dx_1 \dots dx_M \xrightarrow{\partial_{-\ell}^*} \mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_{M+1} \rangle dx_1 \dots dx_{M+1}, \quad (5.16)$$

действующие как

$$(\partial_{-\ell}^* f)(x_1, \dots, x_{M+1}) = \sum_{j=1}^{M+1} (-1)^{M+1-j} f([\mathbf{x}]_j^{(M+1)}) x_j^{\ell-1}, \quad (5.17)$$

где используются обозначения

$$\begin{aligned} [\mathbf{x}]^{(M)} &= (x_1, \dots, x_M), & [\mathbf{x}]_i^{(M)} &= (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_M), \\ [\mathbf{x}]_{ij}^{(M)} &= (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_M), & 1 \leq i < j \leq M. \end{aligned}$$

Двойственное действие операторов $\mathcal{H}_n$ и $\mathcal{L}_n$ дается формулами

$$\mathcal{H}_n^* f = (p_n + \mathfrak{h}^{(r,p,N)} \delta_{n,0}) \cdot f, \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_n^* f)(x_1, \dots, x_M) = & \left((2n+1)p_n(x_1, \dots, x_M) + \right. \\ & \left. + \mathfrak{l}^{(r,p,N)} \delta_{n,0} + \sum_{j=1}^M x_j^{n+1} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) f(x_1, \dots, x_M), \end{aligned} \quad (5.19)$$

где $g \cdot h$ обозначает “поточечное” умножение (симметрического и кососимметрического многочленов) и введены симметрические многочлены

$$p_r(x_1, \dots, x_M) = x_1^r + \dots + x_M^r. \quad (5.20)$$

Очевидно, что оператор $\mathcal{H}_n$ при $n \geq 0$ отображает $\mathbb{W}_{r,p}(0)^*$ в себя. Проверка этого утверждения для $\mathcal{L}_n$ производится следующим образом. Расцепим суммирование (5.19):

$$\sum_{j=1}^M \frac{\partial}{\partial x_j} f(x_1, \dots, x_M) = \left(\sum_{j=1}^{p-1} + \sum_{j=p}^M \right) \frac{\partial}{\partial x_j} f(x_1, \dots, x_M). \quad (5.21)$$

Каждый член из второй суммы в правой части (5.21) не нарушает условий

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \dots \frac{\partial^{p-2}}{\partial x_{p-1}^{p-2}} f \right|_{x_1=x_2=\dots=x_{p-1}} = 0.$$

К первой же сумме применим оператор

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \dots \frac{\partial^{p-2}}{\partial x_{p-1}^{p-2}},$$

прокоммутируем его с

$$\sum_{j=1}^{p-1} x_j^{n+1} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

и ограничим полученное выражение на $(p-1)$ -диагональ $x_1 = x_2 = \dots = x_{p-1} = x$, после чего сумма

$$\sum_{j=1}^{p-1} x_j^{n+1} \frac{\partial}{\partial x_j} = x^{n+1} \sum_{j=1}^{p-1} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

принимает вид производной вдоль диагонали, откуда

$$\sum_{j=1}^{p-1} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \dots \frac{\partial^{p-2}}{\partial x_{p-1}^{p-2}} f \Big|_{x_1=x_2=\dots=x_{p-1}} = 0.$$

Тем самым свойство (5.12) установлено для операторов $\mathcal{L}_n$.

В отношении операторов $\mathcal{Q}_\ell^{(r,p,N)*}$ аналогичные рассуждения более длинные, и мы их опустим, приведя только удобную для работы форму этих операторов на пространстве многочленов. Непосредственно следующее из (5.15) выражение

$$\begin{aligned} (\mathcal{Q}_\ell^{(r,p,N)*} f)(x_1, \dots, x_{M+1}) &= \mathbf{q}^{(r,p,N)} \delta_{\ell,N} \sum_{j=1}^{M+1} (-1)^{M+1-j} f([\mathbf{x}]_j^{(M+1)}) x_j^{\ell-1} + \\ &+ \sum_{1 \leq i < j \leq M+1} (-1)^{i+j} \sum_{\substack{m,n=1 \\ m+n-\ell \geq 1}}^N \left(x_j \frac{\partial}{\partial x_j} - x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \times \\ &\times \frac{x_i^{n-1} x_j^{m-1} + x_i^{m-1} x_j^{n-1}}{(n+m-\ell-1)!} D_M^{n+m-\ell-1} f([\mathbf{x}]_{ij}^{(M+1)}, 0), \end{aligned} \quad (5.22)$$

где $D_i f(\xi_1, \dots, \xi_M) = (df(\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, \xi_i + t, \xi_{i+1}, \dots, \xi_M)/dt)|_{t=0}$, путем добавления подходящих членов из $\mathcal{J}(N)$ можно переписать (с точностью до знакового множителя $(-1)^{M+1}$) в виде

$$\mathcal{Q}_\ell^{(r,p,N)*} f = \sum_{m=1}^{\ell} (\ell + 1 - 2m) p_{m-1} \cdot d_{\ell-m} f - \mathbf{q}^{(r,p,N)} \delta_{\ell,N} d_{\ell-1} f, \quad (5.23)$$

где дифференциалы d_m определены как ∂_{-m-1}^* с точностью до знака,

$$(d_m f)(x_1, \dots, x_{M+1}) = \sum_{j=1}^{M+1} (-1)^{j+1} x_j^m f([\mathbf{x}]_j), \quad m \geq 0. \quad (5.24)$$

Наконец, условие (4.4) на многочлены легче всего рассматривать в терминах симметрического многочлена, соответствующего данному кососимметрическому (см. (4.5)); это условие определяет обращение многочлена в нуль в начале координат, что можно переформулировать в терминах фильтрации (4.17). Тогда несложно непосредственно проверить, что операторы сохраняют эти условия обращения в нуль.

5.4. Склейка действия алгебры на пространстве $W_{r,p;\theta}$. Для завершения доказательства теоремы 6 построим действие $N = 2$ генераторов на всем полубесконечном пространстве $W_{r,p;\theta}$ склейкой действий на каждом из пространств, входящих в фильтрацию (5.3). Построение разбивается на несколько последовательных шагов.

Поскольку зависимость от параметра спектрального потока θ не влияет на общую структуру результатов, мы временно положим $\theta = 0$ для упрощения формул. Таким образом, рассматриваются полубесконечные пространства $W_{r,p} \equiv W_{r,p;0}$, а зависимость от θ будет восстановлена ниже в соответствии со спектральным потоком. Будем писать $|r, p|_{\infty/2}$ вместо $|r, p; 0|_{\infty/2}$.

5.4.1. Для данной полубесконечной формы $|x\rangle \in W_{r,p}$ с биградуировкой заряд-уровень (h, ℓ) выберем ι и $\mu < \iota p - 1$ так, чтобы все состояния в этой биградуировке лежали в $W_{r,p}^{(\mu)}[\iota]$. Желая определить состояние $\mathcal{O}_n |x\rangle$ при $\mathcal{O} = \mathcal{L}, \mathcal{H}$ или $\mathcal{Q}$, будем также

требовать, чтобы пространство $W_{r,p}^{(\mu)}[\iota]$ включало и все состояния в соответствующей биградуировке (равной $(h, \ell - a)$ для $\mathcal{O} = \mathcal{L}$ или $\mathcal{H}$ и $(h - 1, \ell - a)$ для $\mathcal{Q}$). Этого всегда можно добиться, увеличивая ι или μ .

Аналогично (5.10) можно использовать преобразование спектрального потока, чтобы отобразить состояние $|r, p|_{\iota}\rangle_{\infty/2}$ в $|r, p|0\rangle_{\infty/2}$ и все подпространство $W_{r,p}^{(\mu)}[\iota]$ в соответствующее пространство $V_{r,p}^N$ из п. 5.2:

$$U_{-\iota p} W_{r,p}^{(\mu)}[\iota] \simeq V_{r,p}^{\iota p - \mu}. \quad (5.25)$$

В пространстве $V_{r,p}^{\iota p - \mu}$ применим оператор $U_{-\iota p} \mathcal{O}_n U_{\iota p}$ к $U_{-\iota p}|x\rangle$, используя дифференциальные операторы из леммы 5, а затем преобразуем результат обратно в $W_{r,p}^{(\mu)}[\iota]$ с помощью спектрального потока. Таким образом, полагаем

$$\mathcal{O}_n|x\rangle = U_{\iota p} \left((U_{-\iota p} \mathcal{O}_n U_{\iota p})^{(r,p,\iota p - \mu)} U_{-\iota p}|x\rangle \right), \quad (5.26)$$

где

$$\mathcal{O}_n = \mathcal{L}_n, \quad n \geq 0; \quad \mathcal{O}_n = \mathcal{H}_n, \quad n \geq 0; \quad \mathcal{O}_n = \mathcal{Q}_n, \quad n \geq -\mu.$$

Верхний индекс в (5.26) означает, что применяется соответствующий дифференциальный оператор из леммы 5.

Операторы в формулах (5.6), (5.7) зависят от $N = \iota p - \mu$ и включают дополнительный параметр $h^{(r,p,N)}$. Еще один свободный параметр возникает при применении спектрального потока: в то время как в отображении *полубесконечных форм* участвуют только соотношения $U_{\theta} \mathcal{G}_n U_{-\theta} = \mathcal{G}_{n+\theta}$ и $U_{-\iota p} |r, p|_{\iota}\rangle_{\infty/2} = |r, p|0\rangle_{\infty/2}$, которые составляют часть определения полубесконечного пространства, подразумевается, что оператор $U_{-\iota p} \mathcal{O}_n U_{\iota p}$ вычисляется с использованием формулы (2.2) для $N = 2$ спектрального потока. Отсюда происходит параметр c , который *пока является свободным*.

Замечательным образом все свободные параметры однозначно фиксируются требованием непротиворечивости. Более того, оказывается, что действие не зависит от выбранных ι и μ . Это показывается в п. 5.4.2, 5.4.3, а в п. 5.4.4, 5.4.5 устанавливается, что действие построенных генераторов определяет именно $N = 2$ алгебру.

5.4.2. Используя формулы (2.2) и (3.9), применим описанную выше процедуру для сравнения собственных значений оператора $\mathcal{H}_0$ на состояниях $|r, p|_{\iota}\rangle_{\infty/2}$ и $|r, p|_{\iota-1}\rangle_{\infty/2}$. В силу равенства (3.4) (см. также рис. 2) они различаются на $p - 2$. С другой стороны,

$$U_p \mathcal{H}_0 |r, p|_{\iota-1}\rangle_{\infty/2} = U_p \mathcal{H}_0 U_{-p} |r, p|_{\iota}\rangle_{\infty/2} = \left(\mathcal{H}_0 + \frac{c}{3} p \right) |r, p|_{\iota}\rangle_{\infty/2}, \quad (5.27)$$

что дает центральный заряд (1.2), выраженный через параметр p , входящий в основное соотношение (1.1).

Подобное же рассуждение применительно к оператору $\mathcal{L}_0$ дает

$$\begin{aligned} U_p \mathcal{L}_0 |r, p|_{\iota-1}\rangle_{\infty/2} &= U_p \mathcal{L}_0 U_p^{-1} |r, p|_{\iota}\rangle_{\infty/2} = \\ &= \left(\mathcal{L}_0 + p \mathcal{H}_0 + \frac{c}{6} (p^2 + p) \right) |r, p|_{\iota}\rangle_{\infty/2}, \end{aligned} \quad (5.28)$$

где нам уже известно s . С другой стороны, (минус) разность между собственными значениями оператора $\mathcal{L}_0$ на состояниях $|r, p|\iota - 1\rangle_{\infty/2}$ и $|r, p|\iota\rangle_{\infty/2}$ равна (см. (3.4) и рис. 2)

$$([\iota p - 1] + \dots + [(\iota - 1)p + 1]) - [\iota p - r] = \iota p(p - 1) - \frac{1}{2}p(p - 1) - \iota p + r,$$

откуда следует, что параметр $h^{(r,p,N)}$ из леммы 5 равен

$$h^{(r,p,N)} = -\frac{r - 1}{p}. \quad (5.29)$$

При таком $h^{(r,p,N)}$ из (5.8) следует, что $l^{(r,p,N)} = 0$.

Восстанавливая зависимость от θ , имеем в $W_{r,p;\theta}$ равенство

$$\mathcal{H}_0|r, p; \theta|\iota\rangle_{\infty/2} = \left(-\frac{r - 1}{p} - \frac{p - 2}{p}\theta - (p - 2)\iota\right)|r, p; \theta|\iota\rangle_{\infty/2}, \quad (5.30)$$

что дает те же собственные значения, что и в унитарном модуле (равенство (2.17)), и то же верно, как легко видеть, для собственных значений $\mathcal{L}_0$ на $|r, p; \theta|\iota\rangle_{\infty/2}$ (равенство (2.16)).

5.4.3. Кроме операторов $\mathcal{L}_0$ и $\mathcal{H}_0$, из $V_{r,p}^{\iota p - \mu}$ в $W_{r,p}$ переносится и действие всех операторов $\mathcal{L}_{\geq 0}$ и $\mathcal{H}_{\geq 0}$. Точно так же в каждом $W_{r,p}^{(\mu)}[\iota]$ получаем действие операторов $\mathcal{Q}_n$ при $n \geq -\mu$. Аргументы они зависят от пространства $V_{r,p}^{\iota p - \mu}$, в котором применялись дифференциальные операторы. Как было отмечено, равенство (5.9) следует из условия, что оператор $\mathcal{Q}_N^{(r,p,N)}$ сохраняет соотношения $\bar{S}_a^p = 0$. Замечательно, что при таком $q^{(r,p,N)}$ и при выбранном выше $h^{(r,p,N)}$ (5.29) можно переписать выражение (5.6) в виде

$$\mathcal{Q}_\ell^{(r,p,N)} = 2 \sum_{n=-N}^{-1} \left(\mathcal{L}_{n+\ell}^{(r,p,N)} - \ell \mathcal{H}_{n+\ell}^{(r,p,N)} + \frac{1}{2} \frac{p - 2}{p} (\ell^2 - \ell) \delta_{\ell+n,0} \right) \partial_n. \quad (5.31)$$

Более того, при $h^{(r,p,N)}$ вида (5.29) (и $l^{(r,p,N)} = 0$) правая часть (5.31) зависит от N только через пределы суммирования. Это означает, что дифференциальные операторы из леммы 5 коммутируют с вложениями $V_{r,p}^{N-1} \rightarrow V_{r,p}^N$. Поэтому при $n \geq 0$ операторы $\mathcal{L}_n$, $\mathcal{H}_n$ и $\mathcal{Q}_{-n}$, определенные на $W_{r,p}$ в (5.26), не зависят от ι и μ .

5.4.4. Мы показали, что для любого $\mu \in \mathbb{Z}$ операторы $\mathcal{H}_{\geq 0}$, $\mathcal{L}_{\geq 0}$, $\mathcal{G}_{\geq \mu}$ и $\mathcal{Q}_{\geq -\mu}$ хорошо определены на каждом состоянии в $W_{r,p;\theta}$; более того, эти операторы удовлетворяют $N = 2$ коммутационным соотношениям. Таким образом, имеется семейство подалгебр $N = 2$ алгебры, действующих на полубесконечном пространстве $W_{r,p;\theta}$. Остается определить действие $\mathcal{H}_{< 0}$ и $\mathcal{L}_{< 0}$ и показать, что все $N = 2$ коммутационные соотношения выполнены для операторов $\mathcal{H}_n$, $\mathcal{L}_n$, $\mathcal{G}_n$ и $\mathcal{Q}_n$ при $n \in \mathbb{Z}$.

Мы пока еще не определили коммутаторы $[\mathcal{Q}_m, \mathcal{G}_n]$ при $m + n \leq -1$, они не следуют из аргументов, основанных на спектральном потоке, и их придется вывести путем

“решения тождеств Якоби”. Покажем сначала, что операторы $\mathcal{Q}_n$ и $\mathcal{G}_n$, $n \in \mathbb{Z}$, удовлетворяют соотношениям

$$[\mathcal{G}_m, [\mathcal{G}_n, \mathcal{Q}_\ell]] = 2(m - n)\mathcal{G}_{m+n+\ell}, \quad (5.32)$$

$$[\mathcal{Q}_\ell, [\mathcal{Q}_m, \mathcal{G}_n]] = 2(\ell - m)\mathcal{Q}_{\ell+m+n}. \quad (5.33)$$

Начав с (5.33), обозначим

$$\mathcal{X}(\ell, m, n) = [\mathcal{Q}_\ell, [\mathcal{Q}_m, \mathcal{G}_n]] - 2(\ell - m)\mathcal{Q}_{\ell+m+n} \quad (5.34)$$

и покажем, что это выражение действует нулем на любом состоянии $|\alpha\rangle \in W_{r,p;\theta}$. Достаточно рассмотреть мономиальные состояния $|\alpha\rangle$. Для данных ℓ, m и n существует положительное целое μ такое, что $n \geq \mu$ и $\ell, m \geq -\mu$. Выберем любое такое μ и применим фильтрацию (5.3). Пусть $|\alpha\rangle \in W_{r,p;\theta}^{(\mu)}[\iota_0]$. Это означает, что состояние представляется как $|\alpha\rangle = \mathcal{G}_{a_1} \dots \mathcal{G}_{a_\nu} |r, p; \theta|_{\iota_0}\rangle_{\infty/2}$, где $a_j \geq \mu$. Пусть a обозначает одно из a_j .

Поскольку $a + \ell \geq 0$, $a + m \geq 0$ и $a + \ell + m + n \geq 0$, коммутационные соотношения, которые были установлены до сих пор, позволяют вычислить

$$\begin{aligned} [\mathcal{G}_a, \mathcal{X}(\ell, m, n)] &= 2[\mathcal{L}_{a+\ell} - \ell\mathcal{H}_{a+\ell}, [\mathcal{Q}_m, \mathcal{G}_n]] - 2[\mathcal{Q}_\ell, [\mathcal{L}_{a+m} - m\mathcal{H}_{a+m}, \mathcal{G}_n]] - \\ &\quad - 4(\ell - m)(\mathcal{L}_{a+\ell+m+n} - (\ell + m + n)\mathcal{H}_{a+\ell+m+n}), \end{aligned} \quad (5.35)$$

и далее, снова используя уже установленные коммутационные соотношения, имеем

$$\begin{aligned} [\mathcal{G}_a, \mathcal{X}(\ell, m, n)] &= 2(\ell - m)[\mathcal{Q}_{a+\ell+m}, \mathcal{G}_n] + 2(a - n)[\mathcal{Q}_m, \mathcal{G}_{a+\ell+n}] + \\ &\quad + 2(a - n)[\mathcal{Q}_\ell, \mathcal{G}_{a+m+n}] - 4(\ell - m)(\mathcal{L}_{a+\ell+m+n} - (\ell + m + n)\mathcal{H}_{a+\ell+m+n}). \end{aligned} \quad (5.36)$$

Получаем также, что $a + \ell + m \geq -\mu$, $a + \ell + n \geq \mu$ и $a + m + n \geq \mu$, и еще раз применяя уже установленные коммутационные соотношения, видим, что выражение (5.36) обращается в нуль.

Таким образом, при действии оператора $\mathcal{X}(\ell, m, n)$ на $|\alpha\rangle = \mathcal{G}_{a_1} \dots \mathcal{G}_{a_\nu} |r, p; \theta|_{\iota_0}\rangle_{\infty/2}$ получаем $(-1)^\nu \mathcal{G}_{a_1} \dots \mathcal{G}_{a_\nu} \mathcal{X}(\ell, m, n) |r, p; \theta|_{\iota_0}\rangle_{\infty/2}$. Но можно считать (возможно, ценой увеличения ι_0), что $\mathcal{X}(\ell, m, n) |r, p; \theta|_{\iota}\rangle_{\infty/2} = 0$, поскольку оператор $\mathcal{X}(\ell, m, n)$ отображает каждое состояние $|r, p; \theta|_{\iota}\rangle_{\infty/2}$ при $\iota \gg 0$ в биградуировку, в которой данный модуль не содержит состояний. Таким образом, $\mathcal{X}(\ell, m, n) = 0$ в $W_{r,p;\theta}$.

Чтобы доказать соотношения (5.32), обозначим $\mathcal{Y}(m, n, \ell) = [\mathcal{G}_m, [\mathcal{G}_n, \mathcal{Q}_\ell]] - 2(m - n)\mathcal{G}_{m+n+\ell}$ и непосредственно проверим, следуя (5.35), (5.36) *mutatis mutandis*, что коммутаторы $[\mathcal{G}_a, \mathcal{Y}(m, n, \ell)]$ и $[\mathcal{Q}_a, \mathcal{Y}(m, n, \ell)]$ обращаются в нуль для всех a , удовлетворяющих условиям

$$a + \ell \geq 0, \quad a + n \geq 0, \quad a + m \geq 0, \quad a + \ell + m + n \geq 0. \quad (5.37)$$

Кроме того, исследуя градуировки, видим, что $\mathcal{Y}(m, n, \ell) |r, p; \theta|_{\iota'}\rangle_{\infty/2} = 0$ при $\iota' \ll -1$. Однако отсюда еще не следует, что $\mathcal{Y}(m, n, \ell)$ обращается в нуль на любом состоянии из полубесконечного пространства. Требуется еще показать, что $\mathcal{Y}(m, n, \ell) |r, p; \theta|_{\iota}\rangle_{\infty/2} = 0$

при $\iota \gg 1$, потому что любое состояние в полубесконечном пространстве можно породить модами $\mathcal{G}_a$ из $|r, p; \theta|_{\infty/2}$ с достаточно большим ι (по сравнению со случаем $\mathcal{X}(m, n, \ell)$ проблема состоит в асимметрии полубесконечной конструкции по отношению к генераторам $\mathcal{G}_n$ и $\mathcal{Q}_n$).

Достаточно показать, что для любого $\iota \gg 1$ состояние $|r, p; \theta|_{\infty/2}$ можно получить действием мод $\mathcal{G}_a$ и $\mathcal{Q}_a$, удовлетворяющих условиям (5.37), на состояние $|r, p; \theta|_{\infty/2}$ с некоторым ι' , для которого $\ell + m + n \geq p\iota' + \theta$. Пусть M обозначает минимальное целое a , удовлетворяющее (5.37). Фиксируем такое ι , что $p\iota \geq M$. Тогда

$$\mathcal{G}_{\iota p + \theta + 1} \cdots \mathcal{G}_{\iota p + \theta + p - r - 1} \mathcal{Q}_{M + \mu} \cdots \mathcal{Q}_{M + 1} \mathcal{Q}_M |r, p; \theta|_{\infty/2} = F |r, p; \theta|_{\infty/2} \quad (5.38)$$

при

$$\iota' = -(p - 1)\iota - \theta - M - p + r + 1, \quad (5.39)$$

$$\mu = (p - 2)(p\iota + \theta + M + p - r - 1) + p - r - 2, \quad (5.40)$$

что следует из того факта, что и левая, и правая части (5.38) принадлежат к одному и тому же собственному пространству операторов $\mathcal{H}_0$ и $\mathcal{L}_0$, которое является 1-мерным подпространством в $W_{r,p;\theta}$. Если мы покажем, что $F \neq 0$ в равенстве (5.38), тогда можно будет заключить, что $\mathcal{Y}(m, n, \ell)|r, p; \theta|_{\infty/2} = 0$ при $\iota \gg 1$, так как уже было показано, что $\mathcal{Y}(m, n, \ell)$ коммутирует со всеми $\mathcal{G}_a$ и $\mathcal{Q}_a$ при $a \geq M$ и $\mathcal{Y}(m, n, \ell)|r, p; \theta|_{\infty/2} = 0$.

Проверить, что коэффициент F не равен нулю, легче всего, воспользовавшись отображением $W_{r,p;\theta} \rightarrow \mathfrak{K}_{r,p;\theta}$ в унитарный $N = 2$ модуль, при котором каждое состояние (3.1) переходит в соответствующее экстремальное состояние $|r, p; \theta|_{\infty/2} \in \mathfrak{K}_{r,p;\theta}$ (см. п. 2.4). В $\mathfrak{K}_{r,p;\theta}$ образ (5.38) выполняется при ненулевом F . Таким образом, коэффициент F в (5.38) не может равняться нулю, откуда следует, что $[\mathcal{G}_m, [\mathcal{G}_n, \mathcal{Q}_\ell]] = 2(m - n)\mathcal{G}_{m+n+\ell}$ в полубесконечном пространстве.

5.4.5. Из (5.32) и (5.33) следуют все коммутационные соотношения (2.1). Действительно, при $a < 0$ можно определить операторы

$$\mathcal{L}_a^{m,n} = \frac{1}{2(m-n)}(m[\mathcal{G}_{n+a}, \mathcal{Q}_{-n}] - n[\mathcal{G}_{m+a}, \mathcal{Q}_{-m}]), \quad m \neq n, \quad (5.41)$$

$$\mathcal{H}_a^{m,i,n} = \frac{1}{2m}([\mathcal{G}_{m+a}, \mathcal{Q}_{-m}] - 2\mathcal{L}_a^{i,n}), \quad m \neq 0. \quad (5.42)$$

Пусть A – алгебра, порожденная элементами $\mathcal{Q}_n$ и $\mathcal{G}_n$, подчиненными соотношениям (5.32) и (5.33). Из (5.32) и (5.33) следует, что при любых фиксированных $m, i, n \in \mathbb{Z}$ операторы

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_a^{m,n}, \quad \mathcal{H}_a^{m,i,n}, & \quad a < 0, \\ \mathcal{L}_j, \quad \mathcal{H}_j, & \quad j \geq 0, \\ \mathcal{Q}_j, \quad \mathcal{G}_j, & \quad j \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

удовлетворяют коммутационным соотношениям (2.1). В частности, операторы $\mathcal{L}_a^{m,n} - \mathcal{L}_a^{m',n'}$ и $\mathcal{H}_a^{m,i,n} - \mathcal{H}_a^{m',i',n'}$ коммутируют с $\mathcal{Q}_j$ и $\mathcal{G}_\ell$ и порождают коммутативный идеал Z в A , причем Z лежит в центре A . Более того, фактор A по Z совпадает с $N = 2$ алгеброй. Таким образом, A есть центральное расширение $N = 2$ алгебры вида

$$[\mathcal{G}_m, \mathcal{Q}_n] = 2\mathcal{L}_{m+n} - 2n\mathcal{H}_{m+n} + \frac{c}{3}(m^2 + m)\delta_{m+n,0} + f_{n,m}, \quad (5.43)$$

где $f_{n,m} \neq 0$ только при $n < 0$ и $m < 0$. В силу тождеств Якоби $f_{n,m} = 0$. Таким образом, $Z = 0$ и операторы $\mathcal{L}_a^m$ и $\mathcal{H}_a^{m,i,n}$ не зависят от m, i и n .

Этим завершается доказательство теоремы 6. Этот достаточно сильный результат немедленно приводит к утверждению теоремы 1. Но прежде чем перейти к этой теореме, рассмотрим аналогичное построение на $\widehat{sl}(2)$ -полубесконечном пространстве.

5.5. $\widehat{sl}(2)$ -Действие на полубесконечном пространстве. Как и для $N = 2$ алгебры, рассмотрим фильтрацию $\widehat{sl}(2)$ -полубесконечного пространства конечномерными подпространствами

$$\mathcal{M}_{r,k}^+[0] \rightarrow \mathcal{M}_{r,k}^+[1] \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{M}_{r,k}^+[l] \rightarrow \dots, \quad (5.44)$$

где $\mathcal{M}_{r,k}^+[l]$ порождено операторами $f_0, f_1, \dots, f_{2l}$ из $|r, k\rangle_l \widehat{sl}(2)$ (с точностью до спектрального потока $\mathcal{M}_{r,k}^+[l]$ — это модули Демазюра [49]–[51]). На каждом подпространстве $\mathcal{M}_{r,k}^+[l]$ можно определить часть $\widehat{sl}(2)$ -генераторов как дифференциальные операторы по $f_0, f_1, \dots, f_{2l}$; после подходящего преобразования спектрального потока мы получаем дифференциальные операторы по $f_{-1}, f_{-2}, \dots, f_{-2l+1}$. Требуется показать, что они сохраняют идеал, порожденный элементами

$$\sum_{\substack{-1 \leq i_1, \dots, i_{k+1} \leq -2l+1 \\ i_1 + \dots + i_{k+1} = a}} f_{i_1} \dots f_{i_{k+1}} = 0, \quad a = -k-1, -k-2, \dots \quad (5.45)$$

На каждом конечномерном пространстве, порожденном $f_{-1}, f_{-2}, \dots, f_{-N}$ из вакуумного вектора $|0\rangle_{\widehat{sl}(2)}$, операторы $h_{\geq 0}$ и $e_{\geq N}$ представляются дифференциальными операторами

$$h_\ell = - \sum_{n=-N}^{-\ell-1} f_{\ell+n} \partial_n, \quad \ell \geq 0, \quad (5.46)$$

$$e_\ell = - \sum_{\substack{n,m=-N \\ m+n+\ell \leq -1}}^{-1} f_{\ell+m+n} \partial_n \partial_m + kN \delta_{\ell,N} \partial_{-N}, \quad \ell \geq N, \quad (5.47)$$

где $\partial_m = \partial/\partial f_m$.

Перейдем теперь к двойственной формулировке, в которой, как и в п. 5.3, задача в основном сводится к нахождению действия генераторов на пространстве симметрических многочленов. Двойственные генераторы имеют вид

$$(f_{-\ell}^* \phi)(x_1, x_2, \dots, x_{M-1}) = \frac{1}{(\ell-1)!} \frac{\partial^{\ell-1}}{\partial x_M^{\ell-1}} \phi(x_1, x_2, \dots, x_M) \Big|_{x_M=0}, \quad (5.48)$$

$$(h_{\ell}^* \phi)(x_1, x_2, \dots, x_M) = \sum_{i=1}^M x_i^{\ell} \phi(x_1, x_2, \dots, x_M), \quad (5.49)$$

$$(e_{\ell}^* \phi)(x_0, x_1, x_2, \dots, x_M) = - \sum_{0 \leq i < j \leq M} F_{\ell}(x_i, x_j) (\phi([x]_i) + \phi([x]_j)) + \\ + kN \delta_{\ell, N} \sum_{0 \leq i \leq M} x_i^{N-1} \phi([x]_i), \quad (5.50)$$

где

$$F_{\ell}(x, y) = \sum_{n=0}^{\ell-1} x^n y^{\ell-1-n} = \frac{x^{\ell} - y^{\ell}}{x - y}. \quad (5.51)$$

Как и в случае $N = 2$, формула для операторов e_{ℓ}^* получена путем добавления членов из идеала $\mathcal{J}(N)$, порожденного мономами $x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$, в которых $i_j \geq N$ по крайней мере для одного j ; в алгебре симметрических многочленов это идеал, порожденный полиномами p_j при $j \geq N$ (см. (5.20)). Требуется установить, что действие операторов e_{ℓ}^* не нарушает обращения в нуль на $(k+1)$ -диагоналях,

$$\phi\left(\underbrace{x, x, \dots, x}_{k+1}, x_{k+2}, \dots\right) = 0, \quad (5.52)$$

или, более точно, что многочлен $e_{\ell}^* \phi$ удовлетворяет этим условиям по модулю идеала $\mathcal{J}(N)$. Для вычисления правой части (5.50) при $x_0 = x_1 = \dots = x_k$ разобьем двойную сумму в (5.50) следующим образом:

$$\sum_{0 \leq i < j \leq M} F_{\ell}(x_i, x_j) (\phi([x]_i) + \phi([x]_j)) = \\ = \left(\sum_{0 \leq i < j \leq k} + \sum_{0 \leq i \leq k < j} + \sum_{k < i < j \leq M} \right) F_{\ell}(x_i, x_j) (\phi([x]_i) + \phi([x]_j)). \quad (5.53)$$

Сразу видно, что третья сумма обращается в нуль на диагонали в силу (5.52). Подставляя $x_0 = x_1 = \dots = x_k = x$ во вторую сумму, получим слагаемые вида

$$\frac{x^{\ell} - x_j^{\ell}}{x - x_j} \phi\left(\underbrace{x, x, \dots, x}_k, x_{k+1}, \dots\right). \quad (5.54)$$

Однако в силу (5.52) разность $x - x_j$ является делителем многочлена $\phi\left(\underbrace{x, x, \dots, x}_k, x_{k+1}, \dots\right)$, так что каждое из этих слагаемых лежит в $\mathcal{J}(N)$ (напомним, что $\ell \geq N$).

Остается рассмотреть первую сумму в (5.53). Здесь $F_\ell(x, x) = \ell x^{\ell-1}$, и каждый член в сумме лежит в идеале при $\ell > N$. Но при $\ell = N$ возникают члены, содержащие $x^{\ell-1}$, что не лежит в идеале, однако они суммируются в выражение

$$-2N \frac{k(k+1)}{2} x^{N-1} \phi \left(\underbrace{x, x, \dots, x}_k, x_{k+1}, \dots \right),$$

что в точности сокращается слагаемым

$$+k(k+1)N\delta_{N,N}x^{N-1}\phi \left(\underbrace{x, x, \dots, x}_k, x_{k+1}, \dots \right),$$

возникающим из второго члена в формуле для e_N^* (5.50). Этим завершается доказательство того, что операторы (5.48)–(5.50) сохраняют связи (5.52), а потому имеют хорошо определенное действие на $M_{r,k}^+[l]^*$. Тем самым действие на $M_{r,k}^+[l]$ хорошо определено, так как сохраняет идеал, порожденный левыми частями (5.45).

Заметим, что в только что описанном сокращении ключевую роль играет коэффициент k перед вторым членом в (5.50). Он же оказывается уровнем возникающего $\widehat{sl}(2)$ -представления. Сочетание этих фактов и обеспечивает существование $\widehat{sl}(2)$ -действия.

Вывод $\widehat{sl}(2)$ -действия на всем полубесконечном пространстве далее полностью аналогичен приведенному в п. 5.4. Сначала проверяем, что действие положительных мод, определенных на различных подпространствах $M_{r,k}^+[l]$, согласовано с вложениями (5.44). Использование спектрального потока позволяет определить действие отрицательных мод (где снова используется аргумент о том, что наряду с (5.44) существуют подобные фильтрации, в которых $M_{r,k}^+[l]$ заменено на пространства $M_{r,k}^{(\mu)}[l]$, порожденные модами f_n с $n \geq \mu$). Для того чтобы завершить доказательство, остается только проверить соотношения Серра. Для этого сначала устанавливается, что левые части соотношений Серра коммутируют со всеми модами f_n при $n \geq -\mu$, а поскольку моды f_n порождают все полубесконечное пространство, то из этого следует, что соотношения Серра будут выполнены, если они выполнены на каком-либо экстремальном состоянии, а это проверяется непосредственно. Соотношения Серра гарантируют, что построенное действие алгебры – это действие алгебры $\widehat{sl}(2)$.

5.6. Изоморфизм с представлением $\mathfrak{K}_{r,p;\theta}$. Возвращаясь к $N = 2$ алгебре, остается показать, что полубесконечное пространство, про которое мы уже знаем, что оно является $N = 2$ модулем, изоморфно унитарному $N = 2$ представлению.

Имеется отображение

$$W_{r,p;\theta} \rightarrow \mathfrak{K}_{r,p;\theta}, \quad (5.55)$$

полученное отождествлением каждого состояния (3.1) с соответствующим экстремальным состоянием в $\mathfrak{K}_{r,p;\theta}$, определенным в п. 2.4 (и, конечно, отождествлением каждого $\mathcal{G}_n$ с соответствующим генератором $N = 2$ алгебры, действующим в унитарном представлении). Очевидно, эти отображения коммутируют с действием $\mathcal{G}_n$ и $U_{\pm p}$.

ТЕОРЕМА 7. *Отображение (5.55) задает изоморфизм $N = 2$ модулей.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы имеем $N = 2$ модуль $W_{r,p;\theta}$, в котором выполнены соотношения (1.1). В этой ситуации проще всего использовать эквивалентность категорий $N = 2$ и $\widehat{sl}(2)$ -представлений [54], [55]. Применяя функтор к $W_{r,p;\theta}$, получаем $\widehat{sl}(2)$ -модуль из категории $\mathcal{O}$ (точнее, орбиту спектрального потока, длина которой равна 2), в котором выполнены условия (4.39). Любой такой $\widehat{sl}(2)$ -модуль есть прямая сумма интегрируемых (унитарных) модулей¹⁰⁾:

$$F(W_{r,p;\bullet}) = \bigoplus_{\alpha} \mathfrak{L}_{(\alpha)}.$$

Применяя обратный функтор, получаем другую сумму

$$W_{r,p;\theta} = \bigoplus_{\beta} \mathfrak{K}_{(\beta)},$$

где каждый модуль в правой части непременно является унитарным $N = 2$ представлением, т.е. некоторым $\mathfrak{K}_{r',p;\theta'}$, и утверждение теоремы следует из сравнения собственных значений операторов $\mathcal{L}_0$ и $\mathcal{H}_0$.

Как следствие теоремы 7 получаем, что выражение (4.31) совпадает с соответствующим унитарным $N = 2$ характером. Сравнивая его с известным выражением для того же характера (см. п. 2.2), получаем комбинаторное тождество из следствия теоремы 1 (см. раздел 1).

Другое следствие теоремы 7 состоит в том, что “полубесконечное” выражение для унитарных $N = 2$ характеров дает формулу для струнных функций $C_{r,p}^a(q)$, определяемых согласно (2.9). Чтобы получить такое представление, перепишем соотношение (4.33) (где можно положить $\theta = 0$), разбив суммирование по n как

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \sum_{a=0}^{p-3} f((p-2)\ell + a).$$

Сдвиг каждой переменной суммирования N_m вида $N_m \mapsto N_m + \ell$ не меняет ни один из множителей $(q)_{N_m - N_{m+1}}$, и поэтому суммирование по ℓ можно выполнить, в результате чего “полубесконечная” формула для характера принимает вид (2.9), причем струнная функция равна

$$C_{r,p}^a(q) = \sum_{\substack{N_1 \geq \dots \geq N_{p-2} \in \mathbb{Z} \\ N_1 + \dots + N_{p-2} = a}} \frac{q^{\sum_{m=1}^{p-2} N_m^2 + \sum_{m=r}^{p-2} N_m}}{(q)_{N_1 - N_2} (q)_{N_2 - N_3} \dots (q)_{N_{p-3} - N_{p-2}} (q)_{\infty}}. \quad (5.56)$$

¹⁰⁾ Напомним, что $\widehat{sl}(2)$ -модуль интегрируем, если он разлагается в сумму конечномерных представлений любой из $sl(2)$ -подалгебр, порожденных элементами e_i и f_{-i} (в действительности достаточно установить такое разложение для двух таких подалгебр); данное свойство следует из соотношений (4.39) [39].

6. НЕКОТОРЫЕ РОДСТВЕННЫЕ КОНСТРУКЦИИ

6.1. Положительные базисы: пути и обобщенные треугольники Паскаля. Фильтрация (5.1) позволяет переписать представителя каждого состояния в полубесконечном пространстве $W_{r,p;\theta}$ только через неотрицательные моды $\mathcal{G}_{n \geq 0}$. Следующая интересная задача состоит в построении базиса в каждом члене этой фильтрации. Мы построим такой базис в конечномерных подпространствах $M_{r,k}^+[l]$ (см. (5.44)) $\widehat{sl}(2)$ -полубесконечного пространства, используя некое подобие “демазуровской индукции” (ср. [49]–[51]). Комбинация базисов в соответствующих пространствах $M_{r,k}^+[l]$ дает базис в $N = 2$ пространствах $W_{r,p;\theta}^+[l]$.

6.1.1. Положительный базис в унитарных $\widehat{sl}(2)$ -модулях. Рассмотрим фильтрацию конечномерными подпространствами (5.44). Базисные векторы в $M_{r,k}^+[l]$ находятся во взаимно однозначном соответствии с путями на прямоугольной решетке, конструкция которой изложена ниже. Пронумеруем горизонтальные линии решетки посредством чисел $\ell_0, \ell_1, \dots$, так что ℓ_0 соответствует нижней линии. На каждой линии ℓ_m занумеруем состояния как $\ell_{m,n}$, где $n \geq 0$. Припишем узлу $\ell_{0,0}$ символ $\underbrace{[k+1, \dots, k+1, r]}_{\iota+1}$. Путь, заканчивающийся в узле $\ell_{m,n}$, является связной последовательностью ребер между $\ell_{0,0}$ и $\ell_{m,n}$ (см. рис. 3), причем каждому узлу вдоль пути приписывается $[\dots]$ -символ следующим образом. Если узлу $\ell_{m,n}$ на пути уже приписан символ $[a_1, \dots, a_\nu]$, где $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_\nu$, то путь можно продолжить из этого узла с помощью одного из следующих шагов всякий раз, когда выполнены соответствующие условия:

Рис. 3. Путь на решетке. Начальной точке приписан символ $[k+1, \dots, k+1, r]$, а узлам вдоль пути приписаны $[\dots]$ -символы в соответствии с двумя правилами. Эти правила определяют возможные способы продолжения пути.

Ш1. Сдвиг в узел $\ell_{m+1,n}$ и приписывание ему символа $[a_2, \dots, a_\nu]$ (при условии, что $\nu \geq 2$).

Ш2. Сдвиг в узел $\ell_{m,n+1}$ и приписывание ему символа $[a_1, \dots, a_{\lambda-1}, a_\lambda - 1, a_{\lambda+1}, \dots, a_\nu]$, если $a_\lambda \geq 2$, где λ определяется условиями $a_1 = \dots = a_\lambda > a_{\lambda+1}$ и $\lambda = \nu$, если $a_1 = \dots = a_\nu \geq 2$.

Отрезки пути (ребра), проходимые шагами Ш1 и Ш2, обозначим как $\blacktriangle$ и $\blacktriangleright$, соответственно. Более точно, будем писать $\blacktriangleright_m$ для всякого $\blacktriangleright$ -ребра между любыми двумя

узлами на ℓ_m . Заметим, что различные пути приписывают различные $[\dots]$ -символы одному и тому же узлу.

Путь, заканчивающийся в $\ell_{m,n}$, называется *допустимым*, если его нельзя продолжить с помощью шага Ш1 из $\ell_{m,n}$ (хотя, возможно, он продолжается с помощью шага Ш2).

Базисные векторы в $M_{r,k}^+[l]$ находятся во взаимно однозначном соответствии с допустимыми путями. Путь, состоящий только из $\blacktriangle$ -ребер, соответствует твистованному вектору старшего веса $|r, k|_{\widehat{s\ell(2)}}$ (см. (4.40), (4.41)). Пусть для любого другого допустимого пути $\blacktriangleright_{j_0}, \blacktriangleright_{j_1}, \dots, \blacktriangleright_{j_K}$ (где $0 \leq j_0 \leq \dots \leq j_K$) – его $\blacktriangleright$ -ребра. Соответствующий базисный вектор дается формулой

$$f_{j_0} f_{j_1} \dots f_{j_K} |r, k|_{\widehat{s\ell(2)}} \in M_{r,k}^+[l]. \quad (6.1)$$

Эта конструкция основана на том обстоятельстве, что [42]

$$M_{r,k}^+[l] \simeq \text{Gr} \left(\underbrace{\mathbb{C}^{k+1} \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^{k+1}}_{\iota+1} \otimes \mathbb{C}^r \right) \equiv [k+1, \dots, k+1, r], \quad (6.2)$$

где Gr обозначает взятие градуированного объекта, ассоциированного с некой фильтрацией, существующей на тензорном произведении. Эта формула объясняет также обозначения для символов в квадратных скобках. Для представлений с $r = 1$ последний тензорный множитель и соответственно последнюю единицу в символе $[k+1, \dots, k+1, 1]$ можно опустить. Действительно, легко видеть, что замена начального символа $\underbrace{[k+1, \dots, k+1, 1]}_{\iota+1}$ на $\underbrace{[k+1, \dots, k+1]}_{\iota+1}$ не меняет получающиеся векторы (6.1).

В качестве примера рассмотрим рис. 4, где $k = 2$, $r = 2$ и $\iota = 1$, в соответствии с чем началу путей $\ell_{0,0}$ приписан символ $[3, 3, 2]$. Базисные векторы, определяемые допустимыми путями в соответствии с (6.1), имеют вид

$$\begin{array}{cccccc} f_2 & f_1 f_2 & f_1^3 & f_0^2 f_1^2 & f_0^5 \\ f_1 & f_0 f_2 & f_0 f_1^2 & f_0^3 f_1 & \\ f_0 & f_1^2 & f_0^2 f_1 & f_0^4 & \\ & f_0 f_1 & f_0^3 & & \\ & f_0^2 & f_0^2 f_2 & & \end{array}$$

что следует применить к твистованному вектору старшего веса $|2, 2|_1|_{\widehat{s\ell(2)}}$.

6.1.2. “Положительные” характеры. Пространство $M_{r,k}^+[l]$ градуировано числом мод f_i , примененных к твистованному вектору старшего веса,

$$M_{r,k}^+[l] = \bigoplus_{j=0}^{r+2k\iota} M_{r,k}^+[l; j], \quad (6.3)$$

где каждое $M_{r,k}^+[l; j]$ порождено из $|r, k|_{\widehat{s\ell(2)}}$ ровно j операторами $f_\bullet$. Размерности пространств $M_{r,k}^+[l; j]$ организуются в обобщенный треугольник Паскаля (ср. [14]).

1	1 1	1 1 1
1 1 1	1 2 2 1	1 2 3 2 1
1 2 3 2 1	1 3 5 5 3 1	1 3 6 7 6 3 1
1 3 6 7 6 3 1	1 4 9 13 13 9 4 1	1 4 10 16 19 16 10 4 1
1 4 10 16 19 16 10 4 1	1 5 14 26 35 35 26 14 5 1	1 5 15 30 45 51 45 30 15 5 1
1 5 15 30 45 51 45 30 15 5 1	1 6 20 45 75 96 96 75 45 20 6 1	1 6 21 50 90 126 141 126 90 50 21 6 1
...	...	...
(r = 1)	(r = 2)	(r = 3)

Рис. 5. Обобщенные треугольники Паскаля, соответствующие унитарным $\widehat{s\ell}(2)$ -представлениям уровня $k = 2$. При $r = 3$ имеем сдвиг случая $r = 1$ в соответствии с действием спектрального потока на унитарных представлениях (ср. [55]).

и использовано стандартное обозначение

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q = \begin{cases} \frac{(q)_n}{(q)_{n-m} (q)_m}, & n \geq m \geq 0, \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases} \quad (6.5)$$

Суперномиальные коэффициенты являются производящими функциями разбиений, допускающих сечения Дюрфи с дефектами $(L_1, L_2, \dots, L_k)$ [52].

Характер $M_{r,k}^+[l]$ равен [42]

$$\text{ch } M_{r,k}^+[l](z, q) = z^{-k\iota-r+1} q^{k\iota^2+\iota(r-1)} T_{\mathbf{L}_k}(z, q^{-1}), \quad (6.6)$$

где k -мерный вектор $\mathbf{L}_k$ выбран в виде $\mathbf{L}_k = (2\iota, 0, 0, \dots, 0, \underbrace{1, 0, \dots, 0}_{r-1})$. После некоторых вычислений равенство (6.6) можно переписать через q -биномиальные коэффициенты как

$$\begin{aligned} \text{ch } M_{r,k}^+[l](z, q) = & \sum_{\substack{N_1, N_2, \dots, N_k \\ \iota \geq N_1 \geq N_2 \geq \dots \geq N_k \geq -\iota-1 \\ N_i \geq -\iota \quad \text{при} \quad i \leq k+1-r}} z^{N_1+N_2+\dots+N_k} q^{\sum_{m=1}^k N_m^2 + \sum_{m=k+2-r}^k N_m} \times \\ & \times \begin{bmatrix} 2\iota \\ \iota + N_1 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} \iota + N_1 \\ \iota + N_2 \end{bmatrix}_q \cdots \begin{bmatrix} \iota + N_{k-r} \\ \iota + N_{k+1-r} \end{bmatrix}_q \times \\ & \times \begin{bmatrix} \iota + N_{k+1-r} + 1 \\ \iota + N_{k+2-r} + 1 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} \iota + N_{k+2-r} + 1 \\ \iota + N_{k+3-r} + 1 \end{bmatrix}_q \cdots \begin{bmatrix} \iota + N_{k-1} + 1 \\ \iota + N_k + 1 \end{bmatrix}_q. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Характер в (6.7) нормирован так, что вектор старшего веса $|r, k|0\rangle_{\widehat{s\ell}(2)}$ лежит в биградуировке $(0, 0)$.

6.1.3. Положительный базис и характеры пространств $W_{r,p;\theta}^+[l]$. Для $N = 2$ пространств $W_{r,p;\theta}^+[l]$ из (5.1) мы используем предыдущую конструкцию для построения базиса следующим образом. Пространство $W_{r,p;\theta}^+[l]$ градуировано числом операторов $\mathcal{G}_\bullet$,

$$W_{r,p;\theta}^+[l] = \bigoplus_{0 \leq j \leq \frac{r-1+(p-2)(p+\theta)}{p-1}} W_{r,p;\theta}^+[l; j], \quad (6.8)$$

где $W_{r,p;\theta}^+[l; j]$ – пространство, полученное применением j операторов $\mathcal{G}_\bullet$ к экстремальному вектору $|r, p; \theta|_{\infty/2}$. Существует изоморфизм *векторных пространств*

$$W_{r,p;\theta}^+[l; j] \simeq M_{r,p-2}^+[p\iota + \theta - j; j], \quad (6.9)$$

индуцированный отображением базисных элементов из $M_{r,p-2}^+[p\iota + \theta - j; j]$ вида

$$(f_0)^{i_0} (f_1)^{i_1} \dots (f_j)^{i_j} \mapsto \mathcal{G}_0 \mathcal{G}_1 \dots \mathcal{G}_{i_0-1} \mathcal{G}_{i_0+1} \mathcal{G}_{i_0+2} \dots \mathcal{G}_{i_0+i_1} \mathcal{G}_{i_0+i_1+2} \dots \times \\ \times \dots \mathcal{G}_{i_0+i_1+\dots+i_{j-1}+j} \dots \mathcal{G}_{i_0+i_1+\dots+i_{j-1}+i_j+j-1}. \quad (6.10)$$

Это и дает базис в пространстве $W_{r,p;\theta}^+[l]$.

Согласно (6.9) размерности пространств $W_{r,p;\theta}^+[l; j]$ также располагаются в обобщенных треугольниках Паскаля (см. пример на рис. 6). Эти размерности даются обобщенными числами Фибоначчи, которые можно выразить через производящую функцию как

$$\sum_{\theta=0}^{p-1} \sum_{\iota=0}^{\infty} \dim W_{r,p;\theta}^+[l] y^{p\iota+\theta} = \frac{1 + y + y^2 + \dots + y^{r-1}}{1 - y - y^2 - \dots - y^{p-1}}. \quad (6.11)$$

Таким образом, размерности $F_{p\iota+\theta}^{r,p} = \dim W_{r,p;\theta}^+[l]$ удовлетворяют определяющим соотношениям $F_i^{r,p} = F_{i-1}^{r,p} + F_{i-2}^{r,p} + \dots + F_{i-(p-1)}^{r,p}$.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & 1 & \\ & & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & 1 & 3 & 5 & \boxed{5} & 3 & 1 \\ & & 1 & 4 & \boxed{9} & 13 & 13 & 9 & 4 & 1 \\ & 1 & \boxed{5} & 14 & 26 & 35 & 35 & 26 & 14 & 5 & 1 \\ \boxed{1} & 6 & 20 & 45 & 75 & 96 & 96 & 75 & 45 & 20 & 6 & 1 \\ & 1 & 7 & 27 & 71 & 140 & 216 & 267 & 267 & 216 & 140 & 71 & 27 & 7 & 1 \\ & 1 & 8 & 35 & 105 & 238 & 427 & 623 & 750 & 750 & 623 & 427 & 238 & 105 & 35 & 8 & 1 \\ & & & & & & & & & & & & & & & & \dots \end{array}$$

Рис. 6. Ход коня. Размерности пространств $W_{2,4;1}^+[1; j]$ выделены, они связаны ходами коня в обобщенном треугольнике Паскаля.

Приведем гипотезу о характере $W_{r,p;\theta}^+[N]$. Нормируем аналог равенства (6.7) так, чтобы состояние $|r, p; \theta|0\rangle_{\infty/2}$ лежало в градуировке $(0, 0)$.

ГИПОТЕЗА. *Характеры подпространств, входящих в положительную фильтрацию унитарных $N = 2$ представлений, имеют вид*

$$\text{ch } W_{r,p;\theta}^+[l](z, q) = z^{-(p-2)\iota-r+1} q^{\frac{p(p-2)\iota(\iota+1)}{2} - \iota(\frac{p(p-1)}{2} - r - \theta(p-2))} S_{\mathbf{L}_p}(z, q^{-1}), \quad (6.12)$$

где

$$S_{\mathbf{L}_p}(z, q) = \sum_{a=0}^{\infty} z^a q^{\frac{a^2-a}{2}} \binom{\mathbf{L}_p - (a, 0, \dots, 0)}{a}_q, \quad (6.13)$$

$$\text{при } \mathbf{L}_p = (p\iota + \theta, 0, 0, \dots, 0, \underbrace{1, 0, \dots, 0}_{r-1}).$$

Такие характеры можно переписать как

$$\begin{aligned} \text{ch } W_{r,p;\theta}^+[l](z, q) &= \\ &= \sum_{\substack{N_1, N_2, \dots, N_{p-2} \\ N_1 + n \leq \iota + \theta - r + 1, N_1 \geq N_2 \geq \dots \geq N_{p-2} \geq -\iota - 1 \\ N_i \geq -\iota \text{ при } i \leq p - r - 1}} z^n q^{\frac{n^2-n}{2} - \theta n + \sum_{m=1}^{p-2} N_m^2 + \sum_{m=r}^{p-2} N_m} \times \\ &\times \left[\begin{matrix} 2\iota + \theta - r + 1 - n \\ \iota + N_1 \end{matrix} \right]_q \left[\begin{matrix} \iota + N_1 \\ \iota + N_2 \end{matrix} \right]_q \cdots \left[\begin{matrix} \iota + N_{p-r-2} \\ \iota + N_{p-r-1} \end{matrix} \right]_q \times \\ &\times \left[\begin{matrix} \iota + N_{p-r-1} + 1 \\ \iota + N_{p-r} + 1 \end{matrix} \right]_q \left[\begin{matrix} \iota + N_{p-r} + 1 \\ \iota + N_{p-r+1} + 1 \end{matrix} \right]_q \cdots \left[\begin{matrix} \iota + N_{p-3} + 1 \\ \iota + N_{p-2} + 1 \end{matrix} \right]_q, \end{aligned} \quad (6.14)$$

где $n = \sum_{m=1}^{p-2} N_m$. Несложно проверить, что это выражение имеет правильный предел при $\iota \rightarrow \infty$:

$$\lim_{\iota \rightarrow \infty} \left(z^{\frac{1-r+2\theta}{p} - \theta} q^{\frac{1}{2}(1-\frac{2}{p})(\theta^2 - \theta) + \theta \frac{r-1}{p}} \text{ch } W_{r,p;\theta}^+[l](z, q) \right) = \text{ch } W_{r,p;\theta}(z, q), \quad (6.15)$$

где характер $\text{ch } W_{r,p;\theta}(z, q)$ определен в (4.31).

6.2. $N = 2$ модулярный функтор и функции на римановых поверхностях.

Представление унитарных модулей полубесконечными формами приводит к соотношению между $N = 2$ модулярным функтором и пространством кососимметрических функций с предписанными сингулярностями на декартовых степенях римановой поверхности рода g .

6.2.1. $N = 2$ корреляционные функции в полубесконечной картине. Для римановой поверхности $\mathcal{E}_n^g$ рода g с n отмеченными точками $P_1, \dots, P_n$ пусть $(N = 2)^{\text{out}}$ обозначает алгебру, порожденную той частью $N = 2$ токов $\mathcal{G}(z)$, $\mathcal{Q}(z)$, $\mathcal{H}(z)$ и $\mathcal{L}(z)$, которые голоморфны вне точек $P_1, \dots, P_n$. Определим пространства коинвариантов

$$\mathfrak{Z} = \frac{\mathfrak{K}_{r_1,p;\theta_1} \otimes \mathfrak{K}_{r_2,p;\theta_2} \otimes \cdots \otimes \mathfrak{K}_{r_n,p;\theta_n}}{(N = 2)^{\text{out}} \mathfrak{K}_{r_1,p;\theta_1} \otimes \mathfrak{K}_{r_2,p;\theta_2} \otimes \cdots \otimes \mathfrak{K}_{r_n,p;\theta_n}}, \quad (6.16)$$

где $\mathfrak{K}_{r_i, p; \theta_i}$ – унитарные представления, $\mathfrak{K}_{r_1, p; \theta_1} \otimes \mathfrak{K}_{r_2, p; \theta_2} \otimes \cdots \otimes \mathfrak{K}_{r_n, p; \theta_n}$ – представление алгебры $(N = 2)_{P_1} \oplus \cdots \oplus (N = 2)_{P_n}$. Аналогично [32] можно показать, что это пространство коинвариантов изоморфно пространству коинвариантов по отношению к алгебре, порожденной элементами $\mathcal{G}(z)$ и $\mathcal{H}_0$,

$$\mathfrak{Z} = \left(\frac{\mathfrak{K}_{r_1, p; \theta_1} \otimes \mathfrak{K}_{r_2, p; \theta_2} \otimes \cdots \otimes \mathfrak{K}_{r_n, p; \theta_n}}{\mathfrak{g}^{\text{out}} \mathfrak{K}_{r_1, p; \theta_1} \otimes \mathfrak{K}_{r_2, p; \theta_2} \otimes \cdots \otimes \mathfrak{K}_{r_n, p; \theta_n}} \right)^0, \quad (6.17)$$

где $\mathfrak{g}^{\text{out}}$ – алгебра, порожденная частью $\mathcal{G}(z)$ тока, которая голоморфна вне $P_1, \dots, P_n$, а $(\cdot)^0$ обозначает ограничение на компоненту с нулевым зарядом (ограничение на нулевой заряд возникает из взятия коинвариантов по отношению к $\mathcal{H}_0$).

При заданном наборе представлений $\mathfrak{K}_{r_1, p; \theta_1}, \dots, \mathfrak{K}_{r_n, p; \theta_n}$, помещенных в точках $P_1, \dots, P_n$ на римановой поверхности, и при фиксированных $m, \iota_1, \dots, \iota_n$ каждый линейный функционал $\langle F | : \mathfrak{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ определяет функции

$$\langle F | \mathcal{G}(x_1) \mathcal{G}(x_2) \dots \mathcal{G}(x_m) | \Phi_{r_1, \theta_1}^{\iota_1}(P_1) \otimes \Phi_{r_2, \theta_2}^{\iota_2}(P_2) \otimes \cdots \otimes \Phi_{r_n, \theta_n}^{\iota_n}(P_n) \rangle_p^g \quad (6.18)$$

от $(x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{E}_n^g \times \cdots \times \mathcal{E}_n^g$. Здесь $\Phi_{r, \theta}^{\iota}$ – операторы, соответствующие экстремальным векторам (3.1). В соответствии с выбранной конформной размерностью операторов $\mathcal{G}$ выражение (6.18) является 2-дифференциалом по каждой переменной. Перепишем это выражение в локальных координатах, выделив *корреляционную функцию*:

$$\begin{aligned} F_{r_1, r_2, \dots, r_n; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n}^{p, g; \iota_1, \dots, \iota_n}(x_1, x_2, \dots, x_m | P_1, P_2, \dots, P_n) (dx_1)^2 (dx_2)^2 \dots (dx_m)^2 = \\ = \langle F | \mathcal{G}(x_1) \mathcal{G}(x_2) \dots \mathcal{G}(x_m) | \Phi_{r_1, \theta_1}^{\iota_1}(P_1) \otimes \Phi_{r_2, \theta_2}^{\iota_2}(P_2) \otimes \cdots \otimes \Phi_{r_n, \theta_n}^{\iota_n}(P_n) \rangle_p^g. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Ограничение на нулевой заряд принимает вид условия

$$mp + n - (r_1 + (p-2)(\theta_1 + p\iota_1)) - \cdots - (r_n + (p-2)(\theta_n + p\iota_n)) = 0. \quad (6.20)$$

Как видно, определенные в (6.19) функции $F_{r_1, r_2, \dots, r_n; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n}^{p, g; \iota_1, \dots, \iota_n}$ кососимметричны по $x_1, \dots, x_m$, регулярны на $\mathcal{E}_n^g \times \cdots \times \mathcal{E}_n^g$ за исключением точек P_i и обладают следующими свойствами.

1. На каждой $(p-1)$ -диагонали $x_{i_1} = x_{i_2} = \cdots = x_{i_{p-1}}$ выполнено

$$\frac{\partial^{p-2}}{\partial x_{i_1}^{p-2}} \frac{\partial^{p-3}}{\partial x_{i_2}^{p-3}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_{p-2}}} F_{r_1, r_2, \dots, r_n; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n}^{p, g; \iota_1, \dots, \iota_n} \Big|_{x_{i_1} = x_{i_2} = \cdots = x_{i_{p-1}}} = 0. \quad (6.21)$$

2. Для каждого a такого, что $a < r_j$, функция

$$\frac{\partial^{a-1}}{\partial x_{i_a}^{a-1}} \frac{\partial^{a-2}}{\partial x_{i_{a-1}}^{a-2}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_2}} F_{r_1, r_2, \dots, r_n; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n}^{p, g; \iota_1, \dots, \iota_n} \quad (6.22)$$

обращается в нуль при $x_{i_1} = x_{i_2} = \cdots = x_{i_a} = x \rightarrow P_j$ с порядком, не меньшим чем

$$-a(\theta_j + \iota_j p) + \frac{a(a-3)}{2}. \quad (6.23)$$

Для каждого a такого, что $r_j \leq a \leq p-2$, функция

$$\frac{\partial^a}{\partial x_{i_a}^a} \cdots \frac{\partial^{r+1}}{\partial x_{i_{r+1}}^{r+1}} \frac{\partial^r}{\partial x_{i_r}^r} \frac{\partial^{r-2}}{\partial x_{i_{r-2}}^{r-2}} \frac{\partial^{r-1}}{\partial x_{i_{r-1}}^{r-1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_2}} F_{r_1, r_2, \dots, r_n; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n}^{p, g; \iota_1, \dots, \iota_n} \quad (6.24)$$

обращается в нуль при $x_{i_1} = x_{i_2} = \cdots = x_{i_a} = x \rightarrow P_j$ с порядком, не меньшим чем

$$-a(\theta_j + \iota_j p) + \frac{a(a - 4r_j + 3)}{2} - (r_j + 1)(r_j - 1) \quad (6.25)$$

(нули отрицательного порядка — полюсы).

Условие (6.21) следует из обращения в нуль выражений (1.1), а (6.23) и (6.25) — из соотношений (3.2)–(3.4).

Пусть $\mathcal{F}_{r_1, r_2, \dots, r_n; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n}^{p, g; \iota_1, \dots, \iota_n}(m)$ обозначает пространство всех функций, удовлетворяющих этим свойствам; при выполнении условия (6.20) обозначения несколько избыточны, однако полезно рассматривать m как свободный параметр и определять какую-то другую переменную из (6.20).

ТЕОРЕМА 8. *При достаточно больших m определяемое формулой (6.19) соответствие*

$$\langle F | \mapsto F_{r_1, r_2, \dots, r_n; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n}^{p, g; \iota_1, \dots, \iota_n}(\cdot, \dots, \cdot | P_1, P_2, \dots, P_n)$$

устанавливает изоморфизм между $\mathfrak{Z}^*$ и $\mathcal{F}_{r_1, r_2, \dots, r_n; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n}^{p, g; \iota_1, \dots, \iota_n}(m)$. При таких m размерности $d_{r_1, r_2, \dots, r_n; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n}^{p, g} = \dim \mathcal{F}_{r_1, r_2, \dots, r_n; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n}^{p, g; \iota_1, \dots, \iota_n}(m)$ не зависят от m и $\iota_1, \dots, \iota_n$.

Полубесконечная конструкция играет ключевую роль в доказательстве того, что все функции с описанными выше свойствами являются $N = 2$ корреляционными функциями. Мы не приводим здесь доказательства и рассматриваем только два примера для иллюстрации. В первом примере легко перечислить функции на эллиптической кривой с единственной отмеченной точкой, несущей вакуумное представление. Размерность пространства таких функций дает число примарных полей в соответствующей минимальной модели. При $p = 3$ и $p = 4$ можно явно построить базис в функциональном пространстве. Второй пример связан с трижды проколотой римановой сферой, когда размерности соответствующих функциональных пространств определяются $N = 2$ алгеброй слияния; поэтому в п. 6.3 мы делаем отступление по поводу унитарных $N = 2$ и $\widehat{sl}(2)$ -алгебр слияния.

6.2.2. Торы с одной отмеченной точкой при малых p . При $p = 3$ рассмотрим вакуумный модуль, ассоциированный с точкой на торе (в начале координат на накрывающей комплексной плоскости). Полагая $n = 1$ и $r_1 = 1$ в условии (6.20), получаем $\iota = m$. Независимость от m имеет место уже начиная с $m = 1$, и пространство $\mathcal{F}_{1;0}^{3,1}(1)$ (опускаем для краткости индекс ι) состоит из функций на торе с полюсом в нуле порядка ≤ 3 . Имеем тогда $d_{1;0}^{3,1} = 3$, и в пространстве таких функций можно выбрать базис

$$1, \quad \wp(x), \quad \wp'(x), \quad (6.26)$$

где

$$\wp(x) = \frac{1}{x^2} + \sum'_{\omega \in \Lambda} \left(\frac{1}{(x - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) \quad (6.27)$$

— функция Вейерштрасса, а $\Lambda = \{m\omega_1 + n\omega_2 \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$, $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ и $\text{Im}(\omega_1/\omega_2) > 0$.

Интересно явным образом убедиться в том, что та же размерность получается при $m = 2$, т.е. проверить, что $\dim \mathcal{F}_{1;0}^{3,1}(2) = d_{1;0}^{3,1} = 3$, где вычисления совершенно отличны от предыдущих, поскольку основное условие 1 (см. (6.21)) оказывается применимым. Соответствующее пространство $\mathcal{F}_{1;0}^{3,1}(2)$ состоит из кососимметрических функций от двух переменных x_1 и x_2 с полюсом порядка ≤ 6 при $x_1 = x_2 \rightarrow 0$ и таких, что $(\partial f(x_1, x_2)/\partial x_1)|_{x_1=x_2} = 0$. Это пространство имеет базис

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= \wp(x_1)^3 - 3\wp(x_1)^2\wp(x_2) + 3\wp(x_1)\wp(x_2)^2 - \wp(x_2)^3, \\ f_2(x_1, x_2) &= -g_2\wp'(x_1) - \frac{1}{2}g_1\wp(x_1)\wp'(x_1) + \wp(x_1)^3\wp'(x_1) - \\ &\quad - \frac{3}{2}g_1\wp(x_2)\wp'(x_1) + 3\wp(x_2)^3\wp'(x_1) + g_2\wp'(x_2) + \frac{3}{2}g_1\wp(x_1)\wp'(x_2) - \\ &\quad - 3\wp(x_1)^3\wp'(x_2) + \frac{1}{2}g_1\wp(x_2)\wp'(x_2) - \wp(x_2)^3\wp'(x_2), \\ f_3(x_1, x_2) &= g_2\wp(x_1) + g_1\wp(x_1)^2 - g_2\wp(x_2) - 2\wp(x_1)^3\wp(x_2) - g_1\wp(x_2)^2 + \\ &\quad + 2\wp(x_1)\wp(x_2)^3 + \wp(x_1)\wp'(x_1)\wp'(x_2) - \wp(x_2)\wp'(x_1)\wp'(x_2), \end{aligned}$$

где $g_1 = 30 \sum'_{\omega \in \Lambda} (1/\omega^4)$ и $g_2 = 140 \sum'_{\omega \in \Lambda} (1/\omega^6)$. Тем самым воспроизводится размерность $d_{1;0}^{3,1} = 3$.

В случае $p = 4$ условие (6.20) принимает вид $2\iota = m$. Первым “достаточно большим” значением m оказывается $m = 2$, а $\iota = 1$. Соответствующее пространство $\mathcal{F}_{1;0}^{4,1}(2)$ состоит из кососимметрических функций от двух переменных с полюсом по каждой порядка ≤ 4 в нуле и таких, что функция $(\partial^2 f(x_1, x_2)/\partial x_1^2)|_{x_1=x_2=x}$ имеет полюс порядка ≤ 9 при $x \rightarrow 0$. В пространстве таких функций можно выбрать базис

$$\begin{aligned} f_1 &= \wp(x_1) - \wp(x_2), & f_2 &= \wp'(x_1) - \wp'(x_2), & f_3 &= \wp(x_1)^2 - \wp(x_2)^2, \\ f_4 &= \wp(x_1)\wp'(x_2) - \wp(x_2)\wp'(x_1), & f_5 &= \wp(x_1)^2\wp'(x_2) - \wp(x_2)^2\wp'(x_1), \\ f_6 &= \wp(x_1)\wp(x_2)^2 - \wp(x_2)\wp(x_1)^2, \end{aligned} \quad (6.28)$$

так что $d_{1;0}^{4,1} = 6$.

Эти примеры показывают, что размерности функциональных пространств совпадают с числом примарных полей в соответствующей минимальной модели (т.е. с размерностью модулярного функтора для тора).

6.3. Унитарная $N = 2$ алгебра слияния. Рассмотрим $N = 2$ алгебру слияния, а затем обсудим ее следствия для функциональных пространств. Унитарные $N = 2$ правила слияния были выведены в работе [53] из гипотезы Верлинде. Мы дадим альтернативный вывод, который исходит из $\widehat{sl}(2)$ -алгебры слияния; этот вывод не опирается

на утверждение гипотезы Верлинде для $N = 2$ алгебры, и совпадение результата с [53] может иметь независимый интерес.

Алгебра слияния $\mathfrak{F}_{\widehat{s\ell}(2)}(k)$ унитарных $\widehat{s\ell}(2)$ -представлений $\mathfrak{L}_{r,k}$ уровня k имеет вид [62]

$$\mathfrak{L}_{r_1,k} \underset{\widehat{s\ell}(2)}{\overset{\bullet}{\otimes}} \mathfrak{L}_{r_2,k} = \bigoplus_{\substack{r_3=|r_1-r_2|+1 \\ \text{шаг}=2}}^{k+1-|r_1+r_2-k-2|} \mathfrak{L}_{r_3,k}, \quad 1 \leq r_i \leq k+1. \quad (6.29)$$

Несложно применить к (6.29) метод работы [54]: тензорно умножая $\widehat{s\ell}(2)$ -модули на модуль Ω над свободными фермионами и применяя (2.11), мы используем $\widehat{s\ell}(2)$ -правила слияния и затем собираем члены в правой части так, чтобы выделить представления $\mathfrak{K}_{r',p;\theta'}$. Это дает $N = 2$ алгебру слияния

$$\mathfrak{K}_{r_1,p;\theta_1} \underset{N=2}{\overset{\bullet}{\otimes}} \mathfrak{K}_{r_2,p;\theta_2} = \bigoplus_{\substack{r_3=|r_1-r_2|+1 \\ \text{шаг}=2}}^{p-1-|r_1+r_2-p|} \mathfrak{K}_{r_3,p;\theta_1+\theta_2+\frac{1}{2}(1-r_1-r_2+r_3)}, \quad (6.30)$$

$$1 \leq r_1, r_2 \leq p-1, \quad \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{Z}_p.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4 (Спектральный поток). В алгебре слияния представление $\mathfrak{K}_{1,0}$ является единичным элементом, а $\Theta = \mathfrak{K}_{p-1,0}$ — оператором спектрального потока, который действует в соответствии с (6.30) на представления как

$$\mathfrak{K}_{p-1,p;0} \underset{N=2}{\overset{\bullet}{\otimes}} \mathfrak{K}_{r_2,p;\theta} = \mathfrak{K}_{p-r_2,p;\theta+1-r_2} \approx \mathfrak{K}_{r_2,p;\theta+1}. \quad (6.31)$$

Имеем также $\underbrace{\mathfrak{K}_{p-1,p;0} \underset{N=2}{\overset{\bullet}{\otimes}} \cdots \underset{N=2}{\overset{\bullet}{\otimes}} \mathfrak{K}_{p-1,p;0}}_p = \mathfrak{K}_{1,p;0} \equiv 1$, как и должно быть для спектрального потока.

Полученная алгебра слияния относится только к сектору Невё–Шварца. Чтобы распространить ее на сектор Рамона, достаточно добавить единственный элемент $\mathfrak{K}_{1,p;\frac{1}{2}}$, для которого

$$\mathfrak{K}_{1,p;\frac{1}{2}} \underset{N=2}{\overset{\bullet}{\otimes}} \mathfrak{K}_{r,p;\theta} = \mathfrak{K}_{r,p;\theta+\frac{1}{2}}. \quad (6.32)$$

Эта формула полностью определяет алгебру слияния с участием представлений из сектора Рамона. Более того, правила слияния можно формально продолжить на любой другой сектор с дробным твистом $\theta = \beta/\alpha$, добавляя один элемент $\mathfrak{K}_{1,p;\frac{1}{\alpha}}$, для которого

$$\mathfrak{K}_{1,p;\frac{1}{\alpha}} \underset{N=2}{\overset{\bullet}{\otimes}} \mathfrak{K}_{r,p;\theta} = \mathfrak{K}_{r,p;\theta+\frac{1}{\alpha}}, \quad (6.33)$$

тем самым будут определены все правила слияния и для элементов $\mathfrak{K}_{r,p;\frac{2}{\alpha}+\mathbb{Z}}, \dots, \mathfrak{K}_{r,p;\frac{\alpha-1}{\alpha}+\mathbb{Z}}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Правила слияния (6.30) означают, что трехточечная функция ненулевая тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} r + r' + r'' - 2\theta - 2\theta' - 2\theta'' - 3 &= 0, \\ |r' - r''| < r < r' + r'', \quad r + r' + r'' < 2p, \quad r + r' + r'' &\equiv 1 \pmod{2}. \end{aligned} \quad (6.34)$$

Это согласуется с результатом [53] при соответствии в секторе Невё–Шварца

$$k = r - \theta - \frac{1}{2}, \quad j = \theta + \frac{1}{2}, \quad 1 \leq r \leq p-1, \quad 0 \leq \theta \leq r-1 \quad (6.35)$$

между нашей параметризацией унитарных $N = 2$ модулей и принятой в работах [60], [53].

Покажем, как полученное соответствие между $\widehat{sl}(2)$ - и $N = 2$ алгебрами слияния укладывается в общую схему соотношения (2.13) между модулярными функторами. Выберем в качестве $\mathcal{E}$ в (2.13) тор и напомним, что на модулярном функторе для тора имеется базис, элементы которого суть унитарные характеры (более точно, такие базисы зависят от выбора цикла на торе). Алгебра слияния тогда становится операцией на модулярном функторе для тора.

Соответствие (2.13) оказывается согласованным с естественными структурами на модулярных функторах, в настоящем случае – с алгебрами слияния. При отождествлении модулярного функтора для тора с соответствующими алгебрами слияния $\mathfrak{F}_{\mathfrak{a}}(\kappa)$ для $\mathfrak{a} = \widehat{sl}(2)$ и $N = 2$ соотношение (2.13) принимает вид

$$\mathfrak{F}_{N=2}(p) = \text{Coinv}_{\langle R_1 \otimes P_1 \rangle} \left(\text{Inv}_{\langle R_2 \otimes P_2 \rangle} \left(\mathfrak{F}_{\widehat{sl}(2)}(p-2) \otimes \mathfrak{F}_{\text{free}}(p) \right) \right), \quad (6.36)$$

где инварианты и коинварианты берутся по отношению к подалгебрам, порожденным элементами R_1 , R_2 , P_1 и P_2 , которые явно строятся следующим образом. Алгебра $\mathfrak{F}_{\text{free}}(p)$, являющаяся алгеброй слияния для алгебры вертексных операторов, связанных с решеткой $\sqrt{2p}\mathbb{Z}$ (см. (2.11)), изоморфна групповой алгебре циклической группы $\mathbb{Z}_{2p}$ (как линейное пространство, ее можно представить тета-функциями уровня $2p = 2(k+2)$, как видно из формулы (2.10) для характеров). Она несет действие группы Гайзенберга, связанной с полупериодами, и мы обозначим через P_1 и P_2 соответствующие генераторы (так что $P_1 P_2 = (-1)^p P_2 P_1$): если ν , такое что $\nu^{2p} = 1$, является генератором группы $\mathbb{Z}_{2p}$, имеем

$$P_1(\nu^i) = \nu^{i+p}, \quad (6.37)$$

$$P_2(\nu^i) = (-1)^i \nu^i. \quad (6.38)$$

$$\begin{array}{cccccccc}
\mathfrak{L}_{1,2} \otimes \nu^* & \bullet & \circ & \bullet & \circ & \bullet & \circ & \bullet & \circ \\
\mathfrak{L}_{2,2} \otimes \nu^* & \circ & \bullet & \circ & \bullet & \circ & \bullet & \circ & \bullet \\
\mathfrak{L}_{3,2} \otimes \nu^* & \bullet & \circ & \bullet & \circ & \bullet & \circ & \bullet & \circ
\end{array}$$

Рис. 7. Тензорное произведение $\mathfrak{F}_{\widehat{s\ell}(2)}(p-2) \otimes \mathfrak{F}_{\text{free}}(p)$ при $p = 4$ ($\widehat{s\ell}(2)$ -уровень $k = 2$).

Точки обозначают $\mathfrak{L}_{r,2} \otimes \nu^i$ при $r = 1, 2, 3$ и $i = 0, \dots, 7$ (так что i нумерует столбцы). Жирные точки – те элементы, для которых $r + i - 1$ четно.

Используя выбранный базис, действие группы Гайзенберга на $\widehat{s\ell}(2)$ -модулярный функтор можно явно описать как

$$R_1(\mathfrak{L}_{r,k}) = \mathfrak{L}_{k-r+2,k}, \quad (6.39)$$

$$R_2(\mathfrak{L}_{r,k}) = (-1)^{r-1} \mathfrak{L}_{r,k} \quad (6.40)$$

(напомним, что базисные элементы отождествлены с унитарными $\widehat{s\ell}(2)$ -представлениями). Заметим, что R_2 является автоморфизмом алгебры слияния, тогда как R_1 есть преобразование спектрального потока, реализованное посредством слияния, $R_1(\mathfrak{L}_{r,k}) = \mathfrak{L}_{k+1,k} \overset{\bullet}{\underset{\widehat{s\ell}(2)}{\otimes}} \mathfrak{L}_{r,k}$. При этом выполнено важное свойство $(\mathfrak{L}_{k+1,k}a)(\mathfrak{L}_{k+1,k}b) = ab$ для любых $a, b \in \mathfrak{F}_{\widehat{s\ell}(2)}(k)$ (здесь опущен знак операции слияния). Взяв диагональное действие группы Гайзенберга, видим, что $R_1 \otimes P_1$ действительно коммутирует с $R_2 \otimes P_2$ (т.е. центральный элемент действует тождественно). В тензорном произведении $\mathfrak{F}_{\widehat{s\ell}(2)}(p-2) \otimes \mathfrak{F}_{\text{free}}(p)$ возьмем инварианты по отношению к $R_2 \otimes P_2$, т.е. ограничимся элементами вида $\mathfrak{L}_{r,k} \otimes \nu^i$ с четными $r + i - 1$ (см. рис. 7). Конструкция завершается взятием коинвариантов по отношению к действию $R_1 \otimes P_1$.

Занумеруем элементы пространства, построенного в правой части (6.36), как

$$\mathfrak{K}_{r,p;\theta} = \mathfrak{L}_{r,p-2} \otimes \nu^{2\theta-r+1} \bmod R_1 \otimes P_1 \quad (6.41)$$

и отождествим $\mathfrak{K}_{r,p;\theta}$ с генераторами $N = 2$ алгебры слияния. Отождествление под действием $R_1 \otimes P_1$ означает, что (2.7) выполнено по построению, периодичность под действием спектрального потока на p также очевидна. Более того, вычисляя

$$(\mathfrak{L}_{r_1,k} \otimes \nu^{\theta_1}) \overset{\bullet}{\underset{N=2}{\otimes}} (\mathfrak{L}_{r_2,k} \otimes \nu^{\theta_2}) = \left(\mathfrak{L}_{r_1,p-2} \overset{\bullet}{\underset{\widehat{s\ell}(2)}{\otimes}} \mathfrak{L}_{r_2,p-2} \right) \otimes \nu^{\theta_1+\theta_2}$$

и используя (6.29), получаем унитарную $N = 2$ алгебру слияния (6.30). Таким образом, соотношения между $\widehat{s\ell}(2)$ - и $N = 2$ алгебрами слияния можно рассматривать как частный случай более общего соотношения (2.13), которое распространяет эквивалентность категорий [55], [54] на модулярные функторы.

Возвращаясь к введенным в п. 6.2 функциональным пространствам, переформулируем $N = 2$ алгебру слияния как утверждение о размерности функциональных пространств. Структурные константы алгебры слияния совпадают с размерностями модулярного функтора на $\mathbb{CP}^1$ с тремя отмеченными точками. Вспоминая, что модулярный функтор связан с функциональным пространством согласно теореме 8, получаем (опуская индекс ι для краткости)

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. При $m \geq p - 1$ размерности пространств $\mathcal{F}_{r,r',r'';\theta,\theta',\theta''}^{p,0}(m)$ и $\mathcal{F}_{r,r';\theta,\theta'}^{p,0}(m)$ равны

$$d_{r,r',r'';\theta,\theta',\theta''}^{p,0} = \dim \mathcal{F}_{r,r',r'';\theta,\theta',\theta''}^{p,0}(m) = \begin{cases} 1, & \text{условия (6.34) выполнены,} \\ 0, & \text{в других случаях,} \end{cases} \quad (6.42)$$

и

$$d_{r,r';\theta,\theta'}^{p,0} = \dim \mathcal{F}_{r,r';\theta,\theta'}^{p,0}(m) = \begin{cases} 1, & r' = r \quad \text{и} \quad \theta' = r - \theta - 1, \\ 0, & \text{в других случаях,} \end{cases} \quad (6.43)$$

где $1 \leq r, r', r'' \leq p - 1$, $0 \leq \theta, \theta', \theta'' \leq r - 1$.

7. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Возможно, наиболее очевидной чертой полубесконечных конструкций является асимметрия между верхнетреугольными и нижнетреугольными генераторами, т.е. для $N = 2$ алгебры – между фермионами $\mathcal{G}$ и $\mathcal{Q}$: начав с модуля, порожденного модами $\mathcal{G}_n$ с условиями $\partial^{p-2}\mathcal{G}(z) \dots \partial\mathcal{G}(z)\mathcal{G}(z) = 0$, мы затратили значительные усилия на построение действия других генераторов алгебры, включая $\mathcal{Q}_m$. Однако соотношение $\partial^{p-2}\mathcal{Q}(z) \dots \partial\mathcal{Q}(z)\mathcal{Q}(z) = 0$ несомненно выполнено для тока, составленного из построенных генераторов $\mathcal{Q}_m$; интересно исследовать, какие следствия дает это соотношение для соответствующих функциональных пространств.

Мы полагаем, что развитые нами применительно к $N = 2$ суперконформной алгебре методы также будут полезны при построении других полубесконечных конструкций. В подобных построениях в зависимости от выбранных связей (аналога соотношений $S_a^p = 0$) на полубесконечном пространстве может обнаружиться структура модуля. Даже в случаях только с одним (бозонным или фермионным) полем, на которое налагаются связи, можно получить подобным образом интересные представления W -алгебр. Нетривиальные связи между $\widehat{sl}(2|1)$ и $N = 2$ [63] и $\widehat{sl}(2)$ [64] теориями представлений позволяют предполагать существование интересных полубесконечных конструкций для некоторого класса $\widehat{sl}(2|1)$ -представлений.

Благодарности. Мы благодарны Р. Вестону, А. К. Погребкову, И. Ю. Сегалову, В. А. Сироте, А. Таормине и Х. Фигероа-О'Фаррилли за обсуждения и полезные замечания. Работа частично поддержана грантом РФФИ № 98-01-01155 и грантом Президента Российской Федерации № 99-15-96037.

Список литературы

- [1] *А. В. Стояновский, Б. Л. Фейгин.* Функц. анализ и его прилож. 1994. Т. 28. № 1. С. 68.
- [2] *B. Feigin, T. Miwa.* Extended vertex operator algebras and monomial bases. hep-th/9804063.
- [3] *P. Bouwknegt, A. W. W. Ludwig, K. Schoutens.* Phys. Lett. B. 1994. V. 338. P. 448; hep-th/9406020; Affine and Yangian symmetries in $SU(2)_1$ conformal field theory. hep-th/9412199; Spinon basis for $\widehat{sl}(2)_k$ integrable highest weight modules and new character formulas. hep-th/9504074.
- [4] *P. Bouwknegt, A. W. W. Ludwig, K. Schoutens.* Spinon basis for higher level $su(2)$ WZW models. hep-th/9412108.
- [5] *G. Georgiev.* Combinatorial constructions of modules for infinite-dimensional Lie algebras. I. Principal subspace. hep-th/9412054.
- [6] *D. Uglov.* Semi-infinite wedges and the conformal limit of the fermionic Calogero–Sutherland model with spin $1/2$. hep-th/9601170.
- [7] *J. Lepowsky, M. Primc.* Contemp. Math. 1985. V. 46.
- [8] *P. Fendley, H. Saleur, N. Warner.* Nucl. Phys. B. 1994. V. 430. P. 577.
- [9] *P. Fendley, A. W. W. Ludwig, H. Saleur.* Exact conductance through point contacts in the $\nu = 1/3$ fractional quantum Hall effect. cond-mat/9408068.
- [10] *Дж. Эндрюс.* Теория разбиений. М.: Наука, 1982.
- [11] *B. Gordon.* Am. J. Math. 1961. V. 83. P. 393.
- [12] *G. E. Andrews, R. J. Baxter, P. J. Forrester.* J. Stat. Phys. 1984. V. 35. P. 193.
- [13] *E. Date, M. Jimbo, T. Miwa, M. Okado.* Phys. Rev. B. 1987. V. 35. P. 2105.
- [14] *G. E. Andrews, A. Berkovich.* A trinomial analogue of Bailey's lemma and $N = 2$ superconformal invariance. q-alg/9702008.
- [15] *S. O. Warnaar.* Fermionic solution of the Andrews–Baxter–Forrester model II: proof of Melzer's polynomial identities. hep-th/9508079.
- [16] *A. Berkovich, B. M. McCoy, A. Schilling.* $N = 2$ supersymmetry and Bailey pairs. hep-th/9512182; Physica A. 1996. V. 228. P. 33.
- [17] *A. Berkovich.* Fermionic counting of RSOS-states and Virasoro character formulae for the unitary minimal series $M(\nu, \nu + 1)$. Exact results. hep-th/9403073; Nucl. Phys. B. 1994. V. 431. P. 315.
- [18] *A. Berkovich, B. M. McCoy, A. Schilling, S. O. Warnaar.* Bailey flows and Bose–Fermi identities for the conformal coset models $(A_1^{(1)})_N \times (A_1^{(1)})_{N'}/(A_1^{(1)})_{N+N'}$. hep-th/9702026; Nucl. Phys. B. 1997. V. 499. P. 621.
- [19] *O. Foda, Y.-H. Quano.* Polynomial identities of the Rogers–Ramanujan type. hep-th/9407191; Int. J. Mod. Phys. A. 1997. V. 12. P. 1651; hep-th/9408086.
- [20] *S. O. Warnaar.* The Andrews–Gordon identities and q -multinomial coefficients. q-alg/9601012; Commun. Math. Phys. 1997. V. 184. P. 203.
- [21] *A. Meurman, M. Primc.* Mem. Am. Math. Soc. 1999. № 652; math.QA/9806105.
- [22] *J. Lepowsky, R. L. Wilson.* Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1981. V. 78. P. 7254; Adv. Math. 1982. V. 45. P. 21; Inv. Math. 1984. V. 77. P. 199; Inv. Math. 1985. V. 79. P. 417.
- [23] *A. Kuniba, T. Nakanishi, J. Suzuki.* Mod. Phys. Lett. A. 1993. V. 8. P. 1649; hep-th/9301018.
- [24] *R. Kedem, T. Klassen, B. McCoy, E. Melzer.* Phys. Lett. B. 1993. V. 304. P. 263; hep-th/9211102; Phys. Lett. B. 1993. V. 307. P. 68; hep-th/9301046; *S. Dasmahapatra, R. Kedem, T. Klassen, B. McCoy, E. Melzer.* Int. J. Mod. Phys. B. 1993. V. 7. P. 3617; hep-th/9303013; *R. Kedem, B. McCoy, E. Melzer.* The sums of Rogers, Schur and Ramanujan and the Bose–Fermi correspondence in $(1+1)$ -dimensional quantum field theory. In: Recent Progress in Statistical Mechanics and Quantum Field Theory. Eds. P. Bouwknegt et al. Singapore: World Scientific, 1995. P. 195; hep-th/9304056; *E. Melzer.* Lett. Math. Phys. 1994. V. 31. P. 233; hep-th/9312043.
- [25] *W. Nahm, A. Recknagel, M. Terhoeven.* Mod. Phys. Lett. A. 1993. V. 8. P. 1835.

- [26] *R. Kedem, B. McCoy.* J. Stat. Phys. 1993. V. 71. P. 865; hep-th/9210129; *S. Dasmahapatra, R. Kedem, T. R. Klassen, B. McCoy, E. Melzer.* J. Stat. Phys. 1994. V. 74. P. 239; hep-th/9304150; *A. Berkovich, B. McCoy.* Continued fractions and fermionic representations for characters of $M(p, p')$ minimal models. hep-th/9412030.
- [27] *A. G. Bytsko, A. Fring.* Anyonic interpretation of Virasoro characters and the thermodynamic Bethe ansatz. hep-th/9711113.
- [28] *J. Suzuki.* J. Phys. A. 1998. V. 31. P. 6887; cond-mat/9805242.
- [29] *B. Feigin, T. Nakanishi, H. Ooguri.* Int. J. Mod. Phys. A. 1992. V. 7. Suppl. 1A. P. 217.
- [30] *B. Feigin, E. Frenkel.* Coinvariants of nilpotent subalgebras of the Virasoro algebra and partition identities. hep-th/9301039.
- [31] *E. Baver, D. Gepner.* Fermionic sum representations for the Virasoro characters of the unitary superconformal minimal models. hep-th/9502118.
- [32] *A. B. Стояновский, Б. Л. Фейгин.* Функц. анализ и его прилож. 1994. Т. 28. № 4. С. 42.
- [33] *D. Bernard, V. Pasquier, D. Serban.* Nucl. Phys. B. 1994. V. 428. P. 612; hep-th/9404050.
- [34] *F. D. M. Haldane.* Phys. Rev. Lett. 1988. V. 60. P. 635.
- [35] *B. S. Shastry.* Phys. Rev. Lett. 1988. V. 60. P. 639.
- [36] *D. Bernard, M. Gaudin, F. D. M. Haldane, V. Pasquier.* J. Phys. A. 1993. V. 26. P. 5219.
- [37] *F. D. M. Haldane, Z. N. C. Ha, J. C. Talstra, D. Bernard, V. Pasquier.* Phys. Rev. Lett. 1992. V. 69. P. 2021.
- [38] *F. D. M. Haldane.* Physics of the ideal Semion gas: spinons and quantum symmetries of the integrable Haldane–Shastry spin chain. cond-mat/9401001.
- [39] *V. G. Kač.* Infinite Dimensional Lie Algebras. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
- [40] *V. Kač, D. H. Peterson.* Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1981. V. 78. P. 3308.
- [41] *A. Pressley, G. Segal.* Loop Groups. Oxford: Clarendon Press, 1986.
- [42] *B. Feigin, S. Loktev.* On generalized Kostka polynomials and quantum Verlinde rule. math.QA/9812093.
- [43] *O. Foda, T. Miwa.* Corner transfer matrices and quantum affine algebras. hep-th/9204068.
- [44] *M. Idzumi, K. Iohara, M. Jimbo, T. Miwa, T. Nakashima, T. Tokihiro.* Quantum affine symmetry in vertex models. hep-th/9208066.
- [45] *M. Jimbo, T. Miwa, Y. Ohta.* Structure of the space of states in RSOS models. hep-th/9208067.
- [46] *M. Kashiwara, T. Miwa, J. U. H. Petersen, C. M. Yung.* Perfect crystals and q -deformed Fock spaces. q-alg/9603025.
- [47] *M. Jimbo, H. Konno, S. Odake, Y. Pugai, J. Shiraishi.* Free field construction for the ABF models in regime II. math.QA/0001071.
- [48] *A. H. Bougourzi.* Bosonization of quantum affine groups and its application to the higher spin Heisenberg model. q-alg/9706015.
- [49] *O. Foda, K. C. Misra, M. Okado.* Demazure modules and vertex models: the $\widehat{sl}(2)$ case. q-alg/9602018.
- [50] *A. Kuniba, K. C. Misra, M. Okado, J. Uchiyama.* Demazure modules and perfect crystals. q-alg/9607011.
- [51] *A. Kuniba, K. C. Misra, M. Okado, T. Takagi, J. Uchiyama.* Characters of Demazure modules and solvable lattice models. q-alg/9707004; J. Algebra. 1998. V. 208. P. 185; q-alg/9707014.
- [52] *A. Schilling, S. O. Warnaar.* Supernomial coefficients, polynomial identities and q -series. q-alg/9701007.
- [53] *M. Wakimoto.* Fusion rules for $N = 2$ superconformal modules. hep-th/9807144.
- [54] *B. L. Feigin, A. M. Semikhatov, I. Yu. Tipunin.* J. Math. Phys. 1998. V. 39. P. 3865; hep-th/9701043.
- [55] *B. L. Feigin, A. M. Semikhatov, V. A. Sirota, I. Yu. Tipunin.* Nucl. Phys. B. 1999. V. 536. P. 617.
- [56] *A. Schwimmer, N. Seiberg.* Phys. Lett. B. 1987. V. 184. P. 191.
- [57] *W. Boucher, D. Friedan, A. Kent.* Phys. Lett. B. 1986. V. 172. P. 316.

- [58] *Y. Matsuo.* Progr. Theor. Phys. 1987. V. 77. P. 793.
- [59] *F. Ravanini, S.-K. Yang.* Phys. Lett. B. 1987. V. 195. P. 202.
- [60] *V. G. Kač, M. Wakimoto.* Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1988. V. 85. P. 4956.
- [61] *A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. B. Zamolodchikov.* Nucl. Phys. B. 1984. V. 241. P. 333.
- [62] *В. А. Фатеев, А. Б. Замолотчиков.* ЯФ. 1986. Т. 43. С. 1031.
- [63] *A. M. Semikhatov.* Verma modules, extremal vectors, and singular vectors on the non-critical $N = 2$ string worldsheet. hep-th/9610084.
- [64] *P. Bowcock, B. L. Feigin, A. M. Semikhatov, A. Taormina.* $\widehat{sl}(2|1)$ and $\widehat{D}(2|1; \alpha)$ as vertex operator extensions of dual affine $sl(2)$ algebras. hep-th/9907171; Commun. Math. Phys. 2000. V. 214. P. 495.

Поступила в редакцию 24.VII.2000 г.