Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Белавин, Р. А. Усманов, Минимальная решеточная модель $LM(3, 4)$ и двумерная модель Изинга с цилиндрическими граничными условиями, *ТМФ*, 2001, том 126, номер 1, 63–83

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf415>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 15:36:32

© 2001 г.

А. А. Белавин*, Р. А. Усманов*

МИНИМАЛЬНАЯ РЕШЕТОЧНАЯ МОДЕЛЬ
 $LM(3, 4)$ И ДВУМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ИЗИНГА
С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ
ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Рассматриваются интегрируемая модель XXZ со специальными открытыми граничными условиями и одномерные квантовые цепочки Изинга с четырьмя разными граничными условиями. Показано, что каждая из цепочек Изинга совпадает с получаемой в результате квантово-групповой редукции модели XXZ минимальной решеточной моделью $LM(3, 4)$, причем число узлов в последней определяется типом граничных условий. Установлена связь между двумерной моделью Изинга с четырьмя разными типами граничных условий и моделью $LM(3, 4)$.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работах [1], [2] были введены и изучены конечные трансфер-матрицы критической модели Изинга, отвечающие четырем разным цилиндрическим граничным условиям. Было показано, что в каждом конкретном случае эти матрицы, зависящие от спектрального параметра, образуют коммутирующее семейство и удовлетворяют одному и тому же функциональному уравнению, которое позволяет найти их собственные значения.

Как будет показано ниже, логарифмическая производная трансфер-матрицы, вычисленная при нулевом значении спектрального параметра, совпадает с гамильтонианом одномерной квантовой цепочки Изинга с некоторыми граничными членами. Последние для каждого типа граничных условий двумерной модели свои. Собственные значения гамильтониана цепочки Изинга в точности совпадают с определенными собственными значениями гамильтониана цепочки XXZ с открытыми граничными условиями при специальном значении параметра анизотропии последней [3]–[5].

В работе [6] введено понятие квантово-групповой редукции в интегрируемой XXZ -модели с открытыми граничными условиями при параметре анизотропии, равном корню из единицы. Там же было показано (см. также [7]), что в результате квантово-групповой редукции конфигурационного пространства XXZ -модели получается

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Черноголовка, Московская обл., Россия

минимальная модель интегрируемой решеточной теории $LM(p, p+1)$ (p – параметр цепочки). Последняя в термодинамическом пределе есть просто $M(p, p+1)$, минимальная модель конформной теории поля с вирасоровским центральным зарядом $c = 1 - 6/(p(p+1))$.

Интегрируемость модели XXZ с открытыми граничными условиями проявляется в наличии коммутирующего семейства трансфер-матриц, найденного Складниным [8], [9]. Трансфер-матрицы Складнина модели XXZ после квантово-групповой редукции также удовлетворяют некоторому функциональному уравнению [7]. Это уравнение в случае $p = 3$ совпадает с функциональным уравнением для трансфер-матриц Изинга, что указывает на эквивалентность моделей Изинга и $LM(3, 4)$.

В данной работе мы находим уже упомянутую связь между критической моделью Изинга на двумерной решетке с граничными условиями, введенными в [2], и одномерными квантовыми цепочками Изинга. Кроме того, следуя [10], мы находим условия, при которых имеет место точное совпадение моделей $LM(3, 4)$ и этих одномерных цепочек. А именно, справедливы следующие утверждения.

1. Цепочка XXZ с нечетным числом узлов $2L+1$ после квантово-групповой редукции конфигурационного пространства эквивалентна цепочке Изинга с L узлами и смешанными граничными условиями.

2. Конфигурационное пространство цепочки XXZ с четным числом узлов $2L$ после квантово-групповой редукции можно разложить в прямую сумму двух подпространств одинаковой размерности 2^{L-1} , образующих два разных представления алгебры Темперли–Либа T_{2L-1} и являющихся собственными подпространствами оператора Казимира группы $U_q(sl(2))$. Обозначим подпространство, соответствующее собственному значению $(S^2)_q = \sqrt{2}$, через V_1 , а подпространство, соответствующее собственному значению $(S^2)_q = 0$, через V_0 . Тогда отождествление производится следующим образом:

а) совокупность собственных значений гамильтониана цепочки XXZ с $2L$ узлами, вычисленных на векторах из V_0 , совпадает со спектром цепочки Изинга с $L-1$ узлами и граничными условиями $(++)$, если L четное, и граничными условиями $(+-)$, если L нечетное;

б) совокупность собственных значений гамильтониана цепочки XXZ с $2L$ узлами, вычисленных на векторах из V_1 , совпадает со спектром цепочки Изинга с $L-1$ узлами и граничными условиями $(++)$, если L нечетное, и граничными условиями $(+-)$, если L четное.

3. Спектр цепочки Изинга с L узлами и открытыми граничными условиями совпадает с объединенным спектром цепочек Изинга с $L-1$ узлами и граничными условиями $(++)$ и $(+-)$.

Тем самым мы устанавливаем связь между интегрируемой моделью XXZ и моделью Изинга на двумерной решетке с разными граничными условиями.

В разделе 2 определяется модель Изинга с различными цилиндрическими граничными условиями. В разделе 3 вводится семейство трансфер-матриц для четырех типов граничных условий. В разделе 4 найдена связь между введенными трансфер-матрицами и гамильтонианами одномерных цепочек Изинга. Затем в разделе 5 вводится интегри-

руемая XXZ -модель со специальными открытыми граничными условиями. В разделе 6 дается определение алгебры Темперли–Либа и исследуются две ее реализации в терминах динамических переменных цепочек Изинга и XXZ . В разделе 7 проводится отождествление цепочки Изинга и модели $LM(3, 4)$. В приложениях доказаны некоторые утверждения, использованные в основном тексте.

2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрим два типа двумерных решеток Изинга [2]:

- 1) конечная квадратная решетка, повернутая на 45° , причем в каждой строке содержится либо L , либо $L - 1$ квадратов;
- 2) такая же решетка, но с L квадратами в каждой строке.

По вертикали каждая решетка содержит по L' квадратов в ряду. Мы будем отождествлять первую строку квадратов с $L' + 1$ строкой (цилиндрические граничные условия). Обозначим решетку первого типа символом $\mathcal{L}$, а решетку второго типа символом $\mathcal{L}'$. Обе решетки изображены на рис. 1. Заметим, что $\mathcal{L}$ состоит из $2L$, а $\mathcal{L}'$ — из $2L + 1$ (зигзагообразных) столбцов. Введем число N : $N = 2L$ для решетки $\mathcal{L}$, $N = 2L + 1$ для решетки $\mathcal{L}'$. В дальнейшем будем считать L фиксированным.

Рис. 1

На этих решетках обычным образом определим модель Изинга, рассматривая каждый узел решетки как спин, принимающий значения $+1$ и -1 . Поскольку, в отличие от тороидальной модели, спины, занимающие самые крайние узлы в некоторой строке, не равны тождественно, мы можем рассмотреть различные граничные условия:

$++$: выбираем решетку $\mathcal{L}$ и полагаем все спины на левой и правой границах равными $+1$;

$+-$: выбираем решетку $\mathcal{L}$ и полагаем все спины на левой и правой границах равными $+1$ и -1 , соответственно;

смешанные условия: выбираем решетку $\mathcal{L}'$ и полагаем все спины на левой границе равными $+1$, причем на значения спинов на правой границе никаких ограничений не налагаем;

свободные условия: выбираем решетку $\mathcal{L}$, причем на значения спинов никаких ограничений не налагаем.

3. ТРАНСФЕР-МАТРИЦЫ

Обозначая набор спинов в одном ряду, не зафиксированных граничными условиями,

через Φ , определим трансфер-матрицы следующим образом:

1) для свободных граничных условий:

$$T_{\Phi, \Phi'} = \sum_{\Phi''} \exp \left(J \sum_{j=1}^L \sigma_j'' (\sigma_j + \sigma_j') + K \sum_{j=1}^L \sigma_{j+1}'' (\sigma_j + \sigma_j') \right);$$

2) для фиксированных граничных условий:

$$T_{\Phi, \Phi'} = \sum_{\Phi''} \exp \left(2J\sigma_1'' + K \sum_{j=1}^{L-1} \sigma_j'' (\sigma_j + \sigma_j') + J \sum_{j=1}^{L-1} \sigma_{j+1}'' (\sigma_j + \sigma_j') + 2\tau K\sigma_L'' \right),$$

где $\tau = \pm 1$ соответственно для граничных условий $(++)$ и $(+-)$;

3) для смешанных граничных условий:

$$T_{\Phi, \Phi'} = \sum_{\Phi''} \exp \left(2K\sigma_1'' + J \sum_{j=1}^L \sigma_j'' (\sigma_j + \sigma_j') + K \sum_{j=1}^L \sigma_{j+1}'' (\sigma_j + \sigma_j') \right).$$

Здесь везде Φ , Φ'' и Φ' – три последовательных ряда спинов, по Φ'' производится суммирование. В случае свободных и фиксированных граничных условий трансфер-матрицы определяются на решетке $\mathcal{L}$, в случае смешанных – на решетке $\mathcal{L}'$.

Трансфер-матрицы, определенные выше, обладают свойством коммутативности, т.е.

$$T(J, K)T(J', K') = T(J', K')T(J, K),$$

если

$$\text{sh}(2K) \text{sh}(2J) = \text{sh}(2K') \text{sh}(2J'). \quad (1)$$

Доказательство этого факта приведено в приложении А.

Мы будем рассматривать критическую модель Изинга, и поэтому $\text{sh}(2J) \text{sh}(2K) = 1$. Следуя Бакстеру, будем использовать параметризацию

$$\text{sh}(2J) = \text{ctg } u, \quad \text{sh}(2K) = \text{tg } u,$$

где u – спектральный параметр, $0 < u < \pi/2$.

Как показано в [2], матрица $T(u)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$T(2u)T\left(2u + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\cos^{2(N+1)}(2u) - \sin^{2(N+1)}(2u)}{\cos(4u)} \frac{2^N (-1)^L}{(\sin(2u)\cos(2u))^N} \quad (2)$$

в случае фиксированных граничных условий и уравнению

$$T(2u)T\left(2u + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\cos^{2(N+1)}(2u) - \sin^{2(N+1)}(2u)}{\cos(4u)} \frac{2^{N+2} (-1)^L}{(\sin(2u)\cos(2u))^N} \quad (3)$$

в случае свободных и смешанных граничных условий.

4. СВЯЗЬ ТРАНСФЕР-МАТРИЦ С ГАМИЛЬТониАНОМ ОДНОМЕРНОЙ ЦЕПОЧКИ ИЗИНГА

Рассмотрим гамильтониан одномерной квантовой цепочки Изинга с L узлами

$$H_{\text{Ising}}^0(L) = \sum_{j=1}^{L-1} \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z + \sum_{j=1}^L \sigma_j^x. \quad (4)$$

Этот гамильтониан связан с трансфер-матрицей $T(u)$ модели Изинга со свободными граничными условиями следующим образом:

$$H_{\text{Ising}}^0(L) = T^{-1}(0) \dot{T}(0) - \text{“сингулярные члены”}.$$

Здесь $T^{-1}(u)$ – обратная матрица, а $\dot{T}(u)$ – производная от матрицы $T(u)$ по параметру u .

Для других граничных условий логарифмическая производная в нуле слегка модифицируется. В данной работе мы показываем, что

1) в случае граничных условий $(++)$ получается гамильтониан цепочки Изинга с $L - 1$ узлами

$$H_{\text{Ising}}^{++}(L) = H_{\text{Ising}}^0(L - 1) + \sigma_1^z + \sigma_{L-1}^z,$$

2) в случае граничных условий $(+-)$ получается гамильтониан цепочки Изинга с $L - 1$ узлами

$$H_{\text{Ising}}^{+-}(L) = H_{\text{Ising}}^0(L - 1) + \sigma_1^z - \sigma_{L-1}^z,$$

3) в случае смешанных граничных условий получается гамильтониан цепочки Изинга с L узлами

$$H_{\text{Ising}}^{\text{смеш}}(L) = H_{\text{Ising}}^0(L) + \sigma_1^z.$$

Здесь H_{Ising}^0 – гамильтониан модели со свободными граничными условиями.

Доказательство перечисленных фактов приведено в приложении Б.

5. МИНИМАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ РЕШЕТОЧНЫХ ТЕОРИЙ

Рассмотрим одномерную XXZ -цепочку со свободными граничными условиями [3]

$$H_{XXZ} = \sum_{n=1}^{N-1} \left[\sigma_n^+ \sigma_{n+1}^- + \sigma_n^- \sigma_{n+1}^+ + \frac{q + q^{-1}}{4} \sigma_n^z \sigma_{n+1}^z + \frac{q - q^{-1}}{4} (\sigma_n^z - \sigma_{n+1}^z) \right],$$

$$\sigma_n^\pm = 1 \otimes \dots \otimes \sigma^\pm \otimes \dots \otimes 1,$$

$$\sigma_n^z = 1 \otimes \dots \otimes \sigma^z \otimes \dots \otimes 1,$$

$$\sigma^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Как показано в [6], гамильтониан $H_{X X Z}$ коммутирует с квантовой группой $U_q(sl(2))$, в том числе и с ее генераторами X, Y, H , которые определяются формулами

$$\begin{aligned} X &= \sum_{n=1}^N q^{\frac{1}{2}(\sigma_1^z + \dots + \sigma_{n-1}^z)} \sigma_n^+ q^{-\frac{1}{2}(\sigma_{n+1}^z + \dots + \sigma_N^z)}, \\ Y &= \sum_{n=1}^N q^{\frac{1}{2}(\sigma_1^z + \dots + \sigma_{n-1}^z)} \sigma_n^- q^{-\frac{1}{2}(\sigma_{n+1}^z + \dots + \sigma_N^z)}, \\ H &= \sum_{n=1}^N \frac{\sigma_n^z}{2} \end{aligned}$$

и удовлетворяют следующим соотношениям коммутации:

$$[H, X] = X, \quad [H, Y] = -Y, \quad [X, Y] = \frac{q^{2H} - q^{-2H}}{q - q^{-1}}. \quad (6)$$

Кроме того, с квантовой группой $U_q(sl(2))$ коммутируют также плотности

$$H_n = \sigma_n^+ \sigma_{n+1}^- + \sigma_n^- \sigma_{n+1}^+ + \frac{q + q^{-1}}{4} \sigma_n^z \sigma_{n+1}^z + \frac{q - q^{-1}}{4} (\sigma_n^z - \sigma_{n+1}^z),$$

где $n = 1, \dots, N - 1$.

Благодаря указанной симметрии гамильтониана его спектр можно классифицировать согласно теории представлений алгебры $U_q(sl(2))$.

Теория представлений алгебры $U_q(sl(2))$ хорошо изучена для чисел q , не равных корню из единицы. В данном случае представления этой алгебры эквивалентны представлениям обычной алгебры $U(sl(2))$, т.е. конфигурационное пространство $(\mathbb{C}^2)^N$ цепочки спинов разлагается в прямую сумму неприводимых представлений ρ_j (j – старший вес), каждому из которых однозначно соответствует некоторое представление $sl(2)$. Например, если $N = 4$, то $(\mathbb{C}^2)^4$ можно разложить в сумму $\rho_2 + 3\rho_1 + 2\rho_0$.

Мы же будем изучать случай $q^{p+1} = -1$ [6], [11]. В этом случае генераторы X и Y нильпотентны:

$$X^{p+1} = 0, \quad Y^{p+1} = 0, \quad (7)$$

и возникает совсем другая картина представлений. Например, если $q^4 = -1$ и $N = 4$, то $X^4 = 0$ и $Y^4 = 0$. Пространство $(\mathbb{C}^2)^4$ разлагается в сумму одного “плохого” 8-мерного представления (ρ_2, ρ_1) типа I и четырех “хороших” представлений $2\rho_1 + 2\rho_0$ типа II [6]. Имеется изоморфизм представлений типа II и обычных представлений алгебры $U(sl(2))$. Представление же типа I можно рассматривать как результат склеивания двух представлений ρ_2 и ρ_1 . Оно приводимо (но не является вполне приводимым), поскольку содержит 3-мерное инвариантное подпространство.

В общем случае $q^{p+1} = -1$ [6], [11] конфигурационное пространство разлагается в сумму “плохих” представлений типа I со старшими весами $S_z \geq p/2$ и “хороших” представлений типа II со старшими весами $S_z < p/2$, не являющихся подпространствами

каких-либо “плохих”. Старшие векторы v_j “хороших” представлений можно охарактеризовать условием

$$v_j \in V_p \equiv \text{Ker } X / \text{Im } X^p. \quad (8)$$

Поскольку алгебра $U_q(sl(2))$ коммутирует с гамильтонианом H_{XXZ} , мы можем естественным образом ограничить действие последнего на пространство V_p . Полученная в результате этой квантово-групповой редукции модель называется моделью $LM(p, p+1)$ [7].

Число представлений веса $j < p/2$ в разложении $(\mathbb{C}^2)^N$ равно числу ограниченных путей длины N с началом в нуле и концом в j . Ограниченность означает, что путь не должен пересекать прямые $j = 0$ и $j = p/2$. Например, если $p = 3$ и N нечетно, то допустимы только пути с концом в $j = 1/2$, и поэтому число путей равно 2^{N-1} .

С гамильтонианом цепочки XXZ связана трансфер-матрица Склянина [8], [9]

$$T_{1/2}(u) = (-1)^N \text{tr} \left(e^{-\sigma^z(u+\eta)} L(u) e^{\sigma^z u} L^{t \otimes t}(u) \right),$$

где $L(u)$ – матрица монодромии:

$$L(u) = R_N(u) \dots R_1(u).$$

Матрица $R(u)$ в свою очередь дается выражением

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(u+\eta) & 0 \\ 0 & \sin u \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sin \eta & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \sin \eta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \sin u & 0 \\ 0 & \sin(u+\eta) \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Имеет место соотношение

$$H_{XXZ} = \frac{\sin \eta}{2} \frac{d \ln T_{1/2}(u)}{du} \Big|_{u=0} + \frac{\sin^2 \eta}{2 \cos \eta} - \frac{N}{2} \cos \eta.$$

Трансфер-матрицы коммутируют между собой при разных значениях спектрального параметра, а следовательно, коммутируют и с гамильтонианом, т.е.

$$[T_{1/2}(u), T_{1/2}(v)] = 0, \quad [T_{1/2}(u), H_{XXZ}] = 0.$$

Как показано в [7], после квантово-групповой редукции матрица $T_{1/2}(u)$ удовлетворяет следующему функциональному уравнению:

$$T_{1/2}(u) T_{1/2} \left(u + \frac{\pi}{4} \right) = 2^{-2N+1} \frac{\cos^{2(N+1)}(2u) - \sin^{2(N+1)}(2u)}{\cos(4u)}. \quad (9)$$

Сравнивая уравнения (2) и (9), мы видим, что в случае четных N и фиксированных граничных условий матрицы

$$T_{1/2}(u) \quad \text{и} \quad 2^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2^{2N}} (\sin(4u))^L T_{\text{Ising}}(2u)$$

удовлетворяют одному и тому же функциональному уравнению. Здесь трансфер-матрица модели Изинга с фиксированными граничными условиями обозначена через $T_{\text{Ising}}(u)$, а не $T(u)$, как это было в (2). Отсюда следует, что их собственные значения одинаковы, и поэтому обе матрицы эквивалентны друг другу.

В случае четных N и свободных граничных условий одному и тому же функциональному уравнению удовлетворяют матрицы

$$T_{1/2}(u) \text{ и } 2^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2^{2N+1}} (\sin(4u))^L T_{\text{Ising}}(2u),$$

где матрица $T_{\text{Ising}}(u)$ — трансфер-матрица модели Изинга со свободными граничными условиями.

Аналогично в случае нечетных N , т.е. для смешанных граничных условий, матрицы

$$T_{1/2}(u) \text{ и } 2^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2^N} (\sin(2u))^{L+1} (\cos(2u))^L T_{\text{Ising}}(2u)$$

также удовлетворяют одному и тому же функциональному уравнению, где $T_{\text{Ising}}(u)$ — трансфер-матрица модели Изинга со смешанными граничными условиями.

Еще раз подчеркнем, что цепочка XXZ содержит N узлов, $N = 2L$ для свободных и для фиксированных граничных условий и $N = 2L + 1$ для смешанных граничных условий.

То, что уравнения совпадают, свидетельствует в пользу идентичности моделей (множители перед матрицей $T_{\text{Ising}}(2u)$ несущественны, поскольку они влияют только на ее нормировку). Ниже мы выясним, как именно происходит отождествление.

6. АЛГЕБРА ТЕМПЕРЛИ–ЛИБА

Напомним определение алгебры Темперли–Либа. Она представляет из себя алгебру с образующими e_i , $i = 1, \dots, n$, удовлетворяющими следующим соотношениям:

$$e_i e_{i \pm 1} e_i = e_i, \quad e_i^2 = \sqrt{(q + q^{-1})} e_i, \quad [e_i, e_j] = 0, \quad |i - j| > 1. \quad (10)$$

Алгебру Темперли–Либа с n образующими будем обозначать символом T_n . Везде в дальнейшем будем считать, что $q = e^{i\pi/4}$.

Существуют реализации алгебры Темперли–Либа в терминах динамических переменных моделей Изинга и XXZ . А именно, можно проверить, что

1) выражения

$$\begin{aligned} e_{2i-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_i^z \sigma_{i+1}^z + 1), \quad i = 1, \dots, L, \\ e_{2i} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_i^x + 1), \quad i = 1, \dots, L-1, \end{aligned}$$

дают реализацию алгебры T_{2L-1} (удовлетворяют соотношениям (10));

2) выражения

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_1^z + 1), \\ e_{2i} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_i^z \sigma_{i+1}^z + 1), \quad i = 1, \dots, L, \\ e_{2i-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_i^x + 1), \quad i = 2, \dots, L \end{aligned}$$

дают реализацию алгебры T_{2L} ;

3) выражения

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_1^z + 1), \\ e_{2i-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_i^z \sigma_{i+1}^z + 1), \quad i = 2, \dots, L, \\ e_{2i} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_i^x + 1), \quad i = 1, \dots, L-1, \\ e_{2L-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_{L-1}^z + 1) \end{aligned}$$

дают реализацию алгебры T_{2L-1} ;

4) выражения

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_1^z + 1), \\ e_{2i-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_i^z \sigma_{i+1}^z + 1), \quad i = 2, \dots, L, \\ e_{2i} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_i^x + 1), \quad i = 1, \dots, L-1, \\ e_{2L-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sigma_{L-1}^z + 1) \end{aligned}$$

дают реализацию алгебры T_{2L-1} .

Используя эти выражения, приводим гамильтониан модели Изинга для всех четырех граничных условий к виду

$$H_{\text{Ising}} = \sum_{i=1}^{N-1} (e_i \sqrt{2} - 1),$$

где $N = 2L$ для свободных и фиксированных граничных условий и $N = 2L + 1$ для смешанных граничных условий.

В терминах динамических переменных модели XXZ выражения

$$e_i = -H_i + \frac{\sqrt{2}}{4},$$

где $i = 1, \dots, N-1$, дают реализацию алгебры T_{N-1} , а гамильтониан цепочки XXZ с N узлами принимает вид

$$H_{XXZ} = - \sum_{i=1}^{N-1} \left(e_i - \frac{\sqrt{2}}{4} \right).$$

Таким образом, гамильтонианы моделей XXZ и Изинга в терминах образующих алгебры Темперли–Либа имеют одинаковый вид. Если обе реализации осуществляют одно и то же представление этой алгебры, то они эквивалентны. В следующем разделе мы найдем условия, при которых эта эквивалентность имеет место.

7. ОТОЖДЕСТВЛЕНИЕ МОДЕЛИ $LM(3, 4)$ И МОДЕЛИ ИЗИНГА

7.1. Цепочка XXZ с нечетным числом узлов и цепочка Изинга со смешанными граничными условиями. Рассмотрим цепочку XXZ с $N = 2L + 1$ узлами и цепочку Изинга с L узлами и смешанными граничными условиями. Обеим цепочкам соответствует одна и та же алгебра T_{2L} . Плотности H_i гамильтониана модели XXZ коммутируют с квантовой группой $U_q(sl(2))$. Отсюда следует, что конфигурационное пространство модели $LM(3, 4)$ образует представление алгебры T_{2L} . Это представление имеет размерность 2^L и является неприводимым.

С другой стороны, представление алгебры Темперли–Либа, реализуемое моделью Изинга, имеет ту же размерность и также является неприводимым, поскольку действием операторов σ_x из заданного вектора можно получить все конфигурационное пространство модели Изинга.

Учитывая тот факт, что T_{2L} с $q = e^{i\pi/4}$ имеет только одно неприводимое представление размерности 2^L [12], а также то, что гамильтонианы обеих моделей имеют одинаковый вид в терминах образующих T_{2L} , делаем вывод, что обе модели эквивалентны. Проверить это можно численно, сравнивая собственные значения оператора

$$\sum_{i=1}^{N-1} e_i,$$

вычисленные на векторах конфигурационного пространства $LM(3, 4)$ и на векторах из конфигурационного пространства Изинга для небольших L .

7.2. Цепочка XXZ с четным числом узлов и цепочки Изинга с фиксированными граничными условиями. Теперь рассмотрим цепочку XXZ с $N = 2L$ узлами и цепочку Изинга с $L - 1$ узлами и фиксированными граничными условиями. В предыдущем разделе было показано, что обеим цепочкам соответствует одна и та же алгебра Темперли–Либа T_{N-1} .

В этом случае размерность конфигурационного пространства каждого из гамильтонианов Изинга вдвое меньше размерности конфигурационного пространства V_3 модели $LM(3, 4)$. Пространство V_3 имеет размерность 2^L и разбивается на два подпространства, каждое из которых является собственным подпространством оператора Казимира

$$(S^2)_q = YX + \left(\frac{q^{H+\frac{1}{2}} - q^{-H-\frac{1}{2}}}{q - q^{-1}} \right)^2 - \left(\frac{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}}{q - q^{-1}} \right)^2;$$

одно из них отвечает собственному значению $(S^2)_q = 0$, другое – собственному значению $(S^2)_q = \sqrt{2}$. Будем обозначать первое подпространство символом V_0 , а второе – символом V_1 . Поскольку оператор Казимира коммутирует с алгеброй T_{2L-1} , подпространства V_0 и V_1 образуют представления последней. Оба представления неприводимы, причем размерность каждого из них равна 2^{L-1} , что совпадает с размерностью конфигурационного пространства каждой из двух цепочек Изинга.

Как показано в [10],

$$2^{2N} q^{-N} e^{-2iNu} T_{1/2}(u \rightarrow -i\infty) = \{(q - q^{-1})^2 (S^2)_q + (q + q^{-1})\},$$

откуда видно, что пространства V_0 и V_1 являются собственными подпространствами матрицы, стоящей в левой части последнего равенства, отвечающими двум ее собственным значениям. Эти собственные значения равны ± 1 .

Алгебра T_{2L-1} с $q = e^{i\pi/4}$ обладает только двумя неприводимыми представлениями размерности 2^{L-1} [12]. Поэтому конфигурационное пространство цепочки Изинга с граничными условиями $(++)$ должно быть изоморфно одному из подпространств V_0 или V_1 . То же самое можно сказать и про конфигурационное пространство цепочки Изинга с граничными условиями $(+-)$.

В работе [2] было показано, что $T_{\text{Ising}}(-i\infty) = \pm 2^L$, где верхний знак отвечает граничным условиям $(++)$, а нижний – граничным условиям $(+-)$. После квантово-групповой редукции матрицы $2^{1-2N} (\sin(4u))^L T_{\text{Ising}}(2u)$ и $T_{1/2}(u)$ становятся эквивалентными. Поэтому, переходя к пределу $u \rightarrow -i\infty$ в равенстве

$$T_{1/2}(u) = 2^{1-2N} (\sin(4u))^L T_{\text{Ising}}(2u)$$

и подставляя $q = e^{i\pi/4}$, получим

$$\frac{1}{2^L} T_{\text{Ising}}(-i\infty) = (-1)^L \{-\sqrt{2} (S^2)_q + 1\}. \quad (11)$$

Поскольку собственные значения оператора Казимира есть 0 и $\sqrt{2}$, мы приходим к заключению, что, например, для четных L пространству V_0 соответствует конфигурационное пространство цепочки Изинга с граничными условиями $(++)$, а пространству V_1 – конфигурационное пространство цепочки Изинга с граничными условиями $(+-)$. Для нечетных L пространству V_0 соответствуют граничные условия $(+-)$, а пространству V_1 – граничные условия $(++)$.

7.3. Цепочка XXZ с четным числом узлов и цепочка Изинга со свободными граничными условиями. Пусть теперь имеются цепочка XXZ с четным числом узлов $N = 2L$ и цепочка Изинга с L узлами и свободными граничными условиями. Им соответствует алгебра T_{2L-1} . Размерности конфигурационных пространств цепочки Изинга и модели $LM(3, 4)$ совпадают и равны 2^L .

Введем оператор C . В случае свободных граничных условий

$$C = \sigma_1^x \sigma_2^x \dots \sigma_L^x.$$

Очевидно, что $C^2 = 1$. Поэтому собственные значения оператора C есть ± 1 . Этот оператор коммутирует с гамильтонианом H_{Ising}^0 . Следовательно, конфигурационное пространство цепочки Изинга со свободными граничными условиями разбивается на два сектора, соответствующих двум собственным значениям оператора C . Будем обозначать эти два сектора C_+ и C_- .

В работе [10] показано, что оператор C связан с асимптотикой трансфер-матрицы модели Изинга с L узлами и свободными граничными условиями соотношением

$$C = \frac{1}{2^{L+1}} T_{\text{Ising}}(-i\infty).$$

Точно так же, как и для случая фиксированных граничных условий, можно получить равенство

$$C = \frac{1}{2^{L+1}} T_{\text{Ising}}(-i\infty) = (-1)^L \{ -\sqrt{2}(S^2)_q + 1 \}, \quad (12)$$

из которого видно, что имеется взаимно однозначное соответствие между секторами в конфигурационном пространстве цепочки Изинга и подпространствами V_0 и V_1 . А именно, при четных L пространству V_0 соответствует сектор C_+ , а пространству V_1 – сектор C_- . При нечетных L наоборот: пространству V_0 соответствует сектор C_- , пространству V_1 – сектор C_+ .

Таким образом, все утверждения, сформулированные во введении, доказаны.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Коммутативность трансфер-матриц Изинга

Рассмотрим случай граничных условий $(++)$. Доказательство будем проводить, используя соотношение звезда–треугольник. Для простоты рассмотрим случай одного свободного спина. Произведение трансфер-матриц $T(J, K)T(J', K')$ можно изобразить следующей исходной диаграммой (рис. 2):

Рис. 2

Здесь α и β фиксированы, а по всем остальным неграничным спинам производится суммирование. Мы должны доказать, что эта диаграмма равна диаграмме, изображенной на рис. 3, получающейся из исходной заменой $K \leftrightarrow K'$, $J \leftrightarrow J'$.

Рис. 3

Для дальнейшего нам понадобятся два тождества, справедливые при $\text{sh}(2J) \text{sh}(2K) = \text{sh}(2J') \text{sh}(2K')$. Одно из них можно изобразить диаграммным равенством

$$\begin{array}{c} \diagup \\ K' \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \\ J' \end{array} \begin{array}{c} \diagup \\ K \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \\ J \end{array} \Big| M = M \Big| \begin{array}{c} \diagup \\ J \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \\ K \end{array} \begin{array}{c} \diagup \\ J' \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \\ K' \end{array} .$$

Для доказательства применим соотношение звезда–треугольник к треугольникам (J, J', M) в обеих частях равенства. Получим (при условии, что $\text{sh}(2K) \text{sh}(2J) = \text{sh}(2K') \text{sh}(2J')$)

$$\begin{array}{c} \diagup \\ K' \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \\ K \end{array} \begin{array}{c} \diagup \\ K \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \\ K' \end{array} \Big| G = G \Big| \begin{array}{c} \diagup \\ K' \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \\ K \end{array} \begin{array}{c} \diagup \\ K \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \\ K' \end{array} .$$

Мы видим, что тождество действительно имеет место.

Второе тождество также представляется в виде равенства двух диаграмм

$$\begin{array}{c} \diagup \\ J' \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \\ K' \end{array} \begin{array}{c} \diagup \\ J' \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \\ K' \end{array} \Big| M_1 = M_1 \Big| \begin{array}{c} \diagup \\ J \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \\ K' \end{array} \begin{array}{c} \diagup \\ K \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \\ J' \end{array}$$

и доказывается аналогично.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству нашего утверждения о коммутативности семейства трансфер-матриц. Используя первое из доказанных тождеств, приведем исходную диаграмму к виду, представленному на рис. 4.

Рис. 4

Естественно, что это можно сделать только при условии $\text{sh}(2J) \text{sh}(2K) = \text{sh}(2J') \times \text{sh}(2K') = \lambda$. Далее применим соотношение звезда–треугольник к двум крайним треугольникам (J, J', M) и $(K, K', -M)$. В результате получим диаграмму на рис. 5.

Рис. 5

Здесь R_1, R_2 – множители, возникшие после применения соотношения звезда–треугольник,

$$\begin{aligned} R_1^2 &= \frac{2\lambda^2}{\text{sh}(2J) \text{sh}(2J') \text{sh}(2M)}, \\ R_2^2 &= -\frac{2\lambda^2}{\text{sh}(2K) \text{sh}(2K') \text{sh}(2M)}, \end{aligned} \tag{A.1}$$

а константы связи P и L связаны с M соотношением

$$\text{sh}(2P) \text{sh}(2M) = -\text{sh}(2L) \text{sh}(2M) = \lambda. \quad (\text{A.2})$$

Теперь применим второе из доказанных нами тождеств к диаграмме на рис. 5. Получим диаграмму, изображенную на рис. 6.

$$\frac{1}{R_1 R_2} \cdot \left(\begin{array}{c} + \\ M_1 \\ J \\ K' \\ K \\ J' \\ + \\ \end{array} \begin{array}{c} \beta \\ K \\ J' \\ J \\ K' \\ K' \\ \alpha \\ \end{array} \begin{array}{c} J \\ K' \\ K \\ J' \\ K \\ J' \\ \end{array} \begin{array}{c} + \\ -M_1 \\ L \\ -M_2 \\ + \\ \end{array} \right)$$

Рис. 6

Очевидно, что M_1 и M_2 связаны соотношением $M_1 = -M_2$. Поэтому при вычислении статсуммы они взаимно сокращаются.

Опять применим первое тождество. Получим диаграмму на рис. 7.

$$\frac{1}{R_1 R_2} \cdot \left(\begin{array}{c} + \\ J \\ K' \\ K \\ J' \\ + \\ \end{array} \begin{array}{c} \beta \\ K \\ J' \\ J \\ K' \\ K' \\ \alpha \\ \end{array} \begin{array}{c} J \\ K \\ J' \\ K \\ J' \\ K' \\ \end{array} \begin{array}{c} + \\ -M_3 \\ L \\ -M_3 \\ + \\ \end{array} \right)$$

Рис. 7

Легко показать, что константа связи M_3 , введенная здесь, есть $-M$.

Снова применяя соотношение звезда-треугольник, получим диаграмму на рис. 8.

Рис. 8

Здесь

$$\begin{aligned} R_3^2 &= \frac{2\lambda^2}{\text{sh}(2J) \text{sh}(2J') \text{sh}(2M)}, \\ R_4^2 &= -\frac{2\lambda^2}{\text{sh}(2K) \text{sh}(2K') \text{sh}(2M)}, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

константы связи F , N и M удовлетворяют соотношению

$$\text{sh}(2M) \text{sh}(2N) = -\text{sh}(2M) \text{sh}(2F) = \lambda, \quad (\text{A.4})$$

а по спинам η и σ производится суммирование.

Видно, что диаграмма на рис. 8 очень похожа на диаграмму на рис. 3 (за исключением общего множителя и боковых отростков). Покажем, что можно подобрать константы связи P , F , N и L , удовлетворяющие соотношениям (A.2) и (A.4), такие, что боковые отростки и общий множитель взаимно сокращаются.

Боковой отросток имеет вид

$$\mu \frac{N}{\eta} \frac{L}{\eta} + = \begin{cases} 2 \text{ch}(L + N), & \mu = +, \\ 2 \text{ch}(L - N), & \mu = -. \end{cases}$$

Положим

$$N = L + \frac{\pi i}{2}. \quad (\text{A.5})$$

Тогда

$$\mu \frac{N}{\eta} \frac{L}{\eta} + = \begin{cases} 2i \text{sh}(2L), & \mu = + \\ 0, & \mu = - \end{cases} = 2i \text{sh}(2L) \cdot \delta_{\mu,+}.$$

Аналогично, положив

$$F = P + \frac{\pi i}{2}, \quad (\text{A.6})$$

получим равенство

$$+ \frac{P}{\sigma} \frac{F}{\nu} \nu = \begin{cases} 2i \operatorname{sh}(2P), & \nu = + \\ 0, & \nu = - \end{cases} = 2i \operatorname{sh}(2P) \cdot \delta_{\nu,+}.$$

Поскольку

$$\operatorname{sh}(2P) = -\operatorname{sh}(2L) = \frac{\lambda}{\operatorname{sh}(2M)},$$

то диаграмма на рис. 8 сводится к диаграмме на рис. 3, помноженной на коэффициент

$$\frac{1}{R_1 R_2 R_3 R_4} \frac{4\lambda^2}{\operatorname{sh}^2(2M)}. \quad (\text{A.7})$$

Подставляя выражения для R_1 , R_2 , R_3 и R_4 , легко найти, что этот коэффициент равен единице. Таким образом, коммутативность двух матриц доказана.

Стоит заметить, что соотношения (A.6), (A.5) между константами связи N , F , P , L не единственно возможные. Выбирая другие решения соотношения звезда–треугольник, мы получим дополнительные тождества, которым удовлетворяют трансфер-матрицы двумерной модели Изинга с разными граничными условиями.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Доказательство связи гамильтонианов одномерной цепочки Изинга с трансфер-матрицами двумерных моделей Изинга

Докажем приведенный результат только для граничных условий $(++)$. Доказательство для остальных случаев абсолютно аналогично.

Пусть трансфер-матрица дается диаграммой, представленной на рис. 9.

Рис. 9

Очевидно, что $T(u) = V(u)W(u)$, где

$$V_{\Phi, \Phi''} = \exp \left[\sum_{j=1}^{L-1} (K \sigma_j \sigma_j'' + J \sigma_j \sigma_{j+1}'') + J \sigma_1'' + K \sigma_L'' \right], \quad (\text{Б.1})$$

$$W_{\Phi'', \Phi'} = \exp \left[\sum_{j=1}^{L-1} (K \sigma_j' \sigma_j'' + J \sigma_j' \sigma_{j+1}'') + J \sigma_1'' + K \sigma_L'' \right] \quad (\text{Б.2})$$

При $u = 0$ имеем $K = 0$, $J = \infty$. Найдём $dK/du|_{u=0}$ и $dJ/du|_{u=0}$. Дифференцируя равенство $\text{sh}(2K) = \text{tg } u$, получим

$$2 \text{ch}(2K) \frac{dK}{du} = \frac{1}{\cos^2 u}.$$

Полагая $u = 0$, имеем отсюда

$$\frac{dK}{du}(0) = \frac{1}{2}.$$

Аналогично из равенства $\text{sh}(2J) = \text{ctg } u$ получаем

$$2 \text{ch}(2J) \frac{dJ}{du} = -\frac{1}{\sin^2 u}.$$

При $u = 0$ обе части равенства равны бесконечности. Поэтому, считая J большим числом, имеем

$$\frac{dJ}{du}(u \rightarrow 0) = -\frac{1}{2} \text{ch}(2J).$$

Поскольку $K = 0$, то

$$\begin{aligned} V_{\Phi, \Phi''} &= \exp \left[\sum_{j=1}^{L-1} J \sigma_j \sigma_{j+1}'' + J \sigma_1'' \right] = \exp(J \sigma_1'') \prod_{j=1}^{L-1} \exp(J \sigma_j \sigma_{j+1}''), \\ W_{\Phi'', \Phi'} &= \exp \left[\sum_{j=1}^{L-1} J \sigma_j' \sigma_{j+1}'' + J \sigma_1'' \right] = \exp(J \sigma_1'') \prod_{j=1}^{L-1} \exp(J \sigma_j' \sigma_{j+1}''). \end{aligned}$$

Следовательно, трансфер-матрица есть

$$\begin{aligned} T_{\Phi, \Phi'}(0) &= \sum_{\{\sigma''\}} \exp(2J \sigma_1'') \prod_{j=1}^{L-1} \exp[J \sigma_{j+1}'' (\sigma_j + \sigma_j')] = \\ &= 2^L \text{ch}(2J) \prod_{j=1}^{L-1} \text{ch}[J(\sigma_j + \sigma_j')]. \end{aligned} \quad (\text{Б.3})$$

Найдём $T_{\Phi, \Phi'}^{-1}(0)$. Поскольку $T_{\Phi'', \Phi'}(0)$ есть произведение сомножителей вида $\text{ch}(\sigma_j'' + \sigma_j')$, разумно искать обратную ей матрицу в виде произведения

$$T_{\Phi, \Phi''}^{-1}(0) = \frac{1}{2^L \text{ch}(2J)} \prod_{j=1}^{L-1} A(\sigma_j'', \sigma_j). \quad (\text{Б.4})$$

Имеем

$$\sum_{\{\sigma''\}} \text{ch} [J(\sigma'' + \sigma')] A(\sigma'', \sigma) = \delta(\sigma', \sigma),$$

где $\delta(\sigma', \sigma)$ – символ Кронекера.

Производя суммирование по σ'' , получим уравнение

$$\text{ch} [J(\sigma' + 1)] A(1, \sigma) + \text{ch} [J(\sigma' - 1)] A(-1, \sigma) = \delta(\sigma', \sigma),$$

откуда видно, что

$$A(\sigma'', \sigma) = \frac{\text{ch} [J(\sigma + \sigma'')]}{\text{sh}^2(2J)} \sigma \sigma''.$$

Поэтому

$$T_{\Phi, \Phi''}^{-1}(0) = \frac{1}{2^L \text{ch}(2J)} \prod_{j=1}^{L-1} \frac{\text{ch} [J(\sigma_j + \sigma_j'')]}{\text{sh}^2(2J)} \sigma_j \sigma_j''. \quad (\text{Б.5})$$

Продифференцируем $T(u)$ по u ,

$$\dot{T}(u) = \left(\frac{dV}{dK} \frac{dK}{du} + \frac{dV}{dJ} \frac{dJ}{du} \right) W + V \left(\frac{dW}{dK} \frac{dK}{du} + \frac{dW}{dJ} \frac{dJ}{du} \right). \quad (\text{Б.6})$$

Дифференцируя V и W по J и полагая u равным нулю, получим

$$\left(\frac{dV}{dJ} \right)_{\Phi, \Phi''} = \left(\sum_{k=1}^{L-1} \sigma_k \sigma_{k+1}'' + \sigma_1'' \right) \exp(J\sigma_1'') \prod_{j=1}^{L-1} \exp(J\sigma_j \sigma_{j+1}''), \quad (\text{Б.7})$$

$$\left(\frac{dW}{dJ} \right)_{\Phi'', \Phi'} = \left(\sum_{k=1}^{L-1} \sigma_k' \sigma_{k+1}'' + \sigma_1'' \right) \exp(J\sigma_1'') \prod_{j=1}^{L-1} \exp(J\sigma_j' \sigma_{j+1}''). \quad (\text{Б.8})$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \left(\frac{dV}{dJ} W \right)_{\Phi, \Phi'} &= \sum_{\{\sigma''\}} \left(\sum_{k=1}^{L-1} \sigma_k \sigma_{k+1}'' + \sigma_1'' \right) \exp(2J\sigma_1'') \prod_{j=1}^{L-1} \exp [J\sigma_{j+1}'' (\sigma_j + \sigma_j')] = \\ &= 2^L \text{ch}(2J) \sum_{k=1}^{L-1} \sigma_k \text{sh} [J(\sigma_k + \sigma_k')] \prod_{j=1, j \neq k}^{L-1} \text{ch} [J(\sigma_j + \sigma_j')] + \\ &\quad + 2^L \text{sh}(2J) \prod_{j=1}^{L-1} \text{ch} [J(\sigma_j + \sigma_j')]. \end{aligned}$$

Аналогично получим

$$\begin{aligned} \left(V \frac{dW}{dJ} \right)_{\Phi, \Phi'} &= \sum_{\{\sigma''\}} \left(\sum_{k=1}^{L-1} \sigma_k' \sigma_{k+1}'' + \sigma_1'' \right) \exp(2J\sigma_1'') \prod_{j=1}^{L-1} \exp [J\sigma_{j+1}'' (\sigma_j + \sigma_j')] = \\ &= 2^L \text{ch}(2J) \sum_{k=1}^{L-1} \sigma_k' \text{sh} [J(\sigma_k + \sigma_k')] \prod_{j=1, j \neq k}^{L-1} \text{ch} [J(\sigma_j + \sigma_j')] + \\ &\quad + 2^L \text{sh}(2J) \prod_{j=1}^{L-1} \text{ch} [J(\sigma_j + \sigma_j')]. \end{aligned}$$

Сложим два последних равенства и умножим результат на dJ/du :

$$\begin{aligned} \left(V \frac{dW}{dJ} + \frac{dV}{dJ} W \right)_{\Phi'', \Phi'} \frac{dJ}{du} &= 2^L \operatorname{ch}(2J) \sum_{k=1}^{L-1} (\sigma_k'' + \sigma_k') \operatorname{sh} [J(\sigma_k'' + \sigma_k')] \times \\ &\times \prod_{j=1, j \neq k}^{L-1} \operatorname{ch} [J(\sigma_j'' + \sigma_j')] + 2^{L+1} \operatorname{sh}(2J) \prod_{j=1}^{L-1} \operatorname{ch} [J(\sigma_j'' + \sigma_j')]. \end{aligned}$$

Учитывая последние формулы, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\Phi''} T_{\Phi, \Phi''}^{-1} \left(V \frac{dW}{dJ} + \frac{dV}{dJ} W \right)_{\Phi'', \Phi'} \left(\frac{dJ}{du} \right) &= -\operatorname{sh}(2J) - \\ &- \frac{1}{2} \operatorname{ch}(2J) \sum_{\sigma''} \sum_{k=1}^{L-1} (\sigma_k'' + \sigma_k') \operatorname{sh} [J(\sigma_k'' + \sigma_k')] \sigma_k \sigma_k'' \frac{\operatorname{ch} [J(\sigma_k + \sigma_k'')]}{\operatorname{sh}^2(2J)} = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\operatorname{ch}(2J)}{\operatorname{sh}^2(2J)} \sum_{k=1}^{L-1} \left[(\sigma_k' + 1) \sigma_k \operatorname{sh} [J(\sigma_k' + 1)] \operatorname{ch} [J(\sigma_k + 1)] - \right. \\ &\left. - (\sigma_k' - 1) \sigma_k \operatorname{sh} [J(\sigma_k' - 1)] \operatorname{ch} [J(\sigma_k - 1)] \right] - \operatorname{sh}(2J). \end{aligned} \quad (\text{Б.9})$$

Легко видеть, что полученное выражение не расходится при $J \rightarrow \infty$, только если $\sigma_k = -\sigma_k'$ (сингулярный член $\operatorname{sh}(2J)$ мы не учитываем). Необходимо рассмотреть два случая:

- 1) $\sigma_k = -\sigma_k' = +1$;
- 2) $\sigma_k = -\sigma_k' = -1$.

В первом случае правая часть выражения (Б.9) сводится к

$$\frac{\operatorname{ch}(2J)}{\operatorname{sh}^2(2J)} \sum_{k=1}^{L-1} \operatorname{sh}(2J) \rightarrow \sum_{k=1}^{L-1} 1$$

при $J \rightarrow \infty$. Во втором случае — к

$$\frac{\operatorname{ch}(2J)}{\operatorname{sh}^2(2J)} \sum_{k=1}^{L-1} \operatorname{sh}(2J) \rightarrow \sum_{k=1}^{L-1} 1.$$

В результате мы видим, что несингулярную часть выражения (Б.9) можно записать в виде $\sum_{k=1}^{L-1} \sigma_k^x$ (матричные элементы в обоих случаях совпадают). Здесь мы ввели обозначение $\sigma_k^x = 1 \otimes \dots \otimes \sigma^x \otimes \dots \otimes 1$, где оператор σ^x действует на k -й спин цепочки.

Аналогичные вычисления для

$$\left(V \frac{dW}{dK} + \frac{dV}{dK} W \right)_{\Phi'', \Phi'} \left(\frac{dK}{du} \right)$$

приводят к выражению

$$\sum_{k=1}^{L-2} \sigma_k^z \sigma_{k+1}^z + \sigma_1^z + \sigma_{L-1}^z.$$

В результате несингулярная часть логарифмической производной трансфер-матрицы действительно оказывается равной гамильтониану:

$$H_{\text{Ising}}^{++}(L) = H_{\text{Ising}}^0(L-1) + \sigma_1^z + \sigma_{L-1}^z.$$

Таким образом, связь гамильтониана одномерной цепочки Изинга с трансфер-матрицей доказана.

Благодарности. Мы благодарны П. Мартину, Б. Фейгину и особенно Ф. Алькарацу и П. Пирсу за полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] *R. E. Behrend, P. A. Pearce, D. L. O'Brien.* Interaction-round-a-face models with fixed boundary conditions: The ABF fusion hierarchy. Preprint University of Melbourne, hep-th/9507118.
- [2] *D. L. O'Brien, P. A. Pearce, S. Ole Warnaar.* Physica A. 1996. V. 228. P. 63.
- [3] *F. Alcaraz, M. Barber, M. Batchelor.* Phys. Rev. Lett. 1987. V. 58. P. 771; *F. Alcaraz, M. Barber, M. Batchelor, R. Baxter, G. Quispel.* J. Phys. A. 1987. V. 20. P. 6397.
- [4] *C. Hamer.* J. Phys. A. 1981. V. 14. P. 2981.
- [5] *F. Alcaraz, M. Baake, U. Grimm, V. Rittenberg.* J. Phys. A. 1989. V. 22. P. L5.
- [6] *V. Pasquier, H. Saleur.* Nucl. Phys. B. 1990. V. 330. P. 523.
- [7] *A. Belavin, Yu. Stroganov.* Minimal models of integrable lattice theory and truncated functional equations. hep-th/9908050.
- [8] *E. K. Sklyanin.* J. Phys. A. 1988. V. 21. P. 2375.
- [9] *P. P. Kulish, E. K. Sklyanin.* J. Phys. A. 1991. V. 24. P. L435.
- [10] *F. C. Alcaraz, A. A. Belavin, R. A. Usmanov.* Correspondence between the XXZ model in roots of unity and the one-dimensional quantum Ising chain with different boundary conditions. hep-th/0007151.
- [11] *E. Lusztig.* Contemp. Math. 1989. V. 82. P. 59.
- [12] *P. P. Martin.* Potts Models and Related Problems in Statistical Mechanics. Singapore: World Scientific, 1991.

Поступила в редакцию 30.VI.2000 г.