Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. М. Зиновьев, Модель Изинга и L -функция, *ТМФ*, 2001, том 126, номер 1, 84–101

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf416>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 11:29:12

МОДЕЛЬ ИЗИНГА И L -ФУНКЦИЯ

Вычислены корреляционные функции двумерной модели Изинга со свободными граничными условиями.

1. ВВЕДЕНИЕ

Онзагер [1] получил формулу для статистической суммы двумерной модели Изинга. Другой метод вычисления статистической суммы модели Изинга был предложен Кацем и Уордом [2]. Эти авторы рассматривали одновременно две формулы: определитель специальной матрицы $I + T$ (I — единичная матрица) пропорционален статистической сумме модели Изинга, и он же пропорционален квадрату статистической суммы. Для доказательства первой формулы они использовали топологическое утверждение. Шерман [3], [4] построил контрпример к этому утверждению и привел некоторые аргументы в пользу равенства

$$Z^2 = C(\beta) \det(I + T), \quad (1.1)$$

где Z — статистическая сумма двумерной модели Изинга со свободными граничными условиями, а $C(\beta)$ — положительная функция обратной температуры β . В работе [5] доказана формула

$$Z^2 = C(\beta) \det(I - T). \quad (1.2)$$

Для прямоугольной решетки выражение (1.2) не зависит от знака матрицы T . Для произвольной решетки формула (1.1) неверна. Если матрицы T^k удовлетворяют некоторой оценке, то

$$\det(I - T) = \exp \left\{ - \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} \operatorname{tr} T^k \right\}. \quad (1.3)$$

По определению статистическая сумма $Z > 0$. Если числа $\operatorname{tr} T^k$ вещественны, то из равенств (1.2) и (1.3) следует

$$Z(C(\beta))^{-\frac{1}{2}} = \exp \left\{ - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} \operatorname{tr} T^k \right\}. \quad (1.4)$$

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия

В основном работы Шермана [3], [4] и последующая работа Бургойна [6] были посвящены доказательству гипотезы Фейнмана. Согласно этой гипотезе статистическая сумма модели Изинга пропорциональна некоторому бесконечному формальному произведению. Правая часть равенства (1.4) является произведением. Вычисляя числа $\text{tr } T^k$, можно показать, что равенство (1.4) является корректной формулировкой гипотезы Фейнмана.

Хашимото изучал некоторые специальные бесконечные произведения. Он называл эти произведения дзета-функциями конечных графов в работе [7] и L -функциями конечных графов в работе [8]. Можно показать, что правая часть равенства (1.3) равна единице, деленной на L -функцию (дзета-функцию) Хашимото. Определение (1.3) удобно, поскольку ряд (1.3) сходится, если числа $\text{tr } T^k$ удовлетворяют некоторой оценке.

В работах [2]–[6] использовалась известная формула Ван дер Вардена [9] для статистической суммы модели Изинга. Подобная формула для корреляционных функций была получена в работе [10]. Используя эти формулы и формулу (1.4), мы вычислим термодинамический предел свободной энергии и корреляционных функций двумерной модели Изинга со свободными граничными условиями.

Во втором разделе мы обсудим результаты Хашимото [7], [8]. Третий раздел посвящен формуле для корреляционных функций [10]. В четвертом разделе мы рассмотрим двумерную модель Изинга со свободными граничными условиями.

2. L -ФУНКЦИЯ

Пусть s – комплексное число. Тогда для $\text{Re } s > 1$ дзета-функция Римана

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \quad (2.1)$$

является аналитической функцией переменной s . Эйлер показал, что для $\text{Re } s > 1$ ([11], формула 17.7.2)

$$\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}, \quad (2.2)$$

где произведение берется по всем простым числам $p = 2, 3, 5, 7, \dots$

Пусть $n > 1$ является фиксированным натуральным числом, и пусть m – любое натуральное число. Рассмотрим функцию $\chi(m)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$\chi(m) = \chi(m'), \text{ если } m = m' \pmod n,$$

$$\chi(1) = 1,$$

$\chi(m) = 0$, если наибольший общий делитель (m, n) натуральных чисел m и n не равен единице,

$$\chi(m)\chi(m') = \chi(mm'). \quad (2.3)$$

Такая функция $\chi(m)$ называется характером по модулю n .

Пусть $n > 1$ – фиксированное натуральное число, и пусть χ – характер по модулю n . Тогда ряд

$$L(s, \chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \chi(m) m^{-s} \quad (2.4)$$

для $\operatorname{Re} s > 1$ называется L -рядом. L -ряд был введен Дирихле. L -ряд и дзета-функция Римана имеют много общих свойств. Аналогом произведения Эйлера (2.2) является следующая формула ([11], формула 17.8.5):

$$L(s, \chi) = \prod_p (1 - \chi(p)p^{-s})^{-1}, \quad (2.5)$$

где $\operatorname{Re} s > 1$ и произведение берется по всем простым числам.

Функция $\chi(m)$ натурального числа m , удовлетворяющая лишь условию (2.3), называется характером. Функция $\chi(m, s) = m^{-s}$ дает пример характера. Рассмотрим ряд (2.4) с характером $\chi(m)$. Если характер $\chi(m) \equiv 1$, то ряд (2.4) совпадает с дзета-функцией Римана (2.1). Если характер $\chi(m)$ является характером по модулю n , то ряд (2.4) является L -рядом Дирихле.

Введем L -функцию конечного графа. Пусть X – конечный граф, и пусть $\mathbf{e}$ – ориентированное ребро графа X . Ориентированное ребро $\mathbf{e}$ определяется парой вершин графа X : началом $b(\mathbf{e})$ и концом $f(\mathbf{e})$. Замкнутый путь – это такая последовательность ориентированных ребер $C = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k)$, что

$$b(\mathbf{e}_{i+1}) = f(\mathbf{e}_i), \quad i = 1, \dots, k-1, \quad b(\mathbf{e}_1) = f(\mathbf{e}_k). \quad (2.6)$$

Обозначим $b(C) = b(\mathbf{e}_1)$ и $f(C) = f(\mathbf{e}_k)$. Для замкнутого пути $b(C) = f(C)$. Пусть $\mathbf{e}^{-1}$ – такое ориентированное ребро, что $b(\mathbf{e}^{-1}) = f(\mathbf{e})$, $f(\mathbf{e}^{-1}) = b(\mathbf{e})$. Следующие пары замкнутых путей считаются гомотопически эквивалентными:

$$(\mathbf{e}, \mathbf{e}^{-1}) \sim C(b(\mathbf{e})), \quad (2.7)$$

где путь $C(b(\mathbf{e}))$ состоит из единственной вершины $b(\mathbf{e})$;

$$(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{i-1}, \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i^{-1}, \mathbf{e}_{i+2}, \dots, \mathbf{e}_k) \sim (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{i-1}, \mathbf{e}_{i+2}, \dots, \mathbf{e}_k), \quad (2.8)$$

где $i = 2, \dots, k-2$, $k > 3$;

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1^{-1}, \mathbf{e}_3, \dots, \mathbf{e}_k) \sim (\mathbf{e}_3, \dots, \mathbf{e}_k); \quad (2.9)$$

$$(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{k-2}, \mathbf{e}_{k-1}, \mathbf{e}_{k-1}^{-1}) \sim (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{k-2}); \quad (2.10)$$

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{k-1}, \mathbf{e}_1^{-1}) \sim (\mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{k-1}). \quad (2.11)$$

Два замкнутых пути считаются гомотопными, если они связаны соотношением эквивалентности, порожденным соотношениями (2.7)–(2.11).

ЛЕММА 2.1. *Замкнутые пути $(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{k-1})$ и $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k)$ гомотопны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношение эквивалентности (2.11) порождает соотношение

$$(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_k^{-1}) \sim (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k). \quad (2.12)$$

Соотношение эквивалентности (2.10) порождает соотношение

$$(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_k^{-1}) \sim (\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{k-1}). \quad (2.13)$$

Из соотношений эквивалентности (2.12) и (2.13) следует, что замкнутые пути $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k)$ и $(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{k-1})$ гомотопны. Лемма доказана.

Из соотношений эквивалентности (2.7)–(2.11) следует, что любой замкнутый путь гомотопен либо пути, состоящему из единственной вершины, либо редуцированному замкнутому пути $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k)$:

$$\begin{aligned} b(\mathbf{e}_{i+1}) &= f(\mathbf{e}_i), & f(\mathbf{e}_{i+1}) &\neq b(\mathbf{e}_i), & i &= 1, \dots, k-1, \\ b(\mathbf{e}_1) &= f(\mathbf{e}_k), & f(\mathbf{e}_1) &\neq b(\mathbf{e}_k). \end{aligned} \quad (2.14)$$

В силу леммы 2.1 k редуцированных замкнутых путей $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k), (\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{k-1}), \dots, (\mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_1)$ гомотопны друг другу. Они определяют класс эквивалентности, называемый ориентированным редуцированным циклом. Обозначим его $[(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k)]$. Ориентированный редуцированный цикл и представляющий его редуцированный замкнутый путь $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k)$ называются непримитивными, если существует такое натуральное число l ($1 \leq l < k$), что $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k) = (\mathbf{e}_{l+1}, \dots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_l)$; в противном случае они называются примитивными.

Если два замкнутых пути $C_1 = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k)$, $C_2 = (\mathbf{e}_{k+1}, \dots, \mathbf{e}_{k+l})$ имеют одну и ту же начальную вершину $b(\mathbf{e}_1) = b(\mathbf{e}_{k+1})$, то можно определить произведение $C_1 \cdot C_2 = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \dots, \mathbf{e}_{k+l})$. Если $b(\mathbf{e}_1) = b(\mathbf{e}_{k+1})$ и $\mathbf{e}_{k+1} \neq \mathbf{e}_1$, то произведение $C_1 \cdot C_3 = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \dots, \mathbf{e}_1^{-1})$ двух редуцированных замкнутых путей $C_1 = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k)$ и $C_3 = (\mathbf{e}_{k+1}, \dots, \mathbf{e}_1^{-1})$ не является редуцированным замкнутым путем. Произведение $C_1 \cdot C_2 = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{k+l})$ двух редуцированных замкнутых путей $C_1 = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k)$ и $C_2 = (\mathbf{e}_{k+1}, \dots, \mathbf{e}_{k+l})$, имеющих одно и то же начальное ребро $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_{k+1}$, является редуцированным замкнутым путем.

Пусть унитарная $(n \times n)$ -матрица $\rho(C)$ соответствует любому редуцированному замкнутому пути C и удовлетворяет следующим условиям: если два редуцированных замкнутых пути $C_1 = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k)$ и $C_2 = (\mathbf{e}_{k+1}, \dots, \mathbf{e}_{k+l})$ имеют одно и то же начальное ребро $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_{k+1}$, то

$$\rho(C_1 \cdot C_2) = \rho(C_1)\rho(C_2); \quad (2.15)$$

для любого редуцированного замкнутого пути $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k)$ существует такая унитарная матрица γ , что

$$\rho((\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{k-1})) = \gamma \rho((\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k)) \gamma^{-1}. \quad (2.16)$$

ЛЕММА 2.2. Пусть унитарная матрица $\rho(\mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2)$ соответствует любой паре $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ таких ориентированных ребер графа X , что $f(\mathbf{e}_1) = b(\mathbf{e}_2)$, $b(\mathbf{e}_1) \neq f(\mathbf{e}_2)$. Для любого редуцированного замкнутого пути $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k)$ определим унитарную матрицу

$$\rho((\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k)) = \rho(\mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2) \rho(\mathbf{e}_2; \mathbf{e}_3) \dots \rho(\mathbf{e}_{k-1}; \mathbf{e}_k) \rho(\mathbf{e}_k; \mathbf{e}_1). \quad (2.17)$$

Тогда матрица (2.17) удовлетворяет соотношениям (2.15) и (2.16).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть два редуцированных замкнутых пути $C_1 = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k)$ и $C_2 = (\mathbf{e}_{k+1}, \dots, \mathbf{e}_{k+l})$ имеют одно и то же начальное ребро $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_{k+1}$. Тогда из определения (2.17) следует соотношение (2.15).

Пусть $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k)$ – редуцированный замкнутый путь. Тогда из определения (2.17) следует соотношение (2.16) с унитарной матрицей $\gamma = \rho(\mathbf{e}_k; \mathbf{e}_1)$. Лемма доказана.

Весом множества неориентированных ребер графа X называется соответствие $e \rightarrow u(e) = u(\mathbf{e}) = u(\mathbf{e}^{-1})$, где $u(e)$ – независимые переменные для различных неориентированных ребер. Обозначим их $\mathbf{u} = \{u(e)\}$. Положим

$$\mathbf{u}^C = \prod_{i=1}^k u(\mathbf{e}_i), \quad (2.18)$$

где $C = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k)$ – редуцированный замкнутый путь. L -функция графа X , связанная с ρ , определяется как следующее формальное бесконечное произведение, аналогичное произведению (2.5):

$$L(\mathbf{u}, \rho; X) = \prod_{[C]: \text{primitive}} \det(I_n - \rho(C) \mathbf{u}^C)^{-1}, \quad (2.19)$$

где произведение берется по всем примитивным ориентированным редуцированным циклам $[C]$ и I_n – единичная $(n \times n)$ -матрица.

Если граф X связан, то для любого редуцированного замкнутого пути C существует такой гомотопный замкнутый путь $\langle C \rangle$, что $b(\langle C \rangle) = p$, где p – фиксированная вершина. В силу соотношения (2.9) можно считать, что начальное ребро замкнутого пути $\langle C \rangle$ совпадает с фиксированным ориентированным ребром $\mathbf{e}$, причем $b(\mathbf{e}) = p$. Хашимото [7], [8] рассматривал унитарное представление ρ группы классов гомотопически эквивалентных замкнутых путей $\langle C \rangle$ с фиксированной начальной вершиной p . Если мы подставим матрицу $\rho(\langle C \rangle)$ вместо матрицы $\rho(C)$ в определение (2.19), то получим определение Хашимото [8]. В работе [7] функция $L(\mathbf{u}, \rho; X)$ обозначается $Z_X(\mathbf{u}; \rho)$ и называется дзета-функцией.

Определение (2.19) формально. Мы преобразуем его к другому виду. Обозначим через $\alpha_i(C)$, $i = 1, \dots, n$, собственные значения унитарной матрицы $\rho(C)$. Поскольку матрица $\rho(C)$ унитарна, то

$$|\alpha_i(C)| = 1, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.20)$$

Логарифмируя равенство (2.19), получаем

$$\ln L(\mathbf{u}, \rho; X) = \sum_{[C]: \text{primitive}} \ln[\det(I_n - \rho(C) \mathbf{u}^C)^{-1}], \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned}
\ln[\det(I_n - \rho(C) \mathbf{u}^C)^{-1}] &= - \sum_{i=1}^n \ln(1 - \alpha_i(C) \mathbf{u}^C) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} (\alpha_i(C))^k (\mathbf{u}^C)^k = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} (\operatorname{tr} \rho(C)^k) (\mathbf{u}^C)^k.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Подстановка равенства (2.22) в равенство (2.21) дает

$$\ln L(\mathbf{u}, \rho; X) = \sum_{[C]: \text{primitive}} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} (\mathbf{u}^C)^k \operatorname{tr} \rho(C)^k. \tag{2.23}$$

Любой примитивный ориентированный редуцированный цикл $[(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_l)]$ состоит из l различных редуцированных замкнутых путей $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_l)$, $(\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{l-1})$, $\dots$, $(\mathbf{e}_2, \dots, \dots, \mathbf{e}_l, \mathbf{e}_1)$. В силу определения (2.18)

$$\mathbf{u}^{(\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{l-1})} = \mathbf{u}^{(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_l)} \tag{2.24}$$

для редуцированных замкнутых путей $(\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{l-1})$ и $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_l)$. Из равенств (2.16) и (2.24) следует, что равенство (2.23) может быть переписано в виде

$$\ln L(\mathbf{u}, \rho; X) = \sum_{C: \text{primitive}} \sum_{k=1}^{\infty} (k|C|)^{-1} (\mathbf{u}^C)^k \operatorname{tr} \rho(C)^k, \tag{2.25}$$

где сумма берется по всем примитивным редуцированным замкнутым путям $C = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_l)$ и длина $|C| = l$.

Из определения (2.18) вытекает, что

$$(\mathbf{u}^C)^k = \mathbf{u}^{C^{\times k}}. \tag{2.26}$$

Из равенств (2.15), (2.25), (2.26) и равенства $|C^{\times k}| = k|C|$ следует

$$\ln L(\mathbf{u}, \rho; X) = \sum_{C: \text{primitive}} \sum_{k=1}^{\infty} |C^{\times k}|^{-1} \mathbf{u}^{C^{\times k}} \operatorname{tr} \rho(C^{\times k}). \tag{2.27}$$

Любой редуцированный замкнутый путь имеет вид $C^{\times k}$, где k — натуральное число и C является примитивным редуцированным замкнутым путем. Тогда равенство (2.27) может быть переписано в виде

$$\ln L(\mathbf{u}, \rho; X) = \sum_{C \in RC(X)} |C|^{-1} \mathbf{u}^C \operatorname{tr} \rho(C), \tag{2.28}$$

где путь C пробегает множество $RC(X)$ всех редуцированных замкнутых путей графа X .

Число всех неориентированных ребер, инцидентных с вершиной p , обозначим $v(p)$ и назовем валентностью вершины p . Пусть

$$v = \max_p v(p). \tag{2.29}$$

Построим редуцированный замкнутый путь с начальной вершиной p . Первое ребро можно выбрать $v(p)$ способами. Любое другое ребро можно выбрать не более чем $v - 1$ способами. Таким образом, общее число редуцированных замкнутых путей длины l не превышает $\#(VX)v(v - 1)^{l-1}$, где $\#(VX)$ – общее число вершин графа X . Из соотношений (2.20) следует, что ряд (2.28) абсолютно сходится, если справедлива следующая оценка:

$$\max_e |u(e)| < (v - 1)^{-1}. \quad (2.30)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. L -функция конечного графа X , связанная с представлением ρ , определяется соотношением

$$L(\mathbf{u}, \rho; X) = \exp \left\{ \sum_{C \in RC(X)} |C|^{-1} \mathbf{u}^C \operatorname{tr} \rho(C) \right\}, \quad (2.31)$$

где C пробегает множество $RC(X)$ всех редуцированных замкнутых путей графа X .

Обозначим через $\#(\mathbf{E}X)$ общее число ориентированных ребер графа X .

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть унитарная матрица $\rho(\mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2) = \{(\rho(\mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2))_{k_1 k_2}, \quad k_1, k_2 = 1, \dots, n\}$ соответствует любой такой паре $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ ориентированных ребер графа X , что $f(\mathbf{e}_1) = b(\mathbf{e}_2)$, $b(\mathbf{e}_1) \neq f(\mathbf{e}_2)$. Определим $((n\#(\mathbf{E}X)) \times (n\#(\mathbf{E}X)))$ -матрицу

$$T(\mathbf{u}, \rho)_{(k_1, e_1), (k_2, e_2)} = \begin{cases} u(\mathbf{e}_1)(\rho(\mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2))_{k_1 k_2}, & f(\mathbf{e}_1) = b(\mathbf{e}_2), \quad b(\mathbf{e}_1) \neq f(\mathbf{e}_2), \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases} \quad (2.32)$$

Если справедлива оценка (2.30), то

$$L(\mathbf{u}, \rho; X) = \det(I - T(\mathbf{u}, \rho))^{-1}, \quad (2.33)$$

где L -функция $L(\mathbf{u}, \rho; X)$ определена равенством (2.31).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично равенству (2.22) имеем

$$\ln[\det(I - T(\mathbf{u}, \rho))^{-1}] = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} \operatorname{tr} T(\mathbf{u}, \rho)^k. \quad (2.34)$$

Из определений (2.17), (2.18) и (2.32) получаем

$$\operatorname{tr} T(\mathbf{u}, \rho)^k = \sum_{\substack{C \in RC(X), \\ |C|=k}} \mathbf{u}^C \operatorname{tr} \rho(C), \quad (2.35)$$

где путь C пробегает множество всех редуцированных замкнутых путей длины k . Подстановка равенства (2.35) в правую часть равенства (2.34) дает

$$\ln[\det(I - T(\mathbf{u}, \rho))^{-1}] = \sum_{C \in RC(X)} |C|^{-1} \mathbf{u}^C \operatorname{tr} \rho(C), \quad (2.36)$$

где путь C пробегает множество $RC(X)$ всех редуцированных замкнутых путей графа X . Из равенств (2.31) и (2.36) следует равенство (2.33). Теорема доказана.

3. ФОРМУЛА ВАН ДЕР ВАРДЕНА

Рассмотрим на плоскости прямоугольную решетку, образованную точками с целыми декартовыми координатами $x = k_1$, $y = k_2$, $M'_1 \leq k_1 \leq M_1$, $M'_2 \leq k_2 \leq M_2$, и соответствующими горизонтальными и вертикальными ребрами, соединяющими эти вершины. Обозначим этот граф $G(M'_1, M'_2; M_1, M_2)$. Пусть граф G вложен в прямоугольную решетку на плоскости. Пусть все граничные вершины всех ребер графа G включены во множество вершин графа G . Клеточным комплексом $P(G)$ называется множество, состоящее из клеток (вершин, ребер, граней). Вершины комплекса $P(G)$ называются клетками размерности 0. Они обозначаются s_i^0 . Ребра комплекса $P(G)$ называются клетками размерности 1. Они обозначаются s_i^1 . Грани комплекса $P(G)$ называются клетками размерности 2. Они обозначаются s_i^2 . Мы будем считать, что комплекс $P(G)$ содержит все грани, все граничные ребра которых включены в граф G . Обозначим через $\mathbf{Z}_2^{\text{add}}$ группу вычетов по модулю 2. Вычеты по модулю 2 можно умножать друг на друга, и группа $\mathbf{Z}_2^{\text{add}}$ является полем. Любой паре клеток s_i^p, s_j^{p-1} соответствует число $(s_i^p : s_j^{p-1}) \in \mathbf{Z}_2^{\text{add}}$ (число инцидентности). Если клетка s_j^{p-1} принадлежит границе клетки s_i^p , то число инцидентности $(s_i^p : s_j^{p-1}) = 1$. В противном случае число инцидентности $(s_i^p : s_j^{p-1}) = 0$. Для любой пары клеток s_i^2, s_j^0 числа инцидентности удовлетворяют условию

$$\sum_m (s_i^2 : s_m^1) (s_m^1 : s_j^0) = 0 \pmod{2}. \quad (3.1)$$

В самом деле, если вершина s_j^0 не входит в границу грани s_i^2 , то условие (3.1) выполнено. Если вершина s_j^0 входит в границу грани s_i^2 , то она входит в границы четырех ребер s_m^1 , два из которых входят в границу грани s_i^2 . Условие (3.1) опять выполнено.

Коцепью c^p комплекса $P(G)$ с коэффициентами в группе $\mathbf{Z}_2^{\text{add}}$ называется функция на p -мерных клетках, принимающая значения в группе $\mathbf{Z}_2^{\text{add}}$. Обычно рассматривается ориентация клеток, и коцепи являются антисимметричными функциями: $c^p(-s^p) = -c^p(s^p)$. Однако $-1 = 1 \pmod{2}$, и для коэффициентов в группе $\mathbf{Z}_2^{\text{add}}$ мы можем пренебречь ориентацией клеток. Коцепи образуют абелеву группу

$$(c^p + c'^p)(s_i^p) = c^p(s_i^p) + c'^p(s_i^p) \pmod{2}. \quad (3.2)$$

Она обозначается $C^p(P(G), \mathbf{Z}_2^{\text{add}})$. Отображение

$$\partial c^p(s_i^{p-1}) = \sum_j (s_j^p : s_i^{p-1}) c^p(s_j^p) \pmod{2} \quad (3.3)$$

определяет гомоморфизм группы $C^p(P(G), \mathbf{Z}_2^{\text{add}})$ в группу $C^{p-1}(P(G), \mathbf{Z}_2^{\text{add}})$. Он называется граничным оператором. Отображение

$$\partial^* c^p(s_i^{p+1}) = \sum_j (s_i^{p+1} : s_j^p) c^p(s_j^p) \pmod{2} \quad (3.4)$$

определяет гомоморфизм группы $C^p(P(G), \mathbf{Z}_2^{\text{add}})$ в группу $C^{p+1}(P(G), \mathbf{Z}_2^{\text{add}})$. Он называется кограничным оператором. Из условия (3.1) следует $\partial \partial = 0$, $\partial^* \partial^* = 0$. Ядро $Z_p(P(G), \mathbf{Z}_2^{\text{add}})$ гомоморфизма (3.3) на группе $C^p(P(G), \mathbf{Z}_2^{\text{add}})$ называется группой

циклов комплекса $P(G)$ с коэффициентами в группе $\mathbf{Z}_2^{\text{add}}$. Образ $B_p(P(G), \mathbf{Z}_2^{\text{add}})$ гомоморфизма (3.3) в группе $C^p(P(G), \mathbf{Z}_2^{\text{add}})$ называется группой границ комплекса $P(G)$ с коэффициентами в группе $\mathbf{Z}_2^{\text{add}}$. Поскольку $\partial\partial = 0$, то группа $B_p(P(G), \mathbf{Z}_2^{\text{add}})$ является подгруппой группы $Z_p(P(G), \mathbf{Z}_2^{\text{add}})$. Аналогично для кограничного оператора ∂^* определяется группа коциклов $Z^p(P(G), \mathbf{Z}_2^{\text{add}})$ и группа кограниц $B^p(P(G), \mathbf{Z}_2^{\text{add}})$.

Введем билинейную форму на $C^p(P(G), \mathbf{Z}_2^{\text{add}})$:

$$\langle f^p, g^p \rangle = \sum_i f^p(s_i^p) g^p(s_i^p) \pmod{2}. \quad (3.5)$$

Из определений (3.3) и (3.4) следует

$$\langle f^p, \partial^* g^{p-1} \rangle = \langle \partial f^p, g^{p-1} \rangle, \quad \langle f^p, \partial g^{p+1} \rangle = \langle \partial^* f^p, g^{p+1} \rangle. \quad (3.6)$$

Пусть копей $\sigma \in C^0(P(G), \mathbf{Z}_2^{\text{add}})$ и энергия определяется следующим образом:

$$H'(\partial^* \sigma) = \sum_{s_i^1 \in P(G)} h_i(\partial^* \sigma(s_i^1)), \quad (3.7)$$

где $h_i(\epsilon)$ — произвольная функция на группе $\mathbf{Z}_2^{\text{add}}$,

$$h_i(\epsilon) = D_i - E_i(-1)^\epsilon, \quad (3.8)$$

постоянные D_i, E_i имеют вид

$$D_i = \frac{1}{2}(h_i(1) + h_i(0)), \quad E_i = \frac{1}{2}(h_i(1) - h_i(0)). \quad (3.9)$$

Подстановка равенства (3.8) в равенство (3.7) дает

$$H'(\partial^* \sigma) = \sum_{s_i^1 \in P(G)} D_i + H(\partial^* \sigma), \quad (3.10)$$

где функция

$$H(\partial^* \sigma) = - \sum_{s_i^1 \in P(G)} E_i(-1)^{\partial^* \sigma(s_i^1)} \quad (3.11)$$

называется энергией модели Изинга с нулевым магнитным полем. Число $E_i = E(s_i^1)$ называется энергией взаимодействия, соответствующей ребру s_i^1 . Ребро s_i^1 задается своей начальной вершиной и своим направлением. Например, ребра прямоугольной решетки на плоскости бывают горизонтальными или вертикальными. Если энергия взаимодействия $E_i = E(s_i^1)$ не зависит от начальной вершины ребра s_i^1 , то модель Изинга называется однородной. Если энергия взаимодействия $E_i = E(s_i^1)$ не зависит от направления ребра s_i^1 , то модель Изинга называется изотропной.

Из равенства (3.10) следует

$$Z'_G = \sum_{\sigma \in C^0(P(G), \mathbf{Z}_2^{\text{add}})} \exp\{-\beta H'(\partial^* \sigma)\} = Z_G \exp\left\{-\beta \sum_{s_i^1 \in P(G)} D_i\right\}, \quad (3.12)$$

где функция

$$Z_G = \sum_{\sigma \in C^0(P(G), \mathbf{Z}_2^{\text{add}})} \exp\{-\beta H(\partial^* \sigma)\} \quad (3.13)$$

называется статистической суммой модели Изинга.

Пусть коцепь $\chi \in C^0(P(G), \mathbf{Z}_2^{\text{add}})$ равна 1 на вершинах $x_1, \dots, x_m$ и равна нулю на всех остальных вершинах графа G . Корреляционной функцией в вершинах $x_1, \dots, x_m$ решетки G называется функция

$$\begin{aligned} W_G(\chi) &= (Z'_G)^{-1} \sum_{\sigma \in C^0(P(G), \mathbf{Z}_2^{\text{add}})} (-1)^{\langle \chi, \sigma \rangle} \exp\{-\beta H'(\partial^* \sigma)\} = \\ &= (Z_G)^{-1} \sum_{\sigma \in C^0(P(G), \mathbf{Z}_2^{\text{add}})} (-1)^{\langle \chi, \sigma \rangle} \exp\{-\beta H(\partial^* \sigma)\}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Статистическая сумма модели Изинга на графе G*

$$\begin{aligned} Z_G &= 2^{\#(VG)} \left(\prod_{s_i^1 \in P(G)} \text{ch } \beta E(s_i^1) \right) \times \\ &\times \sum_{\xi^1 \in Z_1(P(G), \mathbf{Z}_2^{\text{add}})} \prod_{s_i^1 \in P(G)} (\text{th } \beta E(s_i^1))^{\frac{1}{2} \left(1 - (-1)^{\xi^1(s_i^1)} \right)}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

где $\#(VG)$ – общее число вершин графа G .

Корреляционная функция модели Изинга на графе G

$$\begin{aligned} W_G(\chi) &= (Z_G)^{-1} 2^{\#(VG)} \left(\prod_{s_i^1 \in P(G)} \text{ch } \beta E(s_i^1) \right) \times \\ &\times \sum_{\substack{\xi^1 \in C^1(P(G), \mathbf{Z}_2^{\text{add}}) \\ \partial \xi^1 = \chi}} \prod_{s_i^1 \in P(G)} (\text{th } \beta E(s_i^1))^{\frac{1}{2} \left(1 - (-1)^{\xi^1(s_i^1)} \right)}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения (3.11) следует

$$\exp\{-\beta H(\sigma^1)\} = \prod_{s_i^1 \in P(G)} \exp\{\beta E(s_i^1) (-1)^{\sigma^1(s_i^1)}\}, \quad (3.17)$$

где $\sigma^1 \in C^1(P(G), \mathbf{Z}_2^{\text{add}})$. Легко проверить, что для $\epsilon = 0, 1$

$$\exp\{\beta E(s_i^1) (-1)^\epsilon\} = (\text{ch } \beta E(s_i^1)) \sum_{\xi=0,1} (-1)^\xi (\text{th } \beta E(s_i^1))^{\frac{1}{2} (1 - (-1)^\xi)}. \quad (3.18)$$

Из соотношений (3.17), (3.18) следует, что

$$\begin{aligned} \exp\{-\beta H(\sigma^1)\} &= \left(\prod_{s_i^1 \in P(G)} \operatorname{ch} \beta E(s_i^1) \right) \times \\ &\times \sum_{\xi^1 \in C^1(P(G), \mathbf{Z}_2^{\text{add}})} (-1)^{\langle \xi^1, \sigma^1 \rangle} \prod_{s_i^1 \in P(G)} (\operatorname{th} \beta E(s_i^1))^{\frac{1}{2} \left(1 - (-1)^{\xi^1(s_i^1)} \right)}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Подставляя равенство (3.19) в определение (3.13) и используя первое соотношение (3.6), а также соотношение

$$\sum_{\xi=0,1} (-1)^{\xi \epsilon} = \begin{cases} 2, & \epsilon = 0, \\ 0, & \epsilon = 1, \end{cases} \quad (3.20)$$

получаем равенство (3.15). Подставляя равенство (3.19) в определение (3.14) и используя первое соотношение (3.6), а также соотношение (3.20), получаем равенство (3.16). Предложение доказано.

Здесь мы использовали определения и методы работы [10]. Впервые равенство (3.15) было получено в работе [9]. Равенство (3.16) для однородной изотропной модели Изинга было получено в работе [12].

Вследствие равенства (3.16) корреляционная функция $W_G(\chi)$ не равна нулю лишь для коцепей $\chi \in B_0(P(G), \mathbf{Z}_2^{\text{add}})$. Следовательно, коцепь χ равна 1 лишь на концах ломаных. Каждая ломаная имеет два конца. Поэтому коцепь χ равна 1 на четном числе вершин.

4. МОДЕЛЬ ИЗИНГА

Отождествим одномерную клетку s_i^1 с неориентированным ребром e_i , соответствующим двум противоположно ориентированным ребрам $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{e}_i^{-1}$. Энергию взаимодействия модели Изинга обозначим через $E(s_i^1) = E(e_i) = E(\mathbf{e}_i) = E(\mathbf{e}_i^{-1})$. Равенство (3.15) может быть переписано в виде

$$Z_G = 2^{\#(V^G)} \left(\prod_{e \in P(G)} \operatorname{ch} \beta E(e) \right) Z_{r,G}, \quad (4.1)$$

где

$$Z_{r,G} = \sum_{\xi^1 \in Z_1(P(G), \mathbf{Z}_2^{\text{add}})} \mathbf{u}^{\xi^1}, \quad (4.2)$$

$$\mathbf{u}^{\xi^1} = \prod_{e \in P(G)} u(e)^{\frac{1}{2} \left(1 - (-1)^{\xi^1(e)} \right)}, \quad (4.3)$$

$$u(e) = u(\mathbf{e}) = u(\mathbf{e}^{-1}) = \operatorname{th} \beta E(e). \quad (4.4)$$

Пусть граф G вложен в прямоугольную решетку $\mathbf{Z}^{\times 2}$ на плоскости. Каждой паре $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ ориентированных ребер графа G такой, что $f(\mathbf{e}_1) = b(\mathbf{e}_2)$, $b(\mathbf{e}_1) \neq f(\mathbf{e}_2)$, соответствует число

$$\rho(\mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2) = \exp \left\{ \frac{i}{2} \widehat{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)} \right\}, \quad (4.5)$$

где $\widehat{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)}$ – радианная мера угла между направлением ориентированного ребра $\mathbf{e}_1$ и направлением ориентированного ребра $\mathbf{e}_2$. Согласно равенствам (2.17) и (4.5) любому редуцированному замкнутому пути C на графе G соответствует число $\rho(C) = \exp\{i/2\phi(C)\}$, где $\phi(C)$ – полный угол, на который поворачивается касательный вектор пути C при прохождении пути C .

Для графа G , погруженного в прямоугольную решетку $\mathbf{Z}^{\times 2}$ на плоскости, оценка (2.30) имеет вид

$$|u(\mathbf{e})| = |\operatorname{th} \beta E(\mathbf{e})| < \frac{1}{3}. \quad (4.6)$$

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть конечный граф G погружен в прямоугольную решетку $\mathbf{Z}^{\times 2}$ на плоскости, и пусть справедлива оценка (4.6). Тогда редуцированная статистическая сумма (4.2)

$$Z_{r,G} = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{C \in RC(G)} |C|^{-1} \mathbf{u}^C \rho(C) \right\}, \quad (4.7)$$

где путь C пробегает множество $RC(G)$ всех редуцированных замкнутых путей графа G , а число $\mathbf{u}^C$ определяется соотношениями (2.18), (4.4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно работе [5]

$$(Z_{r,G})^2 = \det(I - T(\mathbf{u}, \rho)), \quad (4.8)$$

где $((\#(\mathbf{E}G)) \times (\#(\mathbf{E}G)))$ -матрица $T(\mathbf{u}, \rho)$ определяется равенствами (2.32), (4.4) и (4.5). По определению угла $\phi(C) = 2\pi k$, где k – целое число. Следовательно, число $\rho(C) = \exp\{i/2\phi(C)\}$ вещественно. Теперь равенство (4.7) следует из равенств (2.36) и (4.8). Теорема доказана.

Для однородной двумерной модели Изинга энергия взаимодействия $E(\mathbf{e})$ не зависит от начальной вершины ребра $\mathbf{e}$. Обозначим через E_1 (E_2) энергию взаимодействия $E(\mathbf{e})$ для горизонтально (вертикально) направленных ребер $\mathbf{e}$. Вследствие соотношений (4.1)–(4.4) для однородной модели Изинга имеем

$$Z_{G(M'_1, M'_2; M_1, M_2)} = Z_{G(1, 1; M_1 - M'_1 + 1, M_2 - M'_2 + 1)}. \quad (4.9)$$

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть для энергии взаимодействия однородной двумерной модели Изинга справедлива оценка (4.6). Тогда для статистической суммы (4.1) однородной модели Изинга на прямоугольной решетке на плоскости справедлива формула

$$\begin{aligned} \lim_{M_i \rightarrow \infty, i=1,2} (M_1 M_2)^{-1} \ln Z_{G(1,1;M_1,M_2)} &= \ln(2 \operatorname{ch} \beta E_1 \operatorname{ch} \beta E_2) + \\ &+ \frac{1}{2} (2\pi)^{-2} \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^{2\pi} d\theta_2 \ln[(1+z_1^2)(1+z_2^2) - \\ &- 2z_1(1-z_2^2) \cos \theta_1 - 2z_2(1-z_1^2) \cos \theta_2], \end{aligned} \quad (4.10)$$

где переменные $z_i = \operatorname{th} \beta E_i$, $i = 1, 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенств (4.1) и (4.7) для однородной модели Изинга на прямоугольной решетке на плоскости следует

$$\begin{aligned} \lim_{M_i \rightarrow \infty, i=1,2} (M_1 M_2)^{-1} \ln Z_{G(1,1;M_1,M_2)} &= \ln(2 \operatorname{ch} \beta E_1 \operatorname{ch} \beta E_2) - \\ &- \lim_{M_i \rightarrow \infty, i=1,2} (2M_1 M_2)^{-1} \sum_{C \in RC(G)} |C|^{-1} \mathbf{u}^C \rho(C), \end{aligned} \quad (4.11)$$

где путь C пробегает множество $RC(G)$ всех редуцированных замкнутых путей на графе $G(1, 1; M_1, M_2)$.

Полное число всех редуцированных замкнутых путей длины l с начальной вершиной $(0, 0)$ на решетке $\mathbf{Z}^{\times 2}$ не превышает $4 \cdot 3^{l-1}$. В силу определений (2.17), (4.5) число $|\rho(C)| = 1$. Поэтому из оценки (4.6) следует абсолютная сходимость ряда в правой части равенства (4.11) для конечных M_1, M_2 .

Энергия взаимодействия $E(\mathbf{e})$ не зависит от начальной вершины ориентированного ребра $\mathbf{e}$. Тогда в силу определений (2.17), (4.5), (2.18) и (4.4) число $|C|^{-1} \mathbf{u}^C \rho(C)$ не зависит от начальной вершины пути C . Следовательно,

$$\sum_{C \in RC(G)} |C|^{-1} \mathbf{u}^C \rho(C) = \sum_{C_0 \in RC_0(\mathbf{Z}^{\times 2})} N(C_0) |C_0|^{-1} \mathbf{u}^{C_0} \rho(C_0), \quad (4.12)$$

где путь C_0 пробегает множество $RC_0(\mathbf{Z}^{\times 2})$ всех редуцированных замкнутых путей с началом в вершине $(0, 0)$ на решетке $\mathbf{Z}^{\times 2}$. Число $N(C_0)$ — это полное число сдвинутых путей C_0 на графе $G(1, 1; M_1, M_2)$. Если $|C_0| \leq M_1$, $|C_0| \leq M_2$, то справедлива следующая оценка:

$$(M_1 - |C_0|)(M_2 - |C_0|) \leq N(C_0) \leq M_1 M_2. \quad (4.13)$$

Из оценки (4.6) следует абсолютная сходимость ряда

$$\sum_{C_0 \in RC_0(\mathbf{Z}^{\times 2})} |C_0|^k \mathbf{u}^{C_0} \rho(C_0) \quad (4.14)$$

для $k = 0, \pm 1$. Таким образом, в силу равенств (4.11), (4.12) и оценок (4.13) имеем

$$\begin{aligned} \lim_{M_i \rightarrow \infty, i=1,2} (M_1 M_2)^{-1} \ln Z_{G(1,1;M_1,M_2)} = \\ = \ln(2 \operatorname{ch} \beta E_1 \operatorname{ch} \beta E_2) - \frac{1}{2} \sum_{C_0 \in RC_0(\mathbf{Z}^{\times 2})} |C_0|^{-1} \mathbf{u}^{C_0} \rho(C_0). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Перепишем выражение (4.15) в более привычном виде. Пусть $G(M'_1, M'_2; M_1, M_2)$ – прямоугольная решетка на плоскости. Отождествим противоположные стороны всего прямоугольника. Полученный граф обозначим $\tilde{G}(M'_1, M'_2; M_1, M_2)$. Он называется прямоугольной решеткой на торе. Для прямоугольной решетки $\tilde{G}(0, 0; M_1, M_2)$ на торе число $u(\mathbf{e})$ определяется равенством (4.4) и число $\rho(\mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2)$ определяется равенством (4.5) с учетом отождествления вершин и ребер в графе $\tilde{G}(0, 0; M_1, M_2)$. $(4M_1 M_2 \times 4M_1 M_2)$ -матрица $T(\mathbf{u}, \rho)$ задается соотношением (2.32). Из равенства (2.36) следует

$$(2M_1 M_2)^{-1} \ln [\det(I - T(\mathbf{u}, \rho))] = -(2M_1 M_2)^{-1} \sum_{C \in RC(\tilde{G})} |C|^{-1} \mathbf{u}^C \rho(C), \quad (4.16)$$

где путь C пробегает множество $RC(\tilde{G})$ всех редуцированных замкнутых путей на графе $\tilde{G}(0, 0; M_1, M_2)$.

Для однородной модели Изинга число $|C|^{-1} \mathbf{u}^C \rho(C)$ не зависит от начальной точки пути C . Граф $\tilde{G}(0, 0; M_1, M_2)$ инвариантен относительно сдвигов. Любой редуцированный замкнутый путь C является сдвинутым редуцированным путем C_0 , причем путь C_0 начинается в вершине $(0, 0)$. Поэтому из равенства (4.16) следует

$$(2M_1 M_2)^{-1} \ln [\det(I - T(\mathbf{u}, \rho))] = -\frac{1}{2} \sum_{C_0 \in RC_0(\tilde{G})} |C_0|^{-1} \mathbf{u}^{C_0} \rho(C_0), \quad (4.17)$$

где путь C_0 пробегает множество $RC_0(\tilde{G})$ всех редуцированных замкнутых путей с началом в вершине $(0, 0)$ на графе $\tilde{G}(0, 0; M_1, M_2)$. Если $M_i \rightarrow \infty$, $i = 1, 2$, то члены ряда (4.17), соответствующие длинным путям, соединяющим вершины $(0, k)$ и (M_1, k) или $(k, 0)$ и (k, M_2) и т.д., стремятся к нулю в силу оценки (4.6). Следовательно,

$$\lim_{\substack{M_i \rightarrow \infty \\ i=1,2}} (2M_1 M_2)^{-1} \ln [\det(I - T(\mathbf{u}, \rho))] = -\frac{1}{2} \sum_{C_0 \in RC_0(\mathbf{Z}^{\times 2})} |C_0|^{-1} \mathbf{u}^{C_0} \rho(C_0), \quad (4.18)$$

где путь C_0 пробегает множество $RC_0(\mathbf{Z}^{\times 2})$ всех редуцированных замкнутых путей с началом в вершине $(0, 0)$ на решетке $\mathbf{Z}^{\times 2}$.

Вычислим определитель матрицы $I - T(\mathbf{u}, \rho)$. Вершины графа $\tilde{G}(0, 0; M_1, M_2)$ задаются векторами $\mathbf{j} \in \mathbf{Z}^{\times 2}$, $1 \leq j_1 \leq M_1$, $1 \leq j_2 \leq M_2$. Ориентированное ребро $\mathbf{e}$ графа $\tilde{G}(0, 0; M_1, M_2)$ определяется его начальной вершиной $b(\mathbf{e}) = \mathbf{j}$ и его направлением – единичным вектором $\mathbf{v}$. Единичный вектор $\mathbf{v}$ – это один из четырех векторов $(\pm 1, 0)$,

$(0, \pm 1)$. Таким образом, ориентированное ребро e — это пара $(\mathbf{j}, \mathbf{v})$. В силу определений (2.32), (4.4) и (4.5) имеем

$$T(\mathbf{u}, \rho)_{(j,v),(j',v')} = u(\mathbf{j}, \mathbf{v}) \delta_{j_1+v_1-j'_1, M_1 Z} \delta_{j_2+v_2-j'_2, M_2 Z} \times \\ \times (1 - \delta_{v_1+v'_1, 0} \delta_{v_2+v'_2, 0}) \exp \left\{ \frac{i}{2} \widehat{(\mathbf{v}, \mathbf{v}')} \right\}, \quad (4.19)$$

где символ Кронекера

$$\delta_{j, M_k Z} = M_k^{-1} \sum_{l=1}^{M_k} \exp \{ i 2 \pi M_k^{-1} j l \}. \quad (4.20)$$

Символ (4.20) равен 1, если $j = M_k l$, где l — целое число, и равен нулю, если $j \neq M_k l$.

Для однородной модели Изинга число $u(\mathbf{j}, \mathbf{v})$ не зависит от вектора $\mathbf{j}$. Это число обозначим $u(\mathbf{v})$. Из равенств (4.19) и (4.20) следует

$$(I - T(\mathbf{u}, \rho))_{(j,v),(j',v')} = (C B C^{-1})_{(j,v),(j',v')}, \quad (4.21)$$

где матрицы C, B имеют вид

$$C_{(j,v),(j',v')} = \delta_{v_1, v'_1} \delta_{v_2, v'_2} (M_1 M_2)^{-\frac{1}{2}} \exp \{ i 2 \pi (M_1^{-1} j_1 j'_1 + M_2^{-1} j_2 j'_2) \}, \quad (4.22)$$

$$B_{(j,v),(j',v')} = \delta_{j_1, j'_1} \delta_{j_2, j'_2} B(\mathbf{j})_{v, v'}, \\ B(\mathbf{j})_{v, v'} = \delta_{v_1, v'_1} \delta_{v_2, v'_2} - \exp \{ i 2 \pi (M_1^{-1} v_1 j_1 + M_2^{-1} v_2 j_2) \} \times \\ \times u(\mathbf{v}) \exp \left\{ \frac{i}{2} \widehat{(\mathbf{v}, \mathbf{v}')} \right\} (1 - \delta_{v_1, -v'_1} \delta_{v_2, -v'_2}). \quad (4.23)$$

Матрица $B_{(j,v),(j',v')}$ диагональна для векторов $\mathbf{j}, \mathbf{j}'$. Второе соотношение (4.23) определяет (4×4) -матрицу $B(\mathbf{j})_{v, v'}$ для любого вектора $\mathbf{j} \in \mathbf{Z}^{\times 2}$, $1 \leq j_1 \leq M_1$, $1 \leq j_2 \leq M_2$. Из соотношений (4.21) и (4.23) следует

$$\det(I - T(\mathbf{u}, \rho)) = \prod_{j_1=1}^{M_1} \prod_{j_2=1}^{M_2} \det B(\mathbf{j}). \quad (4.24)$$

В силу соотношений (4.4) $u(\pm 1, 0) = \text{th } \beta E_1 = z_1$, $u(0, \pm 1) = \text{th } \beta E_2 = z_2$. Пользуясь определением (4.23), нетрудно вычислить

$$\det B(\mathbf{j}) = (1 + z_1^2)(1 + z_2^2) - 2z_1(1 - z_2^2) \cos 2\pi M_1^{-1} j_1 - 2z_2(1 - z_1^2) \cos 2\pi M_2^{-1} j_2. \quad (4.25)$$

Подстановка равенства (4.25) в соотношение (4.24) дает

$$\det(I - T(\mathbf{u}, \rho)) = \prod_{j_1=1}^{M_1} \prod_{j_2=1}^{M_2} [(1 + z_1^2)(1 + z_2^2) - 2z_1(1 - z_2^2) \cos 2\pi M_1^{-1} j_1 - \\ - 2z_2(1 - z_1^2) \cos 2\pi M_2^{-1} j_2]. \quad (4.26)$$

Из равенств (4.15), (4.18) и (4.26) следует равенство (4.10). Теорема доказана.

Пусть коцепь $\xi^1 \in C^1(P(G), \mathbf{Z}_2^{\text{add}})$. Носителем $\|\xi^1\|$ назовем множество всех неориентированных ребер графа G , на которых коцепь ξ^1 равна 1. Пусть коцепь $\chi \in C_0(P(G), \mathbf{Z}_2^{\text{add}})$. Носитель $\|\xi^1\|$ называется χ -связным, если любая его связная компонента содержит неориентированные ребра, инцидентные вершинам, на которых коцепь χ равна 1. Обозначим через $i(\|\xi^1\|)$ множество всех неориентированных ребер, инцидентных вершинам, которые инцидентны ребрам носителя $\|\xi^1\|$. Пользуясь соотношениями (4.1)–(4.4), перепишем корреляционную функцию (3.16) в виде

$$W_G(\chi) = (Z_{r,G})^{-1} \sum_{\substack{\xi^1 \in C^1(P(G), \mathbf{Z}_2^{\text{add}}), \partial \xi^1 = \chi, \\ \chi\text{-connected } \|\xi^1\|}} \mathbf{u}^{\xi^1} Z_{r, G \setminus i(\|\xi^1\|)}, \quad (4.27)$$

где граф $G \setminus i(\|\xi^1\|)$ получается с помощью удаления всех ребер множества $i(\|\xi^1\|)$ из графа G .

Если C – замкнутый путь на графе G , то носителем $\|C\|$ называется множество всех неориентированных ребер, соответствующих ориентированным ребрам из замкнутого пути C .

ТЕОРЕМА 4.3. *Пусть справедлива оценка (4.6). Пусть энергия взаимодействия $E(\mathbf{e})$ неотрицательна. Пусть коцепь $\chi \in C^0(P(G), \mathbf{Z}_2^{\text{add}})$ равна 1 на конечном числе вершин. Тогда корреляционная функция (3.14) двумерной модели Изинга со свободными граничными условиями*

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{M_k \rightarrow \infty, M'_k \rightarrow -\infty, \\ k=1,2}} W_{G(M'_1, M'_2; M_1, M_2)}(\chi) = \\ & = \sum_{\substack{\xi^1 \in C^1(P(G), \mathbf{Z}_2^{\text{add}}), \partial \xi^1 = \chi, \\ \chi\text{-connected } \|\xi^1\|}} \mathbf{u}^{\xi^1} \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\substack{C \in RC(\mathbf{Z}^{\times 2}), \\ \|C\| \cap i(\|\xi^1\|) \neq \emptyset}} |C|^{-1} \mathbf{u}^C \rho(C) \right\}, \end{aligned} \quad (4.28)$$

где число $\mathbf{u}^{\xi^1}$ определяется соотношениями (4.3), (4.4), число $\mathbf{u}^C$ определяется соотношениями (2.18), (4.4) и число $\rho(C)$ определяется соотношениями (2.17), (4.5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим равенство (4.27) для графа $G = G(M'_1, M'_2; M_1, M_2)$. Из теоремы 4.1 следует

$$(Z_{r,G})^{-1} Z_{r, G \setminus i(\|\xi^1\|)} = \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\substack{C \in RC(G), \\ \|C\| \cap i(\|\xi^1\|) \neq \emptyset}} |C|^{-1} \mathbf{u}^C \rho(C) \right\}. \quad (4.29)$$

Общее число всех редуцированных замкнутых путей длины l с фиксированной начальной вершиной на решетке $\mathbf{Z}^{\times 2}$ не превышает $4 \cdot 3^{l-1}$. В силу оценки (4.6) ряд (4.29) абсолютно сходится при $G \rightarrow \mathbf{Z}^{\times 2}$, причем каждый член суммы (4.27) для графа $G = G(M'_1, M'_2; M_1, M_2)$ сходится к члену ряда (4.28) при $G \rightarrow \mathbf{Z}^{\times 2}$. Равенство (4.28) будет доказано, если будет доказана абсолютная сходимость ряда (4.28) при выполнении оценки (4.6).

Корреляционная функция (4.27) не равна нулю лишь для коцепей $\chi \in B_0(P(G), \mathbf{Z}_2^{\text{add}})$, принимающих значение 1 на четном числе вершин $\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_{2k}$ графа $G \subset \mathbf{Z}^{\times 2}$. Пусть коцепь $\xi^1 \in C^1(P(G), \mathbf{Z}_2^{\text{add}})$ удовлетворяет условию $\partial \xi^1 = \chi$. Тогда вершина $\mathbf{m}_1$ инцидентна одному или трем неориентированным ребрам, на которых коцепь ξ^1 равна 1. Возьмем одно такое ребро. Оно соответствует ориентированному ребру $(\mathbf{m}_1, \mathbf{v}_1)$. Если $\mathbf{m}_1 + \mathbf{v}_1 = \mathbf{m}_{j_1}$, то мы построили путь, соединяющий вершины $\mathbf{m}_1$ и $\mathbf{m}_{j_1}$. Если же $\mathbf{m}_1 + \mathbf{v}_1$ не совпадает с какой-либо из вершин $\mathbf{m}_2, \dots, \mathbf{m}_{2k}$, то в силу условия $\partial \xi^1 = \chi$ вершина $\mathbf{m}_1 + \mathbf{v}_1$ инцидентна двум или четырем неориентированным ребрам, на которых коцепь ξ^1 равна 1. Одно из этих неориентированных ребер соответствует ориентированному ребру $(\mathbf{m}_1 + \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$, $\mathbf{v}_2 \neq -\mathbf{v}_1$. Продолжая этот процесс, мы построим путь $P_1 = ((\mathbf{m}'_1, \mathbf{v}_1), \dots, (\mathbf{m}'_{q_1}, \mathbf{v}_{q_1}))$, где $\mathbf{m}'_1 = \mathbf{m}_1$, $\mathbf{m}'_{i+1} = \mathbf{m}'_i + \mathbf{v}_i$, $i = 1, \dots, q_1 - 1$, $\mathbf{m}'_{q_1} + \mathbf{v}_{q_1} = \mathbf{m}_{j_1}$ и $\mathbf{m}_{j_1}$ — одна из вершин $\mathbf{m}_2, \dots, \mathbf{m}_{2k}$, на которых коцепь χ равна 1. Любое неориентированное ребро может соответствовать лишь одному ориентированному ребру из пути P_1 . Пусть коцепь $\xi^1[P_1] \in C^1(P(G), \mathbf{Z}_2^{\text{add}})$ равна 1 на всех неориентированных ребрах, соответствующих ориентированным ребрам из пути P_1 , и равна 0 на всех остальных неориентированных ребрах графа G . По построению $\xi^1 = \xi^1[P_1] + \eta^1$, где носители коцепей $\xi^1[P_1], \eta^1 \in C^1(P(G), \mathbf{Z}_2^{\text{add}})$ не пересекаются. Продолжая этот процесс, мы построим пути $P_1, \dots, P_k$, связывающие вершины $\mathbf{m}_{i_1}, \dots, \mathbf{m}_{i_k}$, $1 = i_1 < i_2 < \dots < i_k$, с вершинами $\mathbf{m}_{j_1}, \dots, \mathbf{m}_{j_k}$, $i_l < j_l$, $l = 1, \dots, k$. Любое неориентированное ребро может соответствовать лишь одному ориентированному ребру из путей P_l , $l = 1, \dots, k$. Этим путям соответствуют такие коцепи $\xi^1[P_l]$, $l = 1, \dots, k$, что $\xi^1 = \xi^1[P_1] + \dots + \xi^1[P_k] + \eta^1$, где носители коцепей $\xi^1[P_1], \dots, \xi^1[P_k], \eta^1 \in C^1(P(G), \mathbf{Z}_2^{\text{add}})$ не пересекаются между собой и $\eta^1 \in Z_1(P(G), \mathbf{Z}_2^{\text{add}})$. Вообще говоря, это разложение не является единственным, поэтому справедливо не равенство, а оценка

$$W_G(\chi) \leq (Z_{r,G})^{-1} \sum_{\substack{\{i_l, j_l\}, \\ l=1, \dots, k}} \sum_{P_l, l=1, \dots, k} \left(\prod_{l=1}^k \mathbf{u}^{P_l} \right) Z_{r, G \setminus (\prod_{l=1}^k \|P_l\|)}, \quad (4.30)$$

где индексы $\{i_l, j_l\}$ пробегают множество разбиений чисел $1, \dots, 2k$ в k пар: $1 = i_1 < \dots < i_k$, $i_l < j_l$, $l = 1, \dots, k$, пути P_l , $l = 1, \dots, k$, пробегают множество путей, связывающих вершины $\mathbf{m}_{i_l}$ с вершинами $\mathbf{m}_{j_l}$, $l = 1, \dots, k$, любое неориентированное ребро может соответствовать лишь одному ориентированному ребру из путей P_l , $l = 1, \dots, k$, и граф $G \setminus (\prod_{l=1}^k \|P_l\|)$ получается из графа G с помощью удаления всех ребер из носителей $\|P_l\|$, $l = 1, \dots, k$. В силу определения (4.4) переменная $u(\mathbf{e})$ неотрицательна, если неотрицательна энергия взаимодействия $E(\mathbf{e})$. Для неотрицательных переменных $u(\mathbf{e})$ из определения (4.2) следует оценка

$$(Z_{r,G})^{-1} Z_{r, G \setminus (\prod_{l=1}^k \|P_l\|)} \leq 1. \quad (4.31)$$

Из неравенств (4.30), (4.31) следует, что

$$W_G(\chi) \leq \sum_{\substack{\{i_l, j_l\}, \\ l=1, \dots, k}} \sum_{P_l, l=1, \dots, k} \prod_{l=1}^k \mathbf{u}^{P_l}. \quad (4.32)$$

Полное число редуцированных замкнутых путей длины l с началом в фиксированной вершине решетки $\mathbf{Z}^{\times 2}$ не превышает $4 \cdot 3^{l-1}$. Поэтому в силу неравенства (4.6) при $G \rightarrow \mathbf{Z}^{\times 2}$ сумма (4.32) сходится к абсолютно сходящемуся ряду. Этот ряд мажорирует ряд (4.28). Следовательно, ряд (4.28) абсолютно сходится, если выполнена оценка (4.6). Теорема доказана.

Пусть цикл $\xi^1 \in Z_1(P(G), \mathbf{Z}_2^{\text{add}})$. Используя аргументы теоремы 4.3, мы можем построить такие замкнутые пути $C_1, \dots, C_m$, что $\xi^1 = \xi^1[C_1] + \dots + \xi^1[C_m]$, где носители $\|C_1\|, \dots, \|C_m\|$ не пересекаются между собой и любое неориентированное ребро может соответствовать лишь одному ориентированному ребру из замкнутых путей $C_1, \dots, C_m$. Любой замкнутый путь на прямоугольной решетке на плоскости имеет четное число вертикально ориентированных ребер и четное число горизонтально ориентированных ребер. Пусть энергия взаимодействия $E(\mathbf{e})$ неотрицательна для вертикально ориентированных ребер $\mathbf{e}$ и неположительна для горизонтально ориентированных ребер $\mathbf{e}$. Тогда в силу определений (4.3), (4.4) $\mathbf{u}^{\xi^1} \geq 0$. Следовательно, неравенство (4.31) выполнено и в этом случае. Поэтому в этом случае также можно доказать абсолютную сходимость ряда (4.28). Таким образом, теорема 4.3 справедлива и в случае, когда энергия взаимодействия неотрицательна для вертикально ориентированных ребер и неположительна для горизонтально ориентированных ребер. Теорема 4.3 справедлива также и в случае, когда энергия взаимодействия неположительна для вертикально ориентированных ребер и неотрицательна для горизонтально ориентированных ребер. Если энергия взаимодействия неположительна для всех ориентированных ребер, то теорема 4.3 по-прежнему справедлива.

Благодарности. Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 00-01-00083).

Список литературы

- [1] *L. Onsager.* Phys. Rev. 1944. V. 65. P. 117–149.
- [2] *M. Kac, J. C. Ward.* Phys. Rev. 1952. V. 88. P. 1332–1337.
- [3] *S. Sherman.* J. Math. Phys. 1960. V. 1. P. 202–217.
- [4] *S. Sherman.* J. Math. Phys. 1963. V. 4. P. 1213–1214.
- [5] *Н. П. Долбилин, Ю. М. Зиновьев, А. С. Мищенко, М. А. Штанько, М. И. Штогрин.* Известия РАН. Сер. матем. 1999. Т. 63. № 4. С. 79–100.
- [6] *P. N. Burgoyne.* J. Math. Phys. 1963. V. 4. P. 1320–1326.
- [7] *K. Hashimoto.* Adv. Stud. in Pure Math. 1989. V. 15. P. 211–280.
- [8] *K. Hashimoto.* Int. J. Math. 1990. V. 1. P. 381–396.
- [9] *B. L. van der Waerden.* Z. Phys. 1941. V. 118. P. 473–488.
- [10] *Ю. М. Зиновьев.* ТМФ. 1980. Т. 43. С. 309–322.
- [11] *Г. Бейтман, А. Эрдейи.* Высшие трансцендентные функции. Т. 3. М.: Наука, 1967.
- [12] *Yu. M. Zinoviev.* Commun. Math. Phys. 1990. V. 130. P. 433–440.

Поступила в редакцию 29.V.2000 г.