Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Гончаренко, О многосолитонных решениях матричного уравнения КдФ,
ТМФ, 2001, том 126, номер 1, 102–114

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf417>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 15:57:39

© 2001 г.

В. М. Гончаренко*

О МНОГОСОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЯХ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ КДФ

Рассматриваются многосолитонные решения матричного уравнения КДФ. Получены формулы для сдвига фаз и изменения амплитуд при взаимодействии двух солитонов, и показано, что многочастичный эффект при многосолитонном взаимодействии отсутствует. Найдены условия, гарантирующие симметричность соответствующих решений матричного уравнения КДФ, полученных матричными преобразованиями Дарбу оператора Шредингера с нулевым потенциалом.

Одним из самых замечательных свойств нелинейных эволюционных уравнений, интегрируемых методом обратной задачи, является существование многосолитонных решений. В частности, N -солитонные решения уравнения КДФ могут быть получены с помощью уравнения Гельфанда–Левитана–Марченко для оператора Шредингера (см. [1], [2]) при условии, что коэффициент отражения тождественно равен нулю, или с помощью преобразований Дарбу (см., например, [3]). Замечательной особенностью этих решений является то, что они могут быть интерпретированы как решения, описывающие взаимодействие N солитонов, которые после взаимодействия не меняют своей формы, а лишь претерпевают некоторый сдвиг фаз. Точнее, если $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_N$ — некоторые положительные числа, определяющие скорость $4\lambda_k^2$ k -го солитона, и $\phi_k^\pm$ — его фазы при $t \rightarrow \pm\infty$, то сдвиг фаз Δ_k k -го солитона задается формулой

$$\Delta_k = \phi_k^+ - \phi_k^- = \frac{1}{2\lambda_k} \sum_{n=1}^{k-1} \ln \left(\frac{\lambda_k + \lambda_n}{\lambda_k - \lambda_n} \right)^2 - \frac{1}{2\lambda_k} \sum_{n=k+1}^N \ln \left(\frac{\lambda_k - \lambda_n}{\lambda_k + \lambda_n} \right)^2.$$

В этой работе исследуется взаимодействие солитонов матричного уравнения КДФ

$$U_t = 3UU_x + 3U_xU - U_{xxx}, \quad (1)$$

где $U(x, t)$ — $(d \times d)$ -матрица, не обязательно симметричная. Это уравнение было введено Лаксом [4]. Вадати и Камиджо [5], а затем Калоджеро и Дегасперис [6] рассмотрели широкий класс интегрируемых эволюционных уравнений, связанных с матричным оператором Шредингера

$$L = -D^2 + U(x), \quad D = \frac{d}{dx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

* Финансовая академия, Москва, Россия. E-mail: mike-gonchar@mtu-net.ru

с эрмитовым потенциалом $U^* = U$. Дегасперис в работе [7] детально исследовал взаимодействие солитонов уравнения бумерона. Как это ни странно, подобное исследование солитонных решений матричного уравнения КдФ до сих пор не было проделано, хотя никаких принципиальных трудностей это не вызывает. Мы будем опираться на результаты Мартинеса Алонсо и Олмедиллы [8], [9], которые рассматривали прямую и обратную задачи для оператора (2) с общим (неэрмитовым) потенциалом.

В первом разделе, используя понятие квазидетерминанта, введенное Гельфандом и Ретахом [10], мы получим общую формулу для многосолитонного решения уравнения (1) в терминах спектральных данных соответствующего оператора Шредингера.

Во втором разделе мы построим решение уравнения КдФ, представляющее собой семейство солитонов с одинаковыми скоростями, но различными фазами (параллельные солитоны). Затем мы выведем формулы для сдвига фаз солитонов при их взаимодействии для двухсолитонного решения матричного уравнения КдФ, из которых видно, что в матричном случае картина взаимодействия гораздо богаче, чем в скалярном. В частности, меняются как фазы, так и (матричные) амплитуды солитонов; при некоторых начальных амплитудах, заданных несимметричными матрицами, медленный солитон сдвигается вперед, а быстрый – назад, в противоположность тому, что имеет место в скалярном случае (см. [2]).

В третьем разделе мы изучаем связь между двумя подходами к построению многосолитонных решений матричного уравнения КдФ – преобразованиями Дарбу и уравнениями Гельфанда–Левитана–Марченко.

Часть результатов этой статьи была анонсирована в [11], где также обсуждалась связь солитонных матричных потенциалов с безмонодромными (см. также [12]).

1. МНОГОСОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ КдФ

Напомним некоторые факты из теории обратного преобразования рассеяния для матричного оператора Шредингера (2) с потенциалом $U(x)$, заданным матричной $(d \times d)$ -функцией, вообще говоря, несимметричной и удовлетворяющей условию

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1+x^2)|U(x)| dx < \infty, \quad (3)$$

где $|X| = \max_j \sum_k |X_{jk}|$ для некоторой матрицы X . В дальнейшем мы следуем работам [8], [9]. Рассмотрим соответствующее уравнение Шредингера

$$L\Psi = k^2\Psi, \quad (4)$$

где $\Psi = \Psi(x, k)$ – также $(d \times d)$ -матричнозначная функция. Определим решения Йоста $F(x, k)$ и $G(x, k)$ ($k \in \mathbf{R}$) уравнения (4), удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} F(x, k) &= e^{ikx}(I + o(1)), \quad x \rightarrow +\infty, \\ G(x, k) &= e^{-ikx}(I + o(1)), \quad x \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

Так как $F(x, -k)$ и $G(x, -k)$ – также решения (4), то имеют место соотношения

$$\begin{aligned} G(x, k) &= F(x, -k)A(k) + F(x, k)B(k), \\ F(x, k) &= G(x, -k)C(k) + F(x, k)D(k), \end{aligned}$$

где $A(k)$, $B(k)$, $C(k)$, $D(k)$ – некоторые $(d \times d)$ -матрицы. Матрица $A(k)$ аналитична в области $\text{Im } k > 0$ и непрерывна вплоть до вещественной оси. Решения k_j уравнения

$$\det A(k) = 0 \quad (5)$$

в верхней полуплоскости соответствуют дискретному спектру оператора L с векторными собственными функциями из $L_2(-\infty, \infty)$. Мы будем предполагать, что полюсы $A^{-1}(k)$ простые и $A(k)$ – невырожденная матрица на действительной оси.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $U(x)$ – эрмитова матрица, удовлетворяющая условию (3), то последние два условия выполнены автоматически (см. [5]). Если же матрица $U(x)$ неэрмитова, то эти предположения существенны, так как $A^{-1}(k)$ может иметь полюсы высшего порядка (см. [9], где исследован случай полюса второго порядка).

Можно также доказать, что число полюсов матрицы $A^{-1}(k)$ конечно (см. [9]).

Пусть теперь $N_j = \text{Res}_{k=k_j} A^{-1}(k)$, $j = 1, \dots, n$. Тогда существуют матрицы R_j такие, что

$$G(x, k_j)N_j = iF(x, k_j)R_j. \quad (6)$$

Матричный аналог коэффициента отражения определяется формулой

$$R(k) = B(k)A^{-1}(k).$$

Множество $\{k_j, R_j, R(k)\}$ называется *данными рассеяния* матричного оператора Шредингера. Для решения обратной задачи восстановления оператора L по данным рассеяния положим

$$H(x) = \sum_{j=1}^n R_j e^{ik_j x} + \frac{1}{2\pi} \int_x^{+\infty} dk R(k) e^{ikx}.$$

Потенциал оператора L находится по формуле

$$U(x) = -2K'(x), \quad (7)$$

где $K(x) = K(x, x)$, а $K(x, y)$ – решение матричного уравнения Гельфанда–Левитана–Марченко (см. [9])

$$K(x, y) + H(x + y) + \int_x^{+\infty} K(x, z)H(y + z) dz = 0. \quad (8)$$

Матричное уравнение КдФ допускает представление Лакса [4], [5] $L_t = [L, B]$, где $L = -D^2 + U(x, t)$ и $B = -4D^3 + 3(U(x, t)D + DU(x, t))$. Так же как и в скалярном случае, легко проверить [6], что если $U(x, t)$ – решение уравнения (1), то

$$\begin{aligned} A(k, t) &= A(k, 0), \quad R_j(t) = R_j(0)e^{8ik_j^3 t}, \quad j = 1, \dots, n, \\ R(k, t) &= R(k, 0)e^{8ik^3 t}. \end{aligned} \quad (9)$$

Рассмотрим теперь случай безотражательных потенциалов: $R(k) \equiv 0$. В этом случае уравнения Гельфанда–Левитана–Марченко решаются явно. Предположим, что все k_j : $A(k_j) = 0$ расположены на мнимой оси, так что $k_j = i\lambda_j$, $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n$. Тогда уравнение (8) можно переписать в виде

$$K(x, y) + \sum_{j=1}^n R_j e^{-\lambda_j(x+y)} + \sum_{j=1}^n \int_x^{+\infty} K(x, z) R_j e^{-\lambda_j(y+z)} dz = 0.$$

Предполагая, что $K(x, y)$ имеет вид

$$K(x, y) = \sum_{j=1}^n K_j(x) e^{-\lambda_j y},$$

интегрируя и разделяя слагаемые с $e^{-\lambda_j y}$, $j = 1, \dots, n$, мы получаем следующую систему линейных уравнений:

$$\sum_{j=1}^n K_j \mathcal{A}_{ij} = -R_j e^{-\lambda_j x}, \quad \mathcal{A}_{ij} = \delta_{ij} I + \frac{R_j}{\lambda_i + \lambda_j} e^{-(\lambda_i + \lambda_j)x}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (10)$$

Для того чтобы выписать явную формулу для $K(x)$, мы используем понятие *квазидетерминанта*, введенное Гельфандом и Ретахом [10].

Пусть $R = \text{Mat}_d(\mathbb{C})$ обозначает алгебру $(d \times d)$ -матриц и $X - (n \times n)$ -матрица над R . Для любых $1 \leq i, j \leq n$ обозначим через $r_i(X)$ i -ю строку и через $c_j(X)$ j -й столбец матрицы X . Пусть X^{ij} – подматрица X , полученная удалением i -й строки и j -го столбца X . Для вектора-строки r пусть $r^{(j)}$ обозначает r без j -го элемента. Для вектора-столбца c пусть $c^{(i)}$ – c без i -го элемента. Тогда по определению квазидетерминант

$$|X|_{ij} = x_{ij} - r_i(X)^{(j)} (X^{ij})^{-1} c_j(X)^{(i)},$$

где x_{ij} – ij -й элемент матрицы X . Легко проверить, что если $d = 1$, то

$$|X|_{ij} = (-1)^{(i+j)} \frac{\det X}{\det X^{ij}}.$$

Обозначим через $\mathcal{A}$ $(n \times n)$ -матрицу, ij -м элементом которой является $(d \times d)$ -матрица $\mathcal{A}_{ij}$. Тогда легко проверить, что

$$K(x) = \sum_{j=1}^n |\mathcal{A}^{(j)}|_{jj} |\mathcal{A}|_{jj}^{-1}, \quad (11)$$

где $\mathcal{A}^{(j)}$ получается из $\mathcal{A}$ дифференцированием j -й строки, а $|\mathcal{A}|_{jj}$ – jj -й квазидетерминант матрицы $\mathcal{A}$.

Таким образом, мы приходим к следующей теореме (ср. [13]).

ТЕОРЕМА 1. Матричное уравнение КдФ обладает многосолитонными решениями

$$U(x, t) = -2 \left(\sum_{j=1}^n |\mathcal{A}^{(j)}|_{jj} |\mathcal{A}|_{jj}^{-1} \right)', \quad (12)$$

где элементы $\mathcal{A}_{ij}$ матрицы $\mathcal{A}$ определяются формулами (10) с $R_j(t) = R_j(0)e^{8\lambda_j^3 t}$, а $(\lambda_j, R_j(0))$ – данные рассеяния безотражательного потенциала $U(x, 0)$.

2. ПРИМЕРЫ МНОГОСОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ КдФ. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СОЛИТОНОВ

Далее мы приведем примеры одно- и двухсолитонных решений уравнения КдФ и исследуем взаимодействие его солитонов.

ПРИМЕР 1. Односолитонные решения матричного уравнения КдФ.

Односолитонные решения уравнения (1) соответствуют оператору Шредингера с одним дискретным собственным значением λ . Предположим сначала, что соответствующая спектральная матрица имеет вид $R = rP$, где $P = P^2$ – проектор. С использованием выражений (9) уравнение (10) (для $n = 1$) может быть переписано в форме

$$K(x, x) \left(Ie^{2\lambda\theta} + \frac{R}{2\lambda} \right) = -R,$$

где $\theta = x - 4\lambda^2 t$. Очевидно,

$$K(x, x) = -R \left(Ie^{2\lambda\theta} + \frac{R}{2\lambda} \right)^{-1} = \frac{2\lambda R}{2\lambda e^{2\lambda\theta} + r}$$

и

$$U(x, t) = -2K'(x, x) = -2\lambda^2 P \operatorname{sech}^2 \lambda(\theta - \phi), \quad \phi = \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{r}{2\lambda}.$$

Мы называем $2\lambda^2 P = 2\lambda^2 R / \operatorname{tr} R$ *матричной амплитудой* солитона и ϕ – его фазой. Проектор P иногда называется *поляризацией* солитона.

Если

$$R = \sum_{k=1}^n r^{(k)} P^{(k)},$$

где $P^{(k)}$ – проекторы на соответствующие собственные подпространства такие, что $P^{(i)} P^{(j)} = \delta_{ij}$, то

$$U(x, t) = -2\lambda^2 \sum_{k=1}^n P^{(k)} \operatorname{sech}^2 \lambda(\theta - \phi_k), \quad \phi_k = \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{r^{(k)}}{2\lambda}. \quad (13)$$

Таким образом, матричное уравнение КдФ имеет решение, представляющее собой семейство параллельных солитонов, бегущих с одинаковыми скоростями, но имеющих разные фазы. Это имеет место лишь в матричном случае ($d > 1$) и связано с наличием у соответствующего матричного оператора Шредингера кратных собственных значений, когда одному дискретному уровню соответствуют несколько линейно независимых собственных функций, квадратично интегрируемых на прямой.

ПРИМЕР 2. Двухсолитонное решение матричного уравнения КдФ.

Соответствующий оператор Шредингера имеет два дискретных уровня: $-\lambda_1^2$ и $-\lambda_2^2$. Будем предполагать, что спектральные матрицы имеют вид

$$R_j = r_j P_j, \quad j = 1, 2,$$

где

$$P_j = \frac{p_j \otimes q_j}{(p_j, q_j)},$$

а d -векторы p_j, q_j удовлетворяют условию $(p_j, q_j) \neq 0$. Вводя матрицы $L_j = K_j e^{-\lambda_j x}$ такие, что

$$K(x, x) = L_1(x) + L_2(x),$$

и переменные $\theta_j = x - 4\lambda_j^2 t$, мы получаем из формул (10), что L_j удовлетворяют системе

$$\begin{aligned} L_1 e^{2\lambda_1 \theta_1} + L_1 \frac{R_1}{2\lambda_1} + L_2 \frac{R_1}{\lambda_1 + \lambda_2} &= -R_1, \\ L_2 e^{2\lambda_2 \theta_2} + L_1 \frac{R_2}{\lambda_1 + \lambda_2} + L_2 \frac{R_2}{2\lambda_2} &= -R_2. \end{aligned}$$

После несложных преобразований получаем

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{g} (R_2 - (\lambda_1 + \lambda_2) g_2 I) R_1, \\ L_2 &= \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{g} (R_1 - (\lambda_1 + \lambda_2) g_1 I) R_2, \end{aligned}$$

где

$$g_j = e^{2\lambda_j \theta_j} + \frac{r_j}{2\lambda_j} \quad \text{для } j = 1, 2$$

и

$$g = (\lambda_1 + \lambda_2)^2 g_1 g_2 - (p_1, q_2)(p_2, q_1), \quad (14)$$

откуда имеем

$$K(x, x) = L_1 + L_2 = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)}{g} (\{R_1, R_2\} - (\lambda_1 + \lambda_2)(g_2 R_1 - g_1 R_2)),$$

где $\{R_1, R_2\} = R_1 R_2 + R_2 R_1$ и

$$U(x, t) = -2K'(x, x). \quad (15)$$

Важно выделить те начальные данные, при которых солитонное решение КдФ регулярно. Анализируя формулу (14) для g , легко получить следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Потенциал (15) регулярен, если $r_1 > 0$, $r_2 > 0$ и $\alpha > 0$, где*

$$\alpha = 1 - \frac{4\lambda_1\lambda_2(p_1, q_2)(q_1, p_2)}{r_1r_2(\lambda_1 + \lambda_2)^2}. \quad (16)$$

Исследуем поведение $U(x, t)$ при $|t| \rightarrow \infty$. В окрестности прямой $\theta_1 = x - 4\lambda_1^2 t = 0$:

$$\begin{aligned} U(x, t) &\sim -2\lambda_1^2 P_1 \operatorname{sech}^2 \lambda_1(\theta_1 - \phi_1^-), \quad t \rightarrow -\infty, \\ U(x, t) &\sim -2\lambda_1^2 \hat{P}_1 \operatorname{sech}^2 \lambda_1(\theta_1 - \phi_1^+), \quad t \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \hat{P}_1 &= -\frac{\hat{p}_1 \otimes \hat{q}_1}{(\hat{p}_1, \hat{q}_1)}, \\ \hat{p}_1 &= r_2 p_1 - \frac{2\lambda_2}{(\lambda_1 + \lambda_2)}(p_1, q_2)p_2, \quad \hat{q}_1 = r_2 q_1 - \frac{2\lambda_2}{(\lambda_1 + \lambda_2)}(p_2, q_1)q_2, \\ \phi_1^- &= \frac{1}{2\lambda_1} \ln \frac{r_1}{2\lambda_1}, \quad \phi_1^+ = \frac{1}{2\lambda_1} \ln \frac{(\hat{p}_1, \hat{q}_1)}{2\lambda_1 r_2^2}. \end{aligned}$$

В окрестности прямой $\theta_2 = x - 4\lambda_2^2 t = 0$:

$$\begin{aligned} U(x, t) &\sim -2\lambda_2^2 \hat{P}_2 \operatorname{sech}^2 \lambda_2(\theta_2 - \phi_2^-), \quad t \rightarrow -\infty, \\ U(x, t) &\sim -2\lambda_2^2 P_2 \operatorname{sech}^2 \lambda_2(\theta_2 - \phi_2^+), \quad t \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \hat{P}_2 &= \frac{\hat{p}_2 \otimes \hat{q}_2}{(\hat{p}_2, \hat{q}_2)}, \\ \hat{p}_2 &= r_1 p_2 - \frac{2\lambda_1}{(\lambda_1 + \lambda_2)}(p_2, q_1)p_1, \quad \hat{q}_2 = r_1 q_2 - \frac{2\lambda_1}{(\lambda_1 + \lambda_2)}(p_1, q_2)q_1, \\ \phi_2^- &= \frac{1}{2\lambda_2} \ln \frac{(\hat{p}_2, \hat{q}_2)}{2\lambda_2 r_1^2}, \quad \phi_2^+ = \frac{1}{2\lambda_2} \ln \frac{r_2}{2\lambda_2}. \end{aligned}$$

Легко также проверить, что в окрестности любой другой прямой $\theta = x - 4\lambda^2 t$, $\lambda > 0$, $\lambda \neq \lambda_1$, $\lambda \neq \lambda_2$ на плоскости (x, t)

$$U(x, t) \rightarrow 0, \quad \text{если } |t| \rightarrow \infty.$$

Таким образом, мы получаем, что $U(x, t)$ распадается в сумму двух солитонов при $|t| \rightarrow \infty$, причем j -й солитон движется со скоростью $4\lambda_j^2$. Сдвиги фаз солитонов $\Delta_j = \phi_j^+ - \phi_j^-$ определяются формулами

$$\Delta_1 = \frac{1}{2\lambda_1} \ln \alpha, \quad \Delta_2 = -\frac{1}{2\lambda_2} \ln \alpha,$$

где α задается выражением (16). Из последних формул легко видеть, что Δ_1 (Δ_2) может быть как положительным (отрицательным), так и отрицательным (положительным), что означает, что солитоны могут взаимодействовать различными способами: медленный солитон может сдвигаться назад, а быстрый – вперед, как это было в скалярном случае [2], и наоборот, медленный солитон может сдвигаться вперед, а быстрый – назад.

Другой замечательной особенностью взаимодействия матричных солитонов является изменение их амплитуд вследствие взаимодействия (см. [6]). При изменении t от $-\infty$ до $+\infty$ амплитуда первого солитона меняется от значения $2\lambda_1^2 P_1$ до $2\lambda_1^2 \hat{P}_1$, а второго – от $2\lambda_2^2 \hat{P}_2$ до $2\lambda_2^2 P_2$. Если $(p_1, q_2) = 0$ ($P_2 P_1 = 0$) или $(p_2, q_1) = 0$ ($P_1 P_2 = 0$), то фазы солитонов не меняются и взаимодействие проявляется лишь как изменение соответствующих амплитуд. Если оба скалярных произведения равны нулю, то солитоны проходят друг через друга без изменений, т.е. они не взаимодействуют (в этом случае $P_1 P_2 = P_2 P_1 = 0$), что соответствует диагонализуемому потенциалу $U(x, t)$ со скалярными 1-солитонами на диагоналях.

Предположим теперь, что спектральные матрицы R_1, R_2 симметричны, т.е. $R_1 = R_1^t$ и $R_2 = R_2^t$. Тогда легко проверить [14], что матрица $U(x, t)$ также симметрична: $U^t(x, t) = U(x, t)$, и потенциал является неособым для любого t . Изменение поляризации солитонов при взаимодействии задается формулами

$$P_1^- = \frac{p_1 \otimes p_1}{|p_1|^2} \rightarrow P_1^+ = \frac{\xi_1 \otimes \xi_1}{|\xi_1|^2}, \quad P_2^- = \frac{\xi_2 \otimes \xi_2}{|\xi_2|^2} \rightarrow P_2^+ = \frac{p_2 \otimes p_2}{|p_2|^2},$$

где

$$\xi_1 = p_2^2 p_1 - \frac{2\lambda_1(p_1, p_2)p_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad \xi_2 = p_1^2 p_2 - \frac{2\lambda_2(p_1, p_2)p_1}{\lambda_1 + \lambda_2},$$

а сдвиги фаз

$$\Delta_1 = \frac{1}{2\lambda_1} \ln \left(\sin^2 \beta + \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^2 \cos^2 \beta \right) < 0$$

и

$$\Delta_2 = -\frac{1}{2\lambda_2} \ln \left(\sin^2 \beta + \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^2 \cos^2 \beta \right) > 0,$$

где $\beta = \angle(p_1, p_2)$, т.е., как и в скалярном случае, медленный солитон сдвигается назад, а быстрый – вперед. Однако в противоположность скалярному случаю [2] солитоны с близкими скоростями не взаимодействуют интенсивно. Если $\lambda_2 \rightarrow \lambda_1 = \lambda$, то

$$\Delta_1 \rightarrow \frac{1}{2\lambda} \ln \sin^2 \beta, \quad \Delta_2 \rightarrow -\frac{1}{2\lambda} \ln \sin^2 \beta \quad (17)$$

и стремятся к бесконечности, если только $\beta = 0$, когда матричный случай сводится к скалярному. Отметим также, что в пределе $\lambda_2 \rightarrow \lambda_1 = \lambda$ решение (15) стремится к решению (13) с $R = R_1 + R_2$, описывающему пару невзаимодействующих параллельных солитонов. Формула (17) означает, что предельные переходы $\lambda_2 \rightarrow \lambda_1$ и $t \rightarrow \pm\infty$ не коммутируют, что, впрочем, имеет место и в скалярном случае.

Общий N -солитонный случай соответствует безотражательному оператору Шредингера с N дискретными собственными значениями $-\lambda_N^2 < \dots < -\lambda_1^2$. Предположим, что соответствующие спектральные матрицы имеют вид

$$R_j = r_j P_j, \quad P_j = \frac{p_j \otimes q_j}{(p_j, q_j)}, \quad j = 1, \dots, N,$$

где p_j, q_j — d -векторы такие, что скалярные произведения $(p_j, q_j) \neq 0$. Аналогично случаю $N = 2$ можно показать, что решение (12) при $t \rightarrow \pm\infty$ распадается в сумму N солитонов с амплитудами $R_j^\pm$, фазами $\phi_j^\pm$ и скоростями $4\lambda_j^2$. Заметим, далее, что в работе [15] была построена иерархия потоков, коммутирующих с потоком матричного уравнения КдФ, и доказано, что они допускают представление Лакса. Действуя одним из высших потоков уравнения КдФ, мы, очевидно, можем добиться того, что при взаимодействии i -го и j -го солитонов остальные солитоны не будут влиять на их взаимодействие. Таким образом, мы приходим к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 2. *При взаимодействии N солитонов матричного уравнения КдФ полный сдвиг фазы $\Delta_j = \phi_j^+ - \phi_j^-$ и полное изменение амплитуды $R_j^- \rightarrow R_j^+$ каждого солитона определяются его попарным взаимодействием с остальными солитонами и не зависят от того, в каком порядке оно происходит. Многочастичные эффекты при солитонном взаимодействии отсутствуют.*

3. МАТРИЧНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДАРБУ И СОЛИТОНЫ

Хорошо известно, что солитонные решения скалярного уравнения КдФ могут быть получены с помощью преобразований Дарбу (см., например, [3]). В матричном случае мы можем использовать общую схему работы [12] для получения решений матричного уравнения КдФ в виде

$$U = -2(Y_n W_n^{-1})', \quad (18)$$

где

$$W = W(\Psi_1, \dots, \Psi_n) = \begin{pmatrix} \Psi_1 & \dots & \Psi_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi_1^{(n-2)} & \dots & \Psi_n^{(n-2)} \\ \Psi_1^{(n-1)} & \dots & \Psi_n^{(n-1)} \end{pmatrix},$$

$$Y = Y(\Psi_1, \dots, \Psi_n) = \begin{pmatrix} \Psi_1 & \dots & \Psi_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi_1^{(n-2)} & \dots & \Psi_n^{(n-2)} \\ \Psi_1^{(n)} & \dots & \Psi_n^{(n)} \end{pmatrix},$$

$Y_n = |Y|_{nn}$, $W_n = |W|_{nn}$, а матричные функции $\Psi_1, \dots, \Psi_n$ являются столбцами $(d \times nd)$ -матрицы Φ , удовлетворяющей уравнению

$$\Phi'' = \Phi C, \quad (19)$$

причем постоянная $(nd \times nd)$ -матрица C имеет диагональный вид

$$C = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 I_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 I_2 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_N^2 I_N \end{pmatrix},$$

где I_k – единичные матрицы размера $(n_k \times n_k)$ и $\sum_{k=1}^N n_k = nd$. Оператор $L = -D^2 + U$ с потенциалом (18) связан матричным преобразованием Дарбу с $L_0 = -D^2$, т.е. существует матричный дифференциальный оператор A порядка n , сплетающий $L = -D^2 + U$ и $L_0 = -D^2$ (см. [12]):

$$LA = AL_0.$$

Зависимость от времени задается уравнением (см. [3], [13]) $\Phi_t = -4D^3\Phi$, т.е. функции Ψ_j имеют вид

$$\Psi_j = P_j e^{\Lambda_j x - 4\Lambda_j^3 t} + Q_j e^{-\Lambda_j x + 4\Lambda_j^3 t},$$

где P_j, Q_j – постоянные матрицы, а $\Lambda_j, j = 1, \dots, n$, являются положительно определенными $(d \times d)$ -матрицами, которые получаются из представления C в виде

$$C = \begin{pmatrix} \Lambda_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Lambda_2^2 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \Lambda_n^2 \end{pmatrix}.$$

Как недостаток метода Дарбу следует упомянуть сложность контроля за симметричностью соответствующего решения.

Рассмотрим теперь простейший нетривиальный случай, когда A является оператором первого порядка. Тогда $C = \Lambda^2$, $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1 I_1, \dots, \lambda_N I_N)$ и $\sum_{k=1}^N n_k = d$. Уравнение (19) может быть записано в виде $\Psi'' = \Psi\Lambda^2$. Тогда

$$\Psi = P e^{\Lambda x} + Q e^{-\Lambda x}, \quad (20)$$

где P и Q – произвольные матрицы (мы будем предполагать, что они невырождены) и

$$U = -2(\Psi'\Psi^{-1})'. \quad (21)$$

Для сравнения решения (21) с многосолитонными решениями, обсуждавшимися ранее, вычислим спектральные данные (λ_j, R_j) через параметры преобразований Дарбу (Λ, P, Q) . Заметим, что

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \Psi'\Psi^{-1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\Psi' e^{-\Lambda x})(\Psi e^{-\Lambda x})^{-1} = P\Lambda P^{-1}, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \Psi'\Psi^{-1} &= -Q\Lambda Q^{-1}. \end{aligned} \quad (22)$$

Используя квазидетерминантную формулу (см. [12], [13]) для оператора A , легко проверить, что

$$\Phi_1(x, k) = \begin{vmatrix} \Psi & Ie^{ikx} \\ \Psi' & ikIe^{ikx} \end{vmatrix}_{22} = (ikI - \Psi'\Psi^{-1})e^{ikx}$$

и

$$\Phi_2(x, k) = \begin{vmatrix} \Psi & Ie^{-ikx} \\ \Psi' & -ikIe^{-ikx} \end{vmatrix}_{22} = -(ikI + \Psi'\Psi^{-1})e^{-ikx}$$

являются решениями уравнения

$$L\Phi = k^2\Phi, \quad L = -D^2 + U(x), \quad (23)$$

а из формул (22) заключаем, что решения Йоста уравнения (23) имеют вид

$$\begin{aligned} F(x, k) &= \Phi_1(x, k)P(ikI - \Lambda)^{-1}P^{-1}e^{ikx}, \\ G(x, k) &= \Phi_2(x, k)Q(ikI - \Lambda)^{-1}Q^{-1}e^{-ikx}. \end{aligned}$$

Так как $\Phi_1(x, k) = \Phi_2(x, -k)$ (потенциал (21), очевидно, безотражательный), то

$$A(k) = F^{-1}(x, -k)G(x, k) = P(ikI + \Lambda)P^{-1}Q(ikI - \Lambda)^{-1}Q^{-1}$$

и

$$\det A(k) = \frac{\det(ikI + \Lambda)}{\det(ikI - \Lambda)}.$$

Таким образом, дискретный спектр оператора L с потенциалом (21) состоит из точек $-\lambda_j^2$, где λ_j — собственные значения матрицы Λ , и (21) является N -солитонным решением матричного уравнения КдФ.

Спектральные данные R_j определяются условиями (6),

$$(-\lambda_j I + \Psi'\Psi^{-1})e^{\lambda_j x} P(\text{Res}_{k=i\lambda_j}(ikI + \Lambda)^{-1})P^{-1} = F(x, k_j)R_j.$$

Так как $F(x, i\lambda_j) = (I + o(1))e^{-\lambda_j x}$, когда $x \rightarrow +\infty$, то, рассматривая последнее выражение в пределе $x \rightarrow +\infty$, мы получаем

$$R_j = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(-\lambda_j I + \Psi'\Psi^{-1})PP_jP^{-1}e^{2\lambda_j x}], \quad (24)$$

где $P_j = \text{Res}_{k=i\lambda_j}(ikI + \Lambda)^{-1} = \text{diag}(0, \dots, 0, I_j, 0, \dots, 0)$ суть проекторы на собственные подпространства, соответствующие собственным значениям λ_j матрицы Λ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Спектральные данные R_j оператора Шредингера L с потенциалом (21) выражаются через параметры преобразований Дарбу формулами

$$R_j = Pf(\lambda_j)P^{-1}QP_jP^{-1},$$

где $f(\lambda) = \lambda I + \Lambda$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы можем переписать (24) в виде

$$R_j = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(-\lambda_j \Psi - \Psi')(P^{-1} \Psi)^{-1} P_j P^{-1} e^{2\lambda_j x}].$$

Тогда

$$(P^{-1} \Psi)^{-1} = e^{-\Lambda x} (I + P^{-1} Q e^{-2\Lambda x})^{-1} = e^{-\Lambda x} (I - P^{-1} Q e^{-2\Lambda x} + \dots)$$

и прямым вычислением, использующим коммутативность P_j , $j = 1, \dots, N$, мы приходим к доказательству предложения.

Предложение 2 можно использовать для нахождения условий на параметры преобразования Дарбу, гарантирующих симметричность потенциала. Действительно, потенциал (21) симметричен тогда и только тогда, когда симметричны спектральные матрицы R_j , $j = 1, \dots, N$: $R_j^t = R_j$, что может быть записано в виде

$$P f(\lambda_j) P^{-1} Q P_j P^{-1} = (P^t)^{-1} P_j Q^t (P^{-1})^t f(\lambda_j) P^t. \quad (25)$$

Легко проверить, что

$$Q = \sum_{j=1}^N P f^{-1}(\lambda_j) (P^t P)^{-1} P_j \quad (26)$$

являются решениями (25). Используя предложение 2, мы получаем следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Потенциал (21) симметричен, если матрицы Q определяются через P по формулам (26). Тогда

$$R_j = (P^t)^{-1} P_j P^{-1}.$$

ПРИМЕР. Рассмотрим случай $d = 2$, $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Потенциал (21) удовлетворяет матричному уравнению КдФ, если

$$\Psi = P(t) e^{\Lambda x} + Q(t) e^{-\Lambda x}, \quad P(t) = P e^{-4\Lambda^3 t}, \quad Q(t) = Q e^{4\Lambda^3 t}$$

и

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}.$$

Предположим, что $\det P \neq 0$, $\det Q \neq 0$, и введем

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & q_{12} \\ p_{21} & q_{22} \end{pmatrix}, \quad \hat{Q} = \begin{pmatrix} q_{11} & p_{12} \\ q_{21} & p_{22} \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, используя предложение 3 и пример 2 раздела 2, что сдвиги фаз могут быть выражены через параметры матричных преобразований Дарбу формулами

$$\Delta_1 = \frac{1}{2\lambda_1} \ln \frac{\det \hat{P} \det \hat{Q}}{\det P \det Q}, \quad \Delta_2 = \frac{1}{2\lambda_2} \ln \frac{\det P \det Q}{\det \hat{P} \det \hat{Q}}. \quad (27)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \det \Psi = & e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x - 4(\lambda_1^3 + \lambda_2^3)t} \det P + e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x - 4(\lambda_1^3 - \lambda_2^3)t} \det \widehat{P} + \\ & + e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x + 4(\lambda_1^3 - \lambda_2^3)t} \det \widehat{Q} + e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)x + 4(\lambda_1^3 + \lambda_2^3)t} \det Q, \end{aligned}$$

и потенциал $U(x, t)$ регулярен, если $\det \Psi \neq 0$ для любого x , что выполнено при

$$\det P > 0, \quad \det \widehat{P} > 0, \quad \det Q > 0, \quad \det \widehat{Q} > 0. \quad (28)$$

Введем векторы $e_1 = (p_{11}, p_{21})$, $e_2 = (p_{12}, p_{22})$, $e_3 = (q_{11}, q_{21})$, $e_4 = (q_{12}, q_{22})$ и углы между ними $\alpha = \angle(e_1, e_3)$, $\beta = \angle(e_1, e_2)$, $\gamma = \angle(e_1, e_4)$. Тогда условия регулярности (28) эквивалентны одному из условий $0 < \alpha < \beta < \gamma < \pi$ или $0 < \alpha < \gamma < \beta < \pi$ и

$$\frac{\det \widehat{P} \det \widehat{Q}}{\det P \det Q} = \frac{\sin(\beta - \alpha) \sin \gamma}{\sin \beta \sin(\gamma - \alpha)} = \frac{\cos \alpha - \sin \alpha \operatorname{ctg} \beta}{\cos \alpha - \sin \alpha \operatorname{ctg} \gamma}.$$

Из этой формулы видно, что если $\beta < \gamma$, то $\Delta_1 < 0$ ($\Delta_2 > 0$), а если $\beta > \gamma$, то $\Delta_1 > 0$ ($\Delta_2 < 0$).

Благодарности. Автор хотел бы выразить свою искреннюю благодарность профессору А. П. Веселову за постановку задачи, частично решенной в этой работе, и многочисленные дискуссии. Работа была поддержана грантами университета Лафборо и INTAS 96-1770.

Список литературы

- [1] C. Gardner, J. Green, M. Kruskal, R. Miura. Phys. Rev. Lett. 1967. V. 19. P. 1095.
- [2] В. Е. Захаров, С. В. Мананов, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский. Теория солитонов: Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.
- [3] V. B. Matveev, M. A. Salle. Darboux Transformations and Solitons. Berlin: Springer, 1991.
- [4] P. D. Lax. Commun. Pure and Appl. Math. 1968. V. 21. P. 467.
- [5] M. Wadati, T. Kamijo. Prog. Theor. Physics. 1974. V. 52. P. 397.
- [6] F. Calogero, A. Degasperis. Nuovo Cimento. 1977. V. 39B. № 1. P. 1.
- [7] A. Degasperis. Solitons, boomerons, trappons. In: Nonlinear Evolutional Equations Solvable by Spectral Transform. Research Notes in Math. V. 26. Ed. F. Calogero. London: Pitman Publishing, 1978. P. 97.
- [8] L. Martinez Alonso, E. Olmedilla. J. Math. Phys. 1982. V. 23. № 11. P. 2116.
- [9] E. Olmedilla. Inverse Problem. 1985. V. 1. P. 219.
- [10] И. М. Гельфанд, В. С. Ремах. Функц. анализ и его прилож. 1991. Т. 25. № 2. С. 13.
- [11] В. М. Гончаренко. УМН. 2000. Т. 55. № 5. С. 175–176.
- [12] V. M. Goncharenko, A. P. Veselov. J. Phys. A. 1998. V. 31. P. 5315.
- [13] P. Etingof, I. Gelfand, V. Retakh. Math. Res. Lett. 1997. V. 4. № 2–3. P. 413; q-alg/9701008.
- [14] З. С. Агранович, В. А. Марченко. Обратная задача теории рассеяния. Харьков: Изд-во Харьковского ун-та, 1960.
- [15] E. Olmedilla, L. Martinez Alonso, F. Guil. Nuovo Cimento B. 1981. V. 61. № 1. P. 49.

Поступила в редакцию 5.VII.2000 г.