Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Павлов, Неконформное скалярное поле в однородном изотропном пространстве и метод диагонализации гамильтониана, *ТМФ*, 2001, том 126, номер 1, 115–124

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf418>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 06:36:29

НЕКОНФОРМНОЕ СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ В ОДНОРОДНОМ ИЗОТРОПНОМ ПРОСТРАНСТВЕ И МЕТОД ДИАГОНАЛИЗАЦИИ ГАМИЛЬТониАНА

Проведена диагонализация метрического гамильтониана скалярного поля с произвольной связью с кривизной в N -мерном однородном изотропном пространстве. Получен спектр энергий соответствующих квазичастиц. Вычислены энергии квазичастиц, соответствующих диагональной форме канонического гамильтониана. Построен модифицированный тензор энергии-импульса, обладающий следующими свойствами. Для конформного скалярного поля он совпадает с метрическим тензором энергии-импульса. При его диагонализации энергии соответствующих частиц неконформного поля равны осцилляторной частоте и число таких частиц, рождающихся в нестационарной метрике, конечно. Показано, что гамильтониан, вычисляемый по модифицированному тензору энергии-импульса, может быть получен как канонический при определенном выборе переменных.

1. ВВЕДЕНИЕ

Квантовая теория поля в искривленном пространстве-времени в настоящее время является достаточно глубоко разработанной областью теоретической физики (см. монографии [1], [2]), представляющей интерес в связи с актуальными приложениями к космологии и астрофизике. Вместе с тем в этой теории имеется ряд традиционных проблем, до сих пор окончательно не решенных. Одной из таких проблем является определение понятия элементарной частицы в искривленном пространстве-времени. Это обусловлено отсутствием в искривленном пространстве группы локальных симметрий, подобной группе Пуанкаре в пространстве Минковского. Даже в случае однородного изотропного пространства определение вакуумного состояния и состояний частиц для неконформного скалярного поля интенсивно обсуждается в настоящее время [3]–[5]. Следствием различного определения вакуумных состояний является различие вычисляемых квантовых характеристик неконформного скалярного поля в искривленном пространстве.

В работах [6], [7] было показано, что в случае произвольной связи скалярного поля с кривизной добавочные неконформные вклады являются доминирующими в вакуумных средних тензора энергии-импульса. Следует также отметить, что исследование

*Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: pavlov@ipme.ru

неконформного скалярного поля представляет не только самостоятельный интерес. Оно обусловлено невозможностью сохранить конформную инвариантность не только эффективного действия, но и просто действия в случае взаимодействующего квантованного поля [2].

При определении понятия вакуума и формулировке задачи о рождении частиц в искривленном пространстве-времени широко применяются следующие два подхода: метод диагонализации гамильтониана [1], впервые предложенный в работах [8], [9], и так называемый адиабатический подход [2], предложенный в работе [10]. Если считать, что частице соответствует квант энергии, то согласно квантовой механике наблюдение частиц в некоторый момент времени означает нахождение собственного состояния гамильтониана. Это автоматически учитывается в методе диагонализации. Однако использование гамильтониана, построенного по метрическому тензору энергии-импульса, успешное для конформного случая [1], для неконформного скалярного поля привело в методе диагонализации к трудностям, связанным с бесконечностью числа рождающихся квазичастиц [11]. В то же время существенные проблемы и неоднозначности имеют место и в адиабатическом подходе [5].

В предлагаемой статье исследуется метод диагонализации гамильтониана для скалярного поля с произвольной связью с кривизной в однородном изотропном пространстве N измерений. Проведение вычислений для нахождения вакуумного состояния и определения состояний квазичастиц в N -мерном пространстве-времени является необходимым, в частности, при применении в дальнейшем метода размерной регуляризации. В разделе 2 излагаются необходимые сведения и проведено квантование неконформного скалярного поля в N -мерном однородном изотропном пространстве. В разделе 3 проведена диагонализация метрического гамильтониана неконформного скалярного поля, найдены энергии соответствующих частиц и исследуются условия, налагаемые требованием диагональности метрического гамильтониана. В разделе 4 метод диагонализации применен для канонического гамильтониана, построен модифицированный тензор энергии-импульса такой, что квазичастицы, получаемые диагонализацией соответствующего гамильтониана, имеют энергии, совпадающие с осцилляторной частотой волнового уравнения. Доказывается, что число таких частиц, рождающихся в нестационарной метрике, конечно. В разделе 5 показано, что гамильтониан, полученный из модифицированного тензора энергии-импульса, может быть построен как канонический при определенном выборе канонических переменных, и суммируются результаты проведенного исследования.

В статье используется система единиц, в которой $\hbar = c = 1$.

2. КВАНТОВАНИЕ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ В ОДНОРОДНОМ ИЗОТРОПНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрим комплексное скалярное поле массы m с уравнением движения

$$(\nabla_i \nabla^i + \xi R + m^2)\varphi(x) = 0, \quad (1)$$

где ∇_i – ковариантные производные, R – скалярная кривизна, $x = (t, \mathbf{x})$, ξ – константа связи с кривизной. В пространстве-времени размерности N значение $\xi = \xi_c =$

$(N-2)/[4(N-1)]$ соответствует конформной связи ($\xi_c = 1/6$ при $N = 4$). При $\xi = \xi_c$ и $m = 0$ уравнение (1) является конформно-инвариантным. Значение $\xi = 0$ соответствует случаю минимальной связи.

Метрика N -мерного однородного изотропного пространства имеет вид

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k = dt^2 - a^2(t) dl^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - dl^2), \quad (2)$$

где $dl^2 = \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ — метрика $(N-1)$ -мерного пространства постоянной кривизны $K = 0, \pm 1$.

Уравнение (1) может быть получено варьированием действия с лагранжианом

$$L(x) = \sqrt{|g|} [g^{ik} \partial_i \phi^* \partial_k \phi - (m^2 + \xi R) \phi^* \phi], \quad (3)$$

где $g = \det(g_{ik})$.

Канонический тензор энергии-импульса скалярного поля есть

$$T_{ik}^{\text{can}} = \partial_i \phi^* \partial_k \phi + \partial_k \phi^* \partial_i \phi - g_{ik} |g|^{-\frac{1}{2}} L(x). \quad (4)$$

Метрический тензор энергии-импульса, получаемый варьированием действия по метрике, имеет вид [12]

$$T_{ik} = T_{ik}^{\text{can}} - 2\xi [R_{ik} + \nabla_i \nabla_k - g_{ik} \nabla_j \nabla^j] \phi^* \phi, \quad (5)$$

где R_{ik} — тензор Риччи.

В метрике (2) уравнение (1) может быть записано следующим образом:

$$\phi'' + (N-2) \frac{a'}{a} \phi' - \Delta_{N-1} \phi + (m^2 + \xi R) a^2 \phi = 0, \quad (6)$$

где Δ_{N-1} — оператор Лапласа–Бельтрами в $(N-1)$ -мерном пространстве, а штрих означает производную по конформному времени η .

Для функции $\tilde{\phi} = a^{(N-2)/2} \phi$ уравнение (6) принимает форму, не содержащую первую производную по времени,

$$\tilde{\phi}'' - \Delta_{N-1} \tilde{\phi} + \left(m^2 a^2 - \Delta \xi a^2 R + \left(\frac{N-2}{2} \right)^2 K \right) \tilde{\phi} = 0, \quad (7)$$

где $\Delta \xi = \xi_c - \xi$. Переменные в уравнениях (6), (7) могут быть разделены. А именно, для $\tilde{\phi} = g_\lambda(\eta) \Phi_J(\mathbf{x})$ получим

$$g_\lambda''(\eta) + \Omega^2(\eta) g_\lambda(\eta) = 0, \quad (8)$$

$$\Delta_{N-1} \Phi_J = - \left(\lambda^2 - \left(\frac{N-2}{2} \right)^2 K \right) \Phi_J, \quad (9)$$

где $\Omega(\eta)$ – осцилляторная частота

$$\Omega^2(\eta) = m^2 a^2 + \lambda^2 - \Delta \xi a^2 R, \quad (10)$$

J – набор индексов (квантовых чисел), нумерующих собственные функции оператора Лапласа–Бельтрами. Отметим, что из неотрицательности собственных значений оператора $-\Delta_{N-1}$ следует неравенство $\lambda^2 - ((N-2)/2)^2 K \geq 0$.

Для квантования разложим поле $\tilde{\phi}(x)$ по полной системе решений уравнения (7)

$$\tilde{\phi}(x) = \int d\mu(J) [\tilde{\phi}_{\bar{J}}^{(-)} a_{\bar{J}}^{(-)} + \tilde{\phi}_J^{(+)} a_J^{(+)}], \quad (11)$$

где $d\mu(J)$ – мера в пространстве собственных значений оператора Лапласа–Бельтрами Δ_{N-1} ,

$$\tilde{\phi}_J^{(+)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} g_\lambda(\eta) \Phi_J^*(\mathbf{x}), \quad \tilde{\phi}_{\bar{J}}^{(-)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} g_\lambda^*(\eta) \Phi_{\bar{J}}(\mathbf{x}), \quad (12)$$

$\Phi_J(\mathbf{x})$ – ортонормированные собственные функции оператора Δ_{N-1} , $\bar{J}$ – совокупность квантовых чисел функции, комплексно сопряженной функции Φ_J . В $(N-1)$ -мерных сферических координатах для $J = \{\lambda, l, \dots, m\}$ имеем $\bar{J} = \{\lambda, l, \dots, -m\}$.

Подставляя разложение (11) в выражение для сохраняющегося заряда

$$Q = i \int_{\Sigma} (\tilde{\phi}^* \partial_0 \tilde{\phi} - (\partial_0 \tilde{\phi}^*) \tilde{\phi}) \sqrt{\gamma} d^{N-1}x, \quad (13)$$

где $\gamma = \det(\gamma_{\alpha\beta})$, Σ – пространственноподобная гиперповерхность $\eta = \text{const}$, и налагая условие нормировки

$$g_\lambda g_{\lambda'}^{*'} - g_{\lambda'}' g_\lambda^* = -2i, \quad (14)$$

получим

$$Q = \int d\mu(J) \left(a_J^{(+)*} a_J^{(-)} - a_{\bar{J}}^{(-)*} a_{\bar{J}}^{(+)} \right). \quad (15)$$

Метрический гамильтониан выражается через метрический тензор энергии-импульса (5) с помощью равенства [1]

$$\begin{aligned} H(\eta) &= \int_{\Sigma} \zeta^i T_{ik}(x) d\sigma^k = \int_{\eta=\text{const}} \zeta^0 T_{00}(x) g^{00} \sqrt{|g|} d^{N-1}x = \\ &= a^{N-2}(\eta) \int_{\eta=\text{const}} T_{00}(x) \sqrt{\gamma} d^{N-1}x, \end{aligned} \quad (16)$$

где $\zeta^i = (1, 0, \dots, 0)$ – времениподобный конформный вектор Киллинга.

Квантование осуществляется наложением коммутационных соотношений

$$\left[a_J^{(-)}, a_{J'}^{(+)*} \right] = \left[a_J^{*(-)}, a_{J'}^{(+)} \right] = \delta_{JJ'}, \quad \left[a_J^{(\pm)}, a_{J'}^{(\pm)} \right] = \left[a_J^{*(\pm)}, a_{J'}^{*(\pm)} \right] = 0. \quad (17)$$

Гамильтониан (16) может быть выражен через операторы $a_J^{(\pm)}, a_J^{*(\pm)}$ следующим образом:

$$H(\eta) = \int d\mu(J) \left\{ E_J(\eta) (a_J^{*(+)} a_J^{(-)} + a_J^{*(-)} a_J^{(+)}) + F_J(\eta) a_J^{*(+)} a_J^{(+)} + F_J^*(\eta) a_J^{*(-)} a_J^{(-)} \right\}, \quad (18)$$

где

$$E_J(\eta) = \frac{1}{2} \{ |g'_\lambda|^2 + D_\lambda(\eta) |g_\lambda|^2 - Q(\eta) (|g_\lambda|^2)' \}, \quad (19)$$

$$F_J(\eta) = \frac{(-1)^m}{2} \{ g_\lambda'^2 + D_\lambda(\eta) g_\lambda^2 - Q(\eta) (g_\lambda^2)' \}, \quad (20)$$

$$D_\lambda(\eta) = m^2 a^2 + \lambda^2 + \Delta \xi (N-1)(N-2)(c^2 - K), \quad (21)$$

$$Q(\eta) = 2\Delta \xi (N-1)c, \quad (22)$$

$$c = a'(\eta)/a(\eta).$$

3. ДИАГОНАЛИЗАЦИЯ МЕТРИЧЕСКОГО ГАМИЛЬТониАНА

Метрический гамильтониан (18) будет диагональным в начальный момент времени η_0 в терминах операторов $a_J^{(\pm)}, a_J^{*(\pm)}$, имеющих в этом случае смысл операторов рождения и уничтожения частиц и античастиц, если $F_J(\eta_0) = 0$. Используя соотношения (20)–(22), можно проверить, что это условие совместно с нормировкой (14) только при $p_\lambda^2(\eta_0) > 0$, где

$$p_\lambda(\eta) = \sqrt{m^2 a^2(\eta) + \lambda^2 + 4\Delta \xi (N-1)^2 (\xi c^2 - \xi_c K)}. \quad (23)$$

Требование диагональности гамильтониана в момент времени η_0 , т.е. $F_J(\eta_0) = 0$, с учетом нормировки приводит к следующим начальным условиям на функции $g_\lambda(\eta_0)$:

$$g'_\lambda(\eta_0) = (2\Delta \xi (N-1)c + ip_\lambda(\eta_0))g_\lambda(\eta_0), \quad |g_\lambda(\eta_0)| = \frac{1}{\sqrt{p_\lambda(\eta_0)}}. \quad (24)$$

Вакуумное состояние $|0\rangle$, соответствующее условиям (24), определяется стандартным образом:

$$a_J^{(-)}|0\rangle = a_J^{*(-)}|0\rangle = 0. \quad (25)$$

Диагонализация гамильтониана для произвольного момента времени η осуществляется в терминах операторов $b_J^{(\pm)}, b_J^{*(\pm)}$, связанных с $a_J^{(\pm)}, a_J^{*(\pm)}$ зависящими от времени бoголюбовскими преобразованиями:

$$\begin{aligned} a_J^{(-)} &= \alpha_J(\eta) b_J^{(-)}(\eta) - (-1)^m \beta_J^*(\eta) b_J^{(+)}(\eta), \\ a_J^{*(-)} &= \alpha_J^*(\eta) b_J^{*(-)}(\eta) - (-1)^m \beta_J(\eta) b_J^{(+)}(\eta), \end{aligned} \quad (26)$$

где функции $\alpha_J(\eta), \beta_J(\eta)$ удовлетворяют начальным условиям $|\alpha_J(\eta_0)| = 1, \beta_J(\eta_0) = 0$ и тождеству

$$|\alpha_J(\eta)|^2 - |\beta_J(\eta)|^2 = 1. \quad (27)$$

Заметим, что при однородности и изотропии пространства $\alpha_J = \alpha_\lambda$, $\beta_J = \beta_\lambda$ [1].

Подставляя разложение (26) в (18) и требуя обращения в нуль коэффициентов при недиагональных членах $b_J^{*(\pm)} b_J^{(\pm)}$, приходим к равенству

$$2(-1)^{m+1} \alpha_J \beta_J E_J + F_J \alpha_J^2 + F_J^* \beta_J^2 = 0. \quad (28)$$

Можно показать, что условие (28) совместно с нормировкой (14) только в случае $p_\lambda^2(\eta) > 0$. При этом

$$|\beta_J|^2 = \frac{E_J}{2p_\lambda} - \frac{1}{2} = \frac{|F_J|^2}{2p_\lambda(E_J + p_\lambda)}. \quad (29)$$

При выводе (29) учтено равенство, допускающее непосредственную проверку,

$$E_J^2 - |F_J|^2 = p_\lambda^2(\eta) \left[-\frac{1}{4} (g_\lambda g_\lambda^{*'} - g_\lambda' g_\lambda^*)^2 \right] \quad (30)$$

(множитель в квадратных скобках равен 1 при выполнении условия нормировки (14)).

При выполнении (28) и $p_\lambda^2(\eta) > 0$ метрический гамильтониан имеет вид

$$H(\eta) = \int d\mu(J) p_\lambda(\eta) \left(b_J^{*(+)} b_J^{(-)} + b_J^{*(-)} b_J^{(+)} \right). \quad (31)$$

Таким образом, $p_\lambda(\eta)$ имеет смысл энергии квазичастиц, соответствующих диагональной форме метрического гамильтониана. Для случая пространства-времени размерности 4 выражение (23) соответствует значениям энергий, полученным ранее в [3] и [13].

Энергия $p_\lambda(\eta)$ квазичастиц отличается от осцилляторной частоты $\Omega(\eta)$ волнового уравнения для неконформного поля. Это приводит к ряду проблем. Так, условия $p_\lambda^2(\eta) > 0$ и $\Omega^2(\eta) > 0$ могут быть для неконформного поля несовместными. Например, в случае квазиевклидова пространства ($K = 0$) и безмассового поля условие $p_\lambda^2(\eta) > 0$ (в случае произвольных λ) приводит к тому, что $\xi \in [0, \xi_c]$. Однако при $\xi < \xi_c$, $m = 0$ и $R > 0$ для малых λ получим $\Omega^2(\eta) < 0$.

Необходимо отметить, что при $p_\lambda^2(\eta) < 0$ требование диагональности приводит к равенству нулю нормы, энергии, заряда и импульса соответствующих состояний, у которых $\phi(x) \neq 0$, что не имеет физического обоснования.

Вакуумное состояние, определяемое равенствами

$$b_J^{(-)} |0_\eta\rangle = b_J^{*(-)} |0_\eta\rangle = 0, \quad (32)$$

в случае нестационарной метрики оказывается зависящим от времени. При начальных условиях (24) $b_J^{(\pm)}(\eta_0) = a_J^{(\pm)}$ и $|0_{\eta_0}\rangle = |0\rangle$. В гейзенберговской картине состояние $|0\rangle$, являющееся вакуумным в момент времени η_0 , при $\eta \neq \eta_0$ таковым не является. Оно содержит в каждой моде $|\beta_J(\eta)|^2$ пар квазичастиц, отвечающих операторам $b_J^{*(\pm)}$, $b_J^{(\pm)}$ [1]. Число рожденных пар квазичастиц в единице объема пространства (в случае $N = 4$)

$$n(\eta) = \frac{1}{2\pi^2 a^3(\eta)} \int d\mu(J) |\beta_\lambda(\eta)|^2. \quad (33)$$

При диагонализации метрического гамильтониана неконформного поля плотность числа рожденных в нестационарной метрике частиц (33) бесконечна [11]. В этом можно убедиться исходя из асимптотического при $\lambda \rightarrow \infty$ поведения решений уравнения (8) и соотношения (29).

4. ДИАГОНАЛИЗАЦИЯ КАНОНИЧЕСКОГО ГАМИЛЬТониАНА И МОДИФИЦИРОВАННЫЙ ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА

Гамильтониан, соответствующий каноническому тензору энергии-импульса (4), может быть записан в виде (18) с заменой соотношений (21) и (22) на соотношения

$$D_\lambda(\eta) = m^2 a^2 + \lambda^2 + (N-1)(N-2)((\xi + \xi_c)c^2 - \Delta \xi K) + 2\xi(N-1)c', \quad (34)$$

$$Q(\eta) = \frac{1}{2}c(N-2). \quad (35)$$

Поэтому процедура диагонализации канонического гамильтониана может быть проведена аналогично случаю метрического гамильтониана, рассмотренному в разделе 3 с учетом переопределения функций $D_\lambda(\eta)$ и $Q(\eta)$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что теперь требование диагональности гамильтониана совместно с нормировкой (14) только в случае $p_{\text{can},\lambda}^2(\eta) > 0$, где

$$p_{\text{can},\lambda}(\eta) = \sqrt{(m^2 + \xi R)a^2(\eta) + \lambda^2 - \left(\frac{N-2}{2}\right)^2 K}. \quad (36)$$

Начальные условия, соответствующие диагональной форме канонического гамильтониана для $\eta = \eta_0$, при $p_{\text{can},\lambda}^2(\eta_0) > 0$ и учете нормировки (14) имеют вид

$$g'_\lambda(\eta_0) = \left((N-2)\frac{c}{2} + ip_{\text{can},\lambda}(\eta_0)\right)g_\lambda(\eta_0), \quad |g_\lambda(\eta_0)| = \frac{1}{\sqrt{p_{\text{can},\lambda}(\eta_0)}}. \quad (37)$$

Поскольку для канонического гамильтониана при $p_{\text{can},\lambda}^2(\eta) > 0$ справедливо выражение (31) с заменой $p_\lambda \rightarrow p_{\text{can},\lambda}$, то функции $p_{\text{can},\lambda}(\eta)$ имеют смысл энергий квазичастиц, соответствующих диагональной форме канонического гамильтониана. Отметим, что энергии $p_{\text{can},\lambda}(\eta)$, как и в случае метрического гамильтониана, отличаются от осцилляторной частоты $\Omega(\eta)$.

Рассмотрим вопрос о плотности пар рожденных в нестационарной метрике квазичастиц, возникающий в связи с диагонализацией канонического гамильтониана. Для асимптотики решений уравнения (8) (см. [14]), нормированных в соответствии с условием (14), из соотношений (19), (20) и (34), (35) можно получить, что при $\lambda \rightarrow \infty$, $E_J \sim \lambda$ и для нестационарной метрики $|F_J(\eta)| \sim |Q(\eta)|$. Поэтому в соответствии с формулой (29), справедливой в данном случае при замене $p_\lambda \rightarrow p_{\text{can},\lambda}$, получим $|\beta_\lambda|^2 \sim \lambda^{-2}$. Следовательно, плотность рожденных квазичастиц, пропорциональная интегралу в (33), бесконечна.

Таким образом, в методе диагонализации как для метрического, так и для канонического гамильтониана в случае неконформного скалярного поля возникает проблема бесконечного числа рожденных в нестационарной метрике квазичастиц. В обоих случаях энергии соответствующих квазичастиц отличаются от осцилляторной частоты волнового уравнения. Далее будет показано, что эти трудности отсутствуют для гамильтониана, соответствующего модифицированному тензору энергии-импульса

$$T_{ik}^{\text{mod}} = T_{ik}^{\text{can}} - 2\xi_c[R_{ik} + \nabla_i \nabla_k - g_{ik} \nabla_j \nabla^j] \phi^* \phi. \quad (38)$$

Из определения (38) видно, что для конформного скалярного поля (т.е. при $\xi = \xi_c$) тензор T_{ik}^{mod} совпадает с метрическим тензором энергии-импульса (5). Гамильтониан, построенный по T_{ik}^{mod} аналогично (16), имеет вид

$$H^{\text{mod}}(\eta) = \int d^{N-1}x \sqrt{\gamma} \left\{ \tilde{\phi}^{*\prime} \tilde{\phi}' + \gamma^{\alpha\beta} \partial_\alpha \tilde{\phi}^* \partial_\beta \tilde{\phi} + \left[m^2 a^2 - \Delta \xi a^2 R + \left(\frac{N-2}{2} \right)^2 K \right] \right\} \tilde{\phi}^* \tilde{\phi}. \quad (39)$$

Он может быть представлен в форме (18), но в данном случае $Q(\eta) = 0$ и $D_\lambda(\eta) = \Omega^2(\eta)$. Диагонализуя его по операторам $b_J^{(\pm)}$, $b_J^{(\pm)}$, получим формулу (31) с заменой $p_\lambda \rightarrow \Omega$. При этом осцилляторная частота $\Omega(\eta)$ имеет смысл энергии соответствующих частиц. Начальными условиями на функции $g_\lambda(\eta)$, при которых гамильтониан диагонален в момент времени η_0 по операторам $a_J^{(\pm)}$, $a_J^{(\pm)}$ (17), являются условия

$$g'_\lambda(\eta_0) = i\Omega(\eta_0)g_\lambda(\eta_0), \quad |g_\lambda(\eta_0)| = \frac{1}{\sqrt{\Omega(\eta_0)}}. \quad (40)$$

Они совпадают при фиксации фазы $\arg g_\lambda(\eta_0) = 0$ с начальными условиями, используемыми в работе [7], а в случае радиационно-доминирующего фона ($R = 0$) с условиями, используемыми в [6], [15].

Покажем, что плотность числа рожденных в нестационарной метрике частиц, соответствующих диагональной форме построенного по тензору T_{ik}^{mod} гамильтониана, конечна. Для этого найдем асимптотику при $\lambda \rightarrow \infty$ функции $|\beta_\lambda(\eta)|^2$. Функции $\beta_\lambda(\eta)$ и $\alpha_\lambda(\eta)$, являющиеся решениями уравнения (28) и удовлетворяющие тождеству (27), могут быть найдены в форме

$$\beta_\lambda(\eta) = \frac{i}{2} \frac{e^{i\Theta(\eta_0, \eta)}}{\sqrt{\Omega}} (g'(\eta) - i\Omega g(\eta)), \quad (41)$$

$$\alpha_\lambda(\eta) = \frac{i}{2} \frac{e^{i\Theta(\eta_0, \eta)}}{\sqrt{\Omega}} (g^{*\prime}(\eta) - i\Omega g^*(\eta)), \quad (42)$$

где

$$\Theta(\eta_1, \eta_2) = \int_{\eta_1}^{\eta_2} \Omega(\eta) d\eta.$$

Вследствие равенств (41), (42) и уравнения (8) функции $s_\lambda(\eta) = |\beta_\lambda(\eta)|^2$ и $f_\lambda(\eta) = 2\alpha_\lambda(\eta)\beta_\lambda(\eta) \exp[-2i\Theta(\eta_0, \eta)]$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} s'_\lambda(\eta) &= \frac{\Omega'}{2\Omega} \text{Re } f_\lambda(\eta), \\ f'_\lambda(\eta) + 2i\Omega f_\lambda(\eta) &= \frac{\Omega'}{\Omega} (1 + 2s_\lambda(\eta)). \end{aligned} \quad (43)$$

С учетом начальных условий $s_\lambda(\eta_0) = f_\lambda(\eta_0) = 0$ (т.к. $\beta_\lambda(\eta_0) = 0$) запишем систему дифференциальных уравнений (43) в виде системы интегральных уравнений Вольтерра

$$f_\lambda(\eta) = \int_{\eta_0}^{\eta} w(\eta_1) (1 + 2s_\lambda(\eta_1)) \exp[-2i\Theta(\eta_1, \eta)] d\eta_1, \quad (44)$$

$$s_\lambda(\eta) = \frac{1}{2} \int_{\eta_0}^{\eta} d\eta_1 w(\eta_1) \int_{\eta_0}^{\eta_1} d\eta_2 w(\eta_2) (1 + 2s_\lambda(\eta_2)) \cos[2\Theta(\eta_2, \eta_1)], \quad (45)$$

где $w(\eta) = \Omega'(\eta)/\Omega(\eta)$. Для нахождения асимптотики $s_\lambda(\eta)$ ограничимся первой итерацией интегрального уравнения (45) и, учтя, что $\Theta(\eta_2, \eta_1) \rightarrow \lambda(\eta_1 - \eta_2)$ при $\lambda \rightarrow \infty$, запишем (45) в виде

$$s_\lambda(\eta) = \frac{1}{4} \left| \int_{\eta_0}^{\eta} w(\eta_1) \exp(2i\lambda\eta_1) d\eta_1 \right|^2. \quad (46)$$

Следовательно, $s_\lambda \sim \lambda^{-6}$, и поэтому интеграл в (33) сходится.

Таким образом, в данном случае плотность числа рожденных частиц конечна для 4-мерного пространства-времени. При $t \ll 1/m$ в частном случае выражение для плотности числа рожденных неконформных частиц вычислено в работе [7].

5. МОДИФИЦИРОВАННЫЙ ГАМИЛЬТониАН КАК КАНОНИЧЕСКИЙ

Покажем, что модифицированный гамильтониан (39) может быть получен в однородном изотропном пространстве как канонический при определенном выборе переменных, описывающих скалярное поле. Прибавим к плотности лагранжиана (3) N -дивергенцию $\partial J^i / \partial x^i$, где в системе координат $(\eta, \mathbf{x})$ N -вектор $J^i = (\sqrt{\gamma} c \tilde{\phi}^* \tilde{\phi} (N-2)/2, 0, \dots, 0)$. При этом уравнение движения (1) остается неизменным. Выбрав в качестве обобщенных координат $\tilde{\phi}(x) = a^{(N-2)/2}(\eta) \phi(x)$ и $\tilde{\phi}^*(x)$, т.е. переменные, для которых уравнение (1) имеет вид (7), и исходя из плотности лагранжиана $L^\Delta(x) = L(x) + \partial J^i / \partial x^i$, получим в качестве плотности гамильтониана $h(x) = \tilde{\phi}'(\partial L^\Delta) / (\partial \tilde{\phi}') + \tilde{\phi}^{*'}(\partial L^\Delta) / (\partial \tilde{\phi}^{*'}) - L^\Delta(x)$ следующее выражение:

$$h(x) = \sqrt{\gamma} \left\{ \tilde{\phi}^{*'} \tilde{\phi}' + \gamma^{\alpha\beta} \partial_\alpha \tilde{\phi}^* \partial_\beta \tilde{\phi} + \left[m^2 a^2 - \Delta \xi a^2 R + \left(\frac{N-2}{2} \right)^2 K \right] \tilde{\phi}^* \tilde{\phi} \right\}. \quad (47)$$

Поэтому гамильтониан (39) является каноническим гамильтонианом для скалярного поля, если в качестве обобщенных координат выбраны $\tilde{\phi}(x)$ и $\tilde{\phi}^*(x)$.

Таким образом, в данной работе с помощью диагонализации гамильтониана исследованы случаи метрического, канонического и так называемого модифицированного гамильтонианов. Показано, что при этом только для модифицированного гамильтониана (39) конечна плотность частиц, рождающихся в нестационарной метрике однородного изотропного пространства. Энергии этих частиц равны осцилляторной частоте.

Введенный выше модифицированный тензор энергии-импульса T_{ik}^{mod} (38) для конформного скалярного поля совпадает с метрическим. В однородном изотропном пространстве T_{ik}^{mod} приводит к модифицированному гамильтониану (39), который может быть получен так же, как канонический, при определенном выборе обобщенных координат.

Можно показать, что при рассмотрении линейной комбинации метрического (5) и канонического (4) тензоров требование совпадения энергии квазичастиц с осцилляторной частотой однозначно приводит к модифицированному тензору (38). Следует отметить, что метрический тензор энергии-импульса не может быть заменен на T_{ik}^{mod} в правых частях уравнений Эйнштейна, поскольку тензор T_{ik}^{mod} не является ковариантно сохраняющимся. Но при корпускулярной интерпретации неконформного скалярного поля и применении метода диагонализации выбор гамильтониана (39), построенного по T_{ik}^{mod} , является предпочтительным по сравнению с выбором метрического гамильтониана.

Благодарности. Автор благодарит проф. А. А. Гриба и участников семинара лаборатории теоретической физики им. А. А. Фридмана за обсуждение работы.

Список литературы

- [1] А. А. Гриб, С. Г. Мамаев, В. М. Мостепаненко. Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях. М.: Энергоатомиздат, 1988.
- [2] Н. Биррелл, П. Девис. Квантованные поля в искривленном пространстве-времени. М.: Мир, 1984.
- [3] V. B. Bezerra, V. M. Mostepanenko, C. Romero. Int. J. Mod. Phys. D. 1998. V. 7. P. 249.
- [4] I. H. Redmount. Phys. Rev. D. 1999. V. 60. P. 104004.
- [5] J. Lindig. Phys. Rev. D. 1999. V. 59. P. 064011.
- [6] M. Bordag, J. Lindig, V. M. Mostepanenko, Yu. V. Pavlov. Int. J. Mod. Phys. D. 1997. V. 6. P. 449.
- [7] M. Bordag, J. Lindig, V. M. Mostepanenko. Class. Q. Grav. 1998. V. 15. P. 581.
- [8] А. А. Гриб, С. Г. Мамаев. ЯФ. 1969. Т. 10. С. 1276.
- [9] А. А. Гриб, С. Г. Мамаев. ЯФ. 1971. Т. 14. С. 800.
- [10] L. Parker. Phys. Rev. 1969. V. 183. P. 1057.
- [11] S. A. Fulling. Gen. Relativ. Gravit. 1979. V. 10. P. 807.
- [12] N. A. Chernikov, E. A. Tagirov. Ann. Inst. H. Poincaré A. 1968. V. 9. P. 109.
- [13] M. Castagnino, R. Ferraro. Phys. Rev. D. 1986. V. 34. P. 497.
- [14] М. В. Федорюк. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983.
- [15] С. Г. Мамаев, В. М. Мостепаненко, В. А. Шелюто. ТМФ. 1985. Т. 63. № 1. С. 64.

Поступила в редакцию 19.VI.2000 г.