Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. М. Хорошкин, Экстремальный проектор и динамический твист, *ТМФ*, 2004, том 139, номер 1, 158–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf42>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 14:30:53

© 2004 г.

С. М. Хорошкин*

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЙ ПРОЕКТОР И ДИНАМИЧЕСКИЙ ТВИСТ

Описывается связь между динамическим твистом $J(\lambda)$ и экстремальным проектором для простых алгебр Ли. Это соответствие имеет два очевидных приложения: с одной стороны, исходя из известного мультипликативного выражения для экстремального проектора, можно получить решения уравнения Арnaudона–Буффенуара–Рагуси–Роше; с другой стороны, мы видим, что структурные константы редукционных алгебр определяются матричными коэффициентами динамического твиста.

Ключевые слова: экстремальный проектор, динамический твист.

1. ВВЕДЕНИЕ

Чрезвычайно удобными для изучения представлений вещественных групп Ли оказались алгебры Микельссона, введенные в начале 70-х г.г. в работе [1]. Алгебра Микельссона $S(\mathfrak{g}, K)$ действует на пространстве старших векторов максимальной компактной подгруппы K вещественной группы G , и всякий модуль Хариш–Чандры пары $(\mathfrak{g}, K)$, где $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли группы G , однозначно восстанавливается по этому действию. Эта конструкция была многократно использована различными авторами в теории представлений вещественных групп Ли. Помимо этого, ограничение на пространство старших векторов может быть эффективно вычислено при помощи экстремального проектора, введенного в работе [2]. По-видимому, Желобенко [3], [4] был первым, кто заметил совпадение двух конструкций и использовал впоследствии этот факт для изучения свойств редукционных алгебр.

Фельдер [5], формализуя конструкции интегрируемых моделей на гранях решетки, ввел понятие динамических R -матриц и динамических квантовых групп. Затем в работе [6] было показано, что динамическая квантовая группа допускает интерпретацию в качестве квазихопфовой алгебры, полученной из квантовой группы $U_q(\mathfrak{g})$ Дринфельда–Джимбо при помощи так называемого динамического твиста $J(\lambda)$. Авторы также вывели рекуррентное соотношение для $J(\lambda)$ (уравнение Арnaudона–Буффенуара–Рагуси–Роше (АБРР)), однозначно определяющее твист.

*Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия. E-mail: khor@itep.ru

Позднее Этингоф, Шифманн и Варченко [7], [8] показали, что динамический твист $J(\lambda)$ совпадает с матрицей структурных констант алгебры сплетающих операторов между общим модулем Верма и тензорным произведением модуля Верма на конечномерное представление алгебры $U_q(\mathfrak{g})$. В работе [8] на этом же языке была развита абстрактная теория динамических квантовых групп.

Основной целью данной публикации является переизложение результатов работы [7] на языке редукционных алгебр с использованием техники экстремального проектора.

В частности, мы показываем, что так же, как и для сплетающих операторов, структурные константы редукционных алгебр удовлетворяют условию динамического коцикла. Это неудивительно, поскольку сплетающие операторы между общим модулем Верма и тензорным произведением модуля Верма на конечномерное представление алгебры $U_q(\mathfrak{g})$ представляют собой частный случай редукционной алгебры. Более того, сравнивая непосредственно в этом случае сплетающие операторы из работ [7] и [8] с образующими редукционной алгебры, определенными одеванием при помощи проектора, мы показываем, что они задают два различных базиса в соответствующей редукционной алгебре. Затем мы выводим аналог уравнения АБРР для последних базисных элементов. Две формы уравнения АБРР очень похожи, но не идентичны. Тем не менее нетрудно установить прямое преобразование между их решениями. Это соответствие имеет два очевидных приложения: с одной стороны, исходя из известного мультипликативного выражения для экстремального проектора, можно получить решения уравнения АБРР; с другой стороны, мы видим, что структурные константы редукционных алгебр определяются матричными коэффициентами динамического твиста.

Работа имеет следующую структуру. Во втором разделе мы определяем алгебры Микельссона в достаточно общих предположениях и описываем некоторые их свойства. Основным результатом здесь является неявно используемая в работе [3] теорема 1, гласящая, что в присутствии проекционного оператора алгебра Микельссона допускает три различных определения, каждое из которых имеет свою область приложений. Так, например, стандартное “нормализаторное” определение позволяет связать алгебру Микельссона с алгеброй сплетающих операторов, в то время как описание алгебры Микельссона при помощи проекционного оператора вводит удобный технический аппарат для ее исследования; двойственное описание с помощью “младших векторов” гарантирует во многих случаях существование антиинволюции картановского типа.

В разделе 3 мы рассматриваем редукционные алгебры, т.е. алгебры Микельссона, связанные с $U_q(\mathfrak{g})$ -модульной алгеброй, где $\mathfrak{g}$ – полупростая алгебра Ли. Вначале мы показываем, что редукционные алгебры в определенном смысле исчерпывают алгебры Микельссона, используемые в теории представлений, затем устанавливаем соответствие между редукционными алгебрами и алгебрами сплетающих операторов. Мы показываем также, что структура редукционной алгебры, так же как и алгебры сплетающих операторов, управляется матрицей слияния J , которая удовлетворяет условию динамического коцикла.

В разделе 4 мы выводим рекуррентное соотношение для матрицы J , аналогичное полученному в работе [6]. В последнем разделе устанавливается соответствие между на-

шими вычислениями и результатами работы [7].

2. АЛГЕБРЫ МИКЕЛЬССОНА И ИХ СВОЙСТВА

Пусть $\mathcal{A}$ – ассоциативная алгебра с единицей и J_+ – левый идеал $\mathcal{A}$ (т.е. $\mathcal{A}J_+ = J_+$). Определим алгебру Микельссона $S_{J_+}(\mathcal{A})$ при помощи следующей конструкции типа Гекке:

$$S_{J_+}(\mathcal{A}) = N(J_+)/J_+, \quad (2.1)$$

где $N(J_+)$ – нормализатор J_+ :

$$N(J_+) = \{x \in \mathcal{A} : J_+x \subset J_+\}. \quad (2.2)$$

Соотношение (2.1) на самом деле определяет ассоциативную алгебру, так как $J_+ \subset N(J_+)$ является двусторонним идеалом в $N(J_+)$.

Аналогично мы можем определить алгебру $S_{J_-}(\mathcal{A})$ для любого правого идеала J_- как

$$S_{J_-}(\mathcal{A}) = N(J_-)/J_-, \quad (2.3)$$

где

$$N(J_-) = \{x \in \mathcal{A} : xJ_- \subset J_-\}. \quad (2.4)$$

Пусть теперь $\mathcal{A}$ содержит как левый идеал J_+ , так и правый идеал J_- , и существует идемпотент P в некотором расширении $\tilde{\mathcal{A}} \supset \mathcal{A}$ алгебры $\mathcal{A}$ (обычно $\tilde{\mathcal{A}}$ является некоторым пополнением $\mathcal{A}$), так что

$$J_+P = PJ_- = 0, \quad (2.5)$$

$$P^2 = P, \quad P - 1 \in \tilde{J}_+ \cap \tilde{J}_-, \quad (2.6)$$

$$\tilde{J}_\pm \cap \mathcal{A} = J_\pm, \quad (2.7)$$

где $\tilde{J}_+ = \tilde{\mathcal{A}}J_+$ и $\tilde{J}_- = J_-\tilde{\mathcal{A}}$ – идеалы в $\tilde{\mathcal{A}}$, порожденные $J_\pm$, и для любого $x \in \mathcal{A}$ существуют $x_+ \in \mathcal{A}$ и $x_- \in \mathcal{A}$ такие, что

$$Px - x_+ \in \tilde{J}_+, \quad xP - x_- \in \tilde{J}_-. \quad (2.8)$$

Тогда элементы

$$PxP, \quad x \in \mathcal{A}, \quad (2.9)$$

составляют подалгебру в $\tilde{\mathcal{A}}$, которую мы обозначим через $S_P(\mathcal{A})$.

ТЕОРЕМА 1. В предположениях (2.5)–(2.8) отображение $\phi: \mathcal{A} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}$, определенное формулой

$$\phi(x) = PxP, \quad (2.10)$$

определяет изоморфизм алгебр $S_{J_+}(\mathcal{A})$, $S_{J_-}(\mathcal{A})$ и $S_P(\mathcal{A})$. Более того, ϕ изоморфно отображает на $S_P(\mathcal{A})$ двойной косет

$$J_- \setminus \mathcal{A}/J_+ \approx \mathcal{A}/(J_+ + J_-), \quad (2.11)$$

снабжая его тем самым структурой ассоциативной алгебры, изоморфной $S_{J_+}(\mathcal{A})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего проверим, что отображение ϕ является корректно определенным гомоморфизмом алгебр $\phi: S_{J_+}(\mathcal{A}) \rightarrow S_P(\mathcal{A})$.

Корректность следует из равенства $PJ_+P = 0$, которое верно в силу (2.5). Пусть теперь $x, y \in N(J_+)$. Тогда

$$\phi(x)\phi(y) = P x P y P = P x y P + P x z_+ y P = \phi(xy) + P x z_+ y P,$$

где $z_+ = P - 1 \in \tilde{J}_+$ в силу (2.6). Так как $y \in N(J_+)$, то $z_+ y \in \tilde{J}_+$, и последнее слагаемое $P x z_+ y P$ равно нулю в силу (2.5). Таким образом, $\phi(x)\phi(y) = \phi(xy)$. Аналогичное доказательство верно для алгебры $S(J_-)$ и того же самого отображения (2.10).

В силу свойств (2.5), (2.6) ядро оператора $P \cdot$ умножения слева на P в $\tilde{\mathcal{A}}$ равно $\tilde{J}_-$, и ядро оператора $\cdot P$ умножения на P справа равно $\tilde{J}_+$. В самом деле, включения $\text{Ker}(P \cdot) \subset \tilde{J}_-$ и $\text{Ker}(\cdot P) \subset \tilde{J}_+$ следуют из (2.5). С другой стороны, предположим, что $xP = 0$, $x \in \tilde{\mathcal{A}}$. Мы знаем из (2.6), что $P - 1 = z \in \tilde{J}_+$. Умножая это равенство слева на x , получаем $x = -xz \in \tilde{J}_+$.

Пусть теперь $x \in N(J_+)$ и $\phi(x) = P x P = 0$. Тогда $P x \in \tilde{J}_+$. В силу (2.6) мы можем заменить P на $1 + z$, где $z \in \tilde{J}_+$, так что $x + z x \in \tilde{J}_+$. Но $z x \in \tilde{J}_+$, так как $x \in N(J_+)$, так что $x \in \tilde{J}_+ \cup \mathcal{A} = J_+$. Это рассуждение показывает, что гомоморфизм ϕ инъективен для обеих алгебр $S_{J_{\pm}}(\mathcal{A})$ и изоморфно отображает двойной косет (2.11) на алгебру $S_P(\mathcal{A})$.

Для доказательства сюръективности отображения $\phi: S_{J_+}(\mathcal{A}) \rightarrow S_P(\mathcal{A})$ рассмотрим произвольный элемент вида $P x P$, $x \in \mathcal{A}$. В силу (2.8) мы можем найти $x_+ \in \mathcal{A}$ и $z \in \tilde{J}_+$ так, что

$$P x = x_+ + z. \quad (2.12)$$

Элемент x_+ обязан принадлежать $N(J_+)$. В самом деле, умножим равенство (2.12) слева на произвольный элемент из J_+ . Тогда левая часть станет равной нулю благодаря (2.5), в правой же части мы имеем $J_+ x_+ + J_+ z$. Последнее слагаемое принадлежит $\tilde{J}_+$ по построению, так что $J_+ x_+ \in J_+$.

Итак, мы имеем

$$P x P = P^2 x P = P x_+ P + P z P = P x_+ P,$$

где $P x_+ P$ принадлежит образу $S(J_+)$, как было показано выше. Это доказывает сюръективность отображения ϕ и справедливость всей теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим следующее полезное следствие теоремы 1. Пусть $\omega: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ — антиэндоморфизм алгебры $\mathcal{A}$ такой, что $\omega(J_+) \subset J_-$. В этом случае $\omega(N(J_+)) \subset N(J_-)$, так что ω определяет антигомоморфизм алгебр $\omega: S_{J_+}(\mathcal{A}) \rightarrow S_{J_-}(\mathcal{A})$. Принимая во внимание доказанный выше изоморфизм $S_{J_+}(\mathcal{A}) \approx S_{J_-}(\mathcal{A})$, мы видим, что ω естественным образом определяет антиэндоморфизм алгебры Микельссона $S_{J_+}(\mathcal{A})$. Отметим, что приведенные аргументы справедливы, если даже ω не продолжается до антиэндоморфизма $\tilde{\mathcal{A}}$.

3. СТРУКТУРА РЕДУКЦИОННЫХ АЛГЕБР

3.1. Редукция модульной алгебры. Пусть $\mathfrak{g}$ – полупростая алгебра Ли и $U_q(\mathfrak{g})$ – q -деформация ее универсальной обертывающей алгебры, рассматриваемая как алгебра Хопфа. Как правило, мы будем опускать индекс q , если приводимые аргументы являются общими для универсальной обертывающей алгебры и ее q -деформации. Фиксируем также борелевскую подалгебру $\mathfrak{b}_+ \subset \mathfrak{g}$, и пусть $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_+$ – ниль-радикал $\mathfrak{b}_+$, а $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{b}_+$ – картановская подалгебра.

Основные примеры алгебр Микельссона, используемые в теории представлений, соответствуют парам $\mathcal{A} \supset U(\mathfrak{g})$, где $\mathcal{A}$ – ассоциативная алгебра, содержащая $U(\mathfrak{g})$, а идеал J_+ порожден элементами из $\mathfrak{n}_+$. При этом алгебра $\mathcal{A}$ строится либо из объемлющей алгебры Хопфа, либо из $U(\mathfrak{g})$ -модульной алгебры. Опишем вначале вторую конструкцию.

Для этого расширим сперва $U(\mathfrak{g})$ рациональными выражениями от картановских элементов:

$$U^{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}(\mathfrak{h}) \bigotimes_{U(\mathfrak{h})} U(\mathfrak{g}).$$

Естественно, в q -деформированном случае мы выбираем вместо этого стандартные подалгебры $U_q(\mathfrak{n}_+) \subset U_q(\mathfrak{b}_+) \subset U_q(\mathfrak{g})$ и расширяем $U_q(\mathfrak{g})$ при помощи рациональных выражений от мультипликативных картановских образующих $k_i^{\pm 1} \in U_q(\mathfrak{h})$.

Пусть W – $U(\mathfrak{g})$ -модульная алгебра, т.е. ассоциативная алгебра со структурой $U(\mathfrak{g})$ -модуля, так что эти две структуры совместны в следующем смысле:

$$\hat{x}(w_1 w_2) = \sum_i \hat{x}'_i(w_1) \hat{x}''_i(w_2).$$

Здесь $x \in U(\mathfrak{g})$, $w_i \in W$, $\Delta(x) = \sum_i x'_i \otimes x''_i$ и действие x в W обозначено как $\hat{x}(w)$. Мы предполагаем также, что действие $U(\mathfrak{h})$ в W полупросто. В этих предположениях корректно определено полупрямое произведение

$$\widetilde{W} = W \rtimes U^{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g}).$$

Здесь $\widetilde{W}$ – ассоциативная алгебра, содержащая W и $U^{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g})$ в качестве подалгебр, так что элементы из этих подалгебр удовлетворяют следующим соотношениям:

$$xw = \sum_i \hat{x}'_i(w) x''_i, \quad x \in U^{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g}), \quad w \in W. \quad (3.1)$$

Например, если $W = TV$ – тензорная алгебра $U(\mathfrak{g})$ -модуля V , то полупрямое произведение $\widetilde{TV}$ может быть описано явно как алгебра, порожденная коммутирующими векторами $v \in V$ и образующими Шевалле $e_i, f_i, k_i^{\pm 1} = q^{\pm h_i}$, которые подчиняются (помимо соотношений в $U(\mathfrak{g})$) также соотношениям

$$\begin{aligned} e_i v - q^{-\langle h_i, \nu(v) \rangle} v e_i &= \hat{e}_i(v), \\ f_i v - v f_i &= \hat{f}_i(v) k_i, \\ k_i^{\pm 1} v &= q^{\pm \langle h_i, \nu(v) \rangle} v k_i^{\pm 1}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

если коумножение в $U(\mathfrak{g})$ выбрано как

$$\Delta(e_i) = e_i \otimes 1 + k_i^{-1} \otimes e_i, \quad \Delta(f_i) = 1 \otimes f_i + f_i \otimes k_i, \quad \Delta(k_i^{\pm 1}) = k_i^{\pm 1} \otimes k_i^{\pm 1}.$$

Алгебра $\widetilde{W}$ является левым $U^{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g})$ -модулем по отношению к умножению слева на элементы $U^{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g})$. Нетрудно показать, что этот модуль изоморфен тензорному произведению $W \otimes U^{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g})$ с действием $U^{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g})$ на себе при помощи левого умножения. Этот изоморфизм

$$\phi_W: W \otimes U^{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g}) \rightarrow \widetilde{W}$$

задается следующим правилом:

$$\phi_W\left(\sum w_i \otimes x_i\right) = \sum w_i x_i. \quad (3.3)$$

Поскольку алгебра $\widetilde{W}$ содержит $U^{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g})$ в качестве подалгебры, мы можем применить общую конструкцию построения алгебры Микельссона по отношению к левому идеалу $\widetilde{W}_+ = \widetilde{W}\mathfrak{n}_+$.

Назовем редукционной алгеброй $U(\mathfrak{g})$ -модульной алгебры W алгебру

$$W^{\{\mathfrak{n}_+\}} = S_{\widetilde{W}_+}(\widetilde{W}) = N(\widetilde{W}\mathfrak{n}_+)/\widetilde{W}\mathfrak{n}_+. \quad (3.4)$$

Конструкция редукционной алгебры от модульной алгебры покрывает и второй класс примеров алгебр Микельссона. А именно, пусть $\mathcal{B} \supset U(\mathfrak{g})$ — алгебра Хопфа, содержащая $U(\mathfrak{g})$. Распиряя вначале $\mathcal{B}$ рациональными выражениями от картановских элементов,

$$\mathcal{B}^{\mathfrak{h}} = \mathbb{C}(\mathfrak{h}) \bigotimes_{U(\mathfrak{h})} \mathcal{B},$$

мы можем построить алгебру Микельссона

$$\mathcal{S}_{\mathcal{B}^{\mathfrak{h}}\mathfrak{n}_+}(\mathcal{B}^{\mathfrak{h}}) = N(\mathcal{B}^{\mathfrak{h}}\mathfrak{n}_+)/\mathcal{B}^{\mathfrak{h}}\mathfrak{n}_+. \quad (3.5)$$

С другой стороны, алгебра $\mathcal{B}$ является $U(\mathfrak{g})$ -модульной алгеброй по отношению к присоединенному действию ad алгебры $U(\mathfrak{g})$, где

$$\text{ad}_g(b) = \sum_i g'_i b S(g''_i),$$

если $\Delta(g) = \sum_i g'_i \otimes g''_i$, а S — антипод в $\mathcal{B}$.

Нетрудно видеть, что полупрямое произведение $\mathcal{B} \rtimes U(\mathfrak{g})$ изоморфно в этом случае прямому произведению алгебр $\mathcal{B} \otimes U(\mathfrak{g})$. Изоморфизм

$$\phi: \mathcal{B} \otimes U(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{B} \rtimes U(\mathfrak{g}) \quad (3.6)$$

может быть описан следующим образом. Элементы $g \in U(\mathfrak{g})$ входят как в левую, так и в правую часть обоих произведений двумя способами: как элементы $U(\mathfrak{g})$ и как элементы $\mathcal{B}$. Для всякого $g \in U(\mathfrak{g})$ обозначим через $\bar{g}$ его же, но рассматриваемого как элемент $\mathcal{B}$. Тогда отображение ϕ в (3.6) может быть описано следующим образом:

$$\phi(g) = g, \quad \phi(\bar{g}) = \sum_i S(g'_i) \bar{g}''_i.$$

Итак, в силу изоморфизма (3.6) редукционная алгебра $\mathcal{B}^{\{\mathbf{n}_+\}}$ модульной алгебры $\mathcal{B}$ совпадает с алгеброй Микельссона $\mathcal{S}_{\mathcal{B}^{\mathbf{h}} \mathbf{n}_+}(\mathcal{B}^{\mathbf{h}})$ с точностью до умножения на центральное коммутативное кольцо рациональных дробей от картановских элементов:

$$\mathcal{B}^{\{\mathbf{n}_+\}} \simeq \mathcal{S}_{\mathcal{B}^{\mathbf{h}} \mathbf{n}_+}(\mathcal{B}^{\mathbf{h}}) \otimes \mathbb{C}(\mathbf{h}).$$

3.2. Редукционные алгебры и сплетающие операторы. Как векторное пространство $W^{\{\mathbf{n}_+\}}$ совпадает с пространством старших векторов $U^{\mathbf{h}}(\mathfrak{g})$ -модуля $\widetilde{W}/\widetilde{W} \mathbf{n}_+$, так что в силу изоморфизма (3.3)

$$W^{\{\mathbf{n}_+\}} \simeq (W \otimes (U^{\mathbf{h}}(\mathfrak{g})/U^{\mathbf{h}}(\mathfrak{g}) \mathbf{n}_+))^{\mathbf{n}_+}. \quad (3.7)$$

Как и выше, мы предполагаем, что представление W является прямой суммой своих весовых пространств по отношению к действию картановской подалгебры $\mathbf{h}$, $W = \bigoplus_{\gamma \in \mathbf{h}^*} W_\gamma$, где $W_\gamma = \{w \in W, h(w) = \gamma(h)w \text{ для любого } h \in \mathbf{h}\}$. Тогда и алгебра $\widetilde{W}$, так же как и редукционная алгебра $W^{\{\mathbf{n}_+\}}$, разлагается в прямую сумму своих весовых пространств по отношению к присоединенному действию $\mathbf{h}$:

$$W^{\{\mathbf{n}_+\}} = \bigoplus_{\gamma \in \mathbf{h}^*} W_\gamma^{\{\mathbf{n}_+\}},$$

где $W_\gamma^{\{\mathbf{n}_+\}} = \{w \in W^{\{\mathbf{n}_+\}}, [h, w] = \gamma(h)w \text{ для любых } h \in \mathbf{h}\}$.

По каждому элементу $\lambda \in \mathbf{h}^*$ общего положения мы можем построить левый $W^{\{\mathbf{n}_+\}}$ -модуль $W_{(\lambda, L)}^{\{\mathbf{n}_+\}}$ и правый $W^{\{\mathbf{n}_+\}}$ -модуль $W_{(\lambda, R)}^{\{\mathbf{n}_+\}}$. Левый модуль $W_{(\lambda, L)}^{\{\mathbf{n}_+\}}$ может быть определен как фактор $W^{\{\mathbf{n}_+\}}$ по отношению к левому идеалу, порожденному элементами вида $h - \lambda(h)$, где $h \in \mathbf{h}$; правый модуль $W_{(\lambda, R)}^{\{\mathbf{n}_+\}}$ определим как фактор $W^{\{\mathbf{n}_+\}}$ по отношению к правому идеалу, порожденному элементами $h - \lambda(h)$, $h \in \mathbf{h}$:

$$\begin{aligned} W_{(\lambda, L)}^{\{\mathbf{n}_+\}} &= W^{\{\mathbf{n}_+\}} / W^{\{\mathbf{n}_+\}}(\{h - \lambda(h) | h \in \mathbf{h}\}), \\ W_{(\lambda, R)}^{\{\mathbf{n}_+\}} &= (\{h - \lambda(h) | h \in \mathbf{h}\})W^{\{\mathbf{n}_+\}} \setminus W^{\{\mathbf{n}_+\}}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Пусть M_λ - модуль Верма над $U^{\mathbf{h}}(\mathfrak{g})$ со старшим весом λ и M - "универсальный" модуль Верма $U^{\mathbf{h}}(\mathfrak{g})/U^{\mathbf{h}}(\mathfrak{g}) \mathbf{n}_+$. Мы видим из (3.8), что $W_{(\lambda, L)}^{\{\mathbf{n}_+\}}$ как векторное пространство изоморфно пространству старших векторов тензорного произведения $W \otimes M_\lambda$:

$$W_{(\lambda, L)}^{\{\mathbf{n}_+\}} \simeq (W \otimes M_\lambda)^{\mathbf{n}_+}, \quad (3.9)$$

в то время как $W_{(\lambda, R)}^{\{n_+\}}$ может быть естественно отождествлено с соответствующей весовой компонентой пространства старших векторов $W \otimes M$:

$$W_{(\lambda, R)}^{\{n_+\}} \simeq ((W \otimes M)^{n_+})_{\lambda}. \quad (3.10)$$

Пусть 1_{λ}^L и 1_{λ}^R — образующие этих модулей. Они имеют вес λ :

$$h \cdot 1_{\lambda}^L = \lambda(h)1_{\lambda}^L, \quad 1_{\lambda}^R h = \lambda(h)1_{\lambda}^R, \quad h \in \mathfrak{h}.$$

Для всякого $s \in W^{\{n_+\}}$ обозначим через $s^L(\lambda) = s \cdot 1_{\lambda}^L$ и $s^R(\lambda) = 1_{\lambda}^R \cdot s$ образы 1_{λ}^L и 1_{λ}^R при действии s . Если элемент s имеет вес ν в $W^{\{n_+\}}$, то $s^L(\lambda)$ является старшим вектором $U^{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g})$ -модуля $W \otimes M_{\lambda}$ веса $\nu + \lambda$, а $s^R(\lambda)$ — старшим вектором $U^{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g})$ -модуля $W \otimes M_{\lambda-\nu}$ веса λ .

Поэтому они определяют морфизмы (левых) $U^{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g})$ -модулей

$$\bar{s}^L(\lambda): M_{\nu+\lambda} \rightarrow W \otimes M_{\lambda}, \quad \bar{s}^R(\lambda): M_{\lambda} \rightarrow W \otimes M_{\lambda-\nu}, \quad (3.11)$$

отображающие, например, старшие векторы $M_{\nu+\lambda}$ в $s^L(\lambda)$. Более того, морфизмы $U^{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g})$ -модулей $\bar{s}^L(\lambda)$ и $\bar{s}^R(\lambda)$ канонически продолжаются до сплетающих операторов между $\bar{W}$ -модулями, которые мы обозначим теми же буквами

$$\bar{s}(\lambda)^L: W \otimes M_{\nu+\lambda} \rightarrow W \otimes M_{\lambda}, \quad \bar{s}(\lambda)^R: W \otimes M_{\lambda} \rightarrow W \otimes M_{\lambda-\nu} \quad (3.12)$$

по следующему правилу:

$$\bar{s}(\lambda)(w \otimes m) = w \cdot (\bar{s}(\lambda)(m)). \quad (3.13)$$

ЛЕММА. Умножение “ $\cdot$ ” в алгебре $W^{\{n_+\}}$ и композиция “ $\circ$ ” сплетающих операторов связаны между собой следующим образом:

$$\overline{s_1 \cdot s_2}^L(\lambda) = \bar{s}_2^L(\lambda) \circ \bar{s}_1^L(\lambda + \nu(s_2)), \quad (3.14)$$

$$\overline{s_1 \cdot s_2}^R(\lambda) = \bar{s}_2^R(\lambda - \nu(s_1)) \circ \bar{s}_1^R(\lambda), \quad (3.15)$$

где $\nu(s_i) \in \mathfrak{h}^*$ — веса s_i .

3.3. Матрица J структурных констант. Обратимся теперь к описанию редукционной алгебры при помощи проекционного оператора. Проекционный оператор P , удовлетворяющий свойствам (2.5), (2.6), был впервые построен в работе [2] для простых алгебр Ли. Эта конструкция была затем обобщена на произвольные контрагredientные алгебры Ли конечного роста [9] и их q -деформации [10].

Проекционный оператор P принадлежит некоторому пополнению [10] алгебры $U^{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g})$, корректно действующему в представлениях со старшим весом, и допускает факторизацию согласно приведенному разложению элемента группы Вейля наибольшей длины, если $\mathfrak{g}$ полупроста. В этом случае важную роль играет также сдвинутый проектор $P(\gamma) = T_{\gamma}(P)$ (сдвиг T_{γ} будет определен ниже, см. (3.30)). Сдвинутый проектор вместе

со своими факторами обладает свойством кошикла на группе Вейля и был изучен впервые Желобенко [3], [4].

Свойства (2.8), необходимые для применения проектора к редукционным алгебрам, заведомо выполнены, если $U_q(\mathfrak{g})$ -модуль W *локально-конечен* над $U_q(\mathfrak{h})$, т.е. всякий элемент $w \in W$ представляется в виде конечной суммы

$$w = \sum a_i w_i,$$

где $a_i \in U_q(\mathfrak{h})$, а w_i – локально-конечные (т.е. принадлежащие конечномерным подмодулям) элементы W .

Это верно для тензорной алгебры конечномерного представления и для всех ее фактор-алгебр; локальная конечность над $U_q(\mathfrak{h})$ присоединенного действия q -деформации обертывающей алгебры простой алгебры Ли [11] говорит о том, что и для редукционных алгебр, возникающих из пар $U_q(\mathfrak{g}') \supset U_q(\mathfrak{g})$, условие (2.8) также выполнено, если $\mathfrak{g}'$ – полупростая.

Итак, в предположениях локальной конечности над $U_q(\mathfrak{h})$ модульной алгебры W ее редукционная алгебра описывается элементами вида

$$s_x = PxP, \quad x \in \widetilde{W},$$

с умножением, индуцированным с $\widetilde{W}$. Из соотношения (3.1) ясно, что каждый элемент алгебры $\widetilde{W}$ может быть представлен в виде $x = \sum_i f_i h_i w_i e_i$, где $f_i \in \mathfrak{n}_- U(\mathfrak{g})$, $w_i \in W$, $e_i \in U(\mathfrak{g}) \mathfrak{n}_+$ и $h_i \in \mathbb{C}(\mathfrak{h})$. Поскольку $Pf_i = e_i P = 0$ по определению, а элементы h_i коммутируют с P , мы видим, что $PxP = \sum_i h_i Pw_i P$, т.е. алгебра $W^{\{\mathfrak{n}_+\}}$ порождена над $\mathbb{C}(\mathfrak{h})$ элементами $s_w = PwP$, где $w \in W$ – локально-конечный элемент. Более того, можно показать [1], что как $\mathbb{C}(\mathfrak{h})$ -модуль алгебра $W^{\{\mathfrak{n}_+\}}$ изоморфна $\mathbb{C}(\mathfrak{h}) \otimes W$.

Возьмем два локально-конечных элемента $w_1, w_2 \in W$. Тогда в алгебре $W^{\{\mathfrak{n}_+\}}$

$$s_{w_1} s_{w_2} = Pw_1 Pw_2 P. \quad (3.16)$$

Представим P , стоящий в (3.16) между w_1 и w_2 , в форме $\sum_i f_i e_i h_i$, где $h_i \in \mathbb{C}(\mathfrak{h})$, $f_i \in \mathfrak{n}_- U(\mathfrak{g})$, $e_i \in U(\mathfrak{g}) \mathfrak{n}_+$, и будем переставлять элементы f_i налево до тех пор, пока они не встретят левый оператор P и не обнулятся на нем. Затем переставим элементы h_i направо за правый проектор и, наконец, переставим элементы e_i также направо до тех пор, пока они не встретят правый проектор и не обнулятся на нем. В конце концов мы получим следующее равенство:

$$Pw_1 Pw_2 P = \sum_i P J_i(w_1, w_2) P h_i = P \sum_i J_i(w_1, w_2) h_i P, \quad (3.17)$$

где $h_i \in \mathbb{C}(\mathfrak{h})$ и $J_i(w_1, w_2) \in W$. Обозначим сумму $\sum_i J_i(w_1, w_2) h_i$ через $J^L(w_1, w_2)$. Мы определили таким образом отображение

$$J^L: W \otimes W \rightarrow W \otimes \mathbb{C}(\mathfrak{h}). \quad (3.18)$$

Если же в описанной выше процедуре переставить картановские элементы налево, то получим отображение

$$J^R: W \otimes W \rightarrow \mathbb{C}(\mathbf{h}) \otimes W. \quad (3.19)$$

Мы можем отобразить далее тензорные произведения $W \otimes \mathbb{C}(\mathbf{h})$ и $\mathbb{C}(\mathbf{h}) \otimes W$ в полупрямое произведение $\widehat{W}^{\mathbf{h}} = \mathbb{C}(\mathbf{h}) \rtimes W$, $\phi(h \otimes w) = hw$ и $\psi(w \otimes h) = wh$. Тогда образы J^R и J^L в $\widehat{W}^{\mathbf{h}}$ по отношению к этим отображениям совпадут.

Более того, по описанию конструкции (3.17) мы видим, что отображения (3.18) и (3.19) получаются применением умножения в алгебре W к отображениям, определяемым некоторыми каноническими элементами

$$\mathbf{J}^L \in (U(\mathbf{n}_-) \otimes U(\mathbf{b}_+)^{\mathbf{h}}) \otimes \mathbb{C}(\mathbf{h}), \quad \mathbf{J}^R \in \mathbb{C}(\mathbf{h}) \otimes (U(\mathbf{b}_-)^{\mathbf{h}} \otimes U(\mathbf{n}_+)), \quad (3.20)$$

которые совпадают как элементы полупрямого произведения $(U(\mathbf{b}_-) \otimes U(\mathbf{b}_+))^{\mathbf{h}} \rtimes \mathbb{C}(\mathbf{h})$. А именно,

$$\begin{aligned} J^L(w_1, w_2) &= (m_W \otimes 1) \mathbf{J}^L(w_1 \otimes w_2), \\ J^R(w_1, w_2) &= (1 \otimes m_W) \mathbf{J}^R(w_1 \otimes w_2), \end{aligned} \quad (3.21)$$

где m_W — умножение в модульной алгебре W .

Как мы уже упоминали, мультипликативное выражение для экстремального проектора P известно для широкого класса алгебр: для универсальных обертывающих алгебр контрагredientных супералгебр Ли конечного роста [9]; для q -деформаций универсальных обертывающих алгебр простых или аффинных алгебр Ли [10]. К примеру, если $U_q(\mathbf{g})$ — “квантовая группа”, связанная с простой алгеброй Ли $\mathbf{g}$, то каждый нормальный порядок $\prec$ системы положительных корней Δ_+ определяет факторизацию

$$P = \prod_{\gamma \in \Delta_+}^{\rightarrow} P_{\gamma}, \quad (3.22)$$

в которой порядок произведения (3.22) совместим с нормальным порядком:

$$P_{\gamma} = \sum_{k \geq 0} e_{-\gamma}^k e_{\gamma}^k \frac{(-1)^k q^{-k((\rho, \gamma) - (\gamma, \gamma))/2}}{[k]_{q_{\gamma}}! \{h_{\gamma} + (\gamma, \rho) + (\gamma, \gamma)/2\}_q \dots \{h_{\gamma} + (\gamma, \rho) + (k-1)(\gamma, \gamma)/2\}_q},$$

где ρ — полусумма положительных корней, $q_{\gamma} = q^{(\gamma, \gamma)/2}$, $[n]_q = (q^n - q^{-n})/(q - q^{-1})$, $\{h_{\gamma} + c\}_q = (k_{\gamma} q_{\gamma}^c - k_{\gamma}^{-1} q^{-c})/(q_{\gamma} - q_{\gamma}^{-1})$, а $e_{\pm \gamma}$ и $k_{\gamma}^{\pm 1} = q_{\gamma}^{\pm h_{\gamma}}$ — образующие Картана–Вейля, построенные по нормальному порядку $\prec$ с нормировкой $[e_{\gamma}, e_{-\gamma}] = \{h_{\gamma}\}_q$. В частности, для алгебры $U_q(sl_2)$ со стандартными образующими Шевалле e, f и $k^{\pm 1} = q^{\pm h}$ получаем

$$P = \sum_{k \geq 0} f^k e^k \frac{(-1)^k}{[k]_q! [h+2]_q \dots [h+k-1]_q}.$$

Процедура (3.17), описанная выше, с учетом соотношений (3.2) дает в этом случае

$$J^L(w_1, w_2) = \sum_{k \geq 0} (\hat{f}^{(1)})^k (\hat{e}^{(2)})^k \frac{q^{k(h^R + \hat{h}^{(2)} + k + 1)}}{[k]_q! [h^R + \hat{h}^{(2)} + 2]_q \dots [h^R + \hat{h}^{(2)} + k - 1]_q} (w_1 \otimes w_2),$$

где $\hat{a}^{(i)}$ обозначает модульное действие элемента a на i -м аргументе, h^R – оператор правого умножения на h в $W^{\{\mathbf{n}_+\}}$. Таким образом,

$$\mathbf{J}^L = \sum_{k \geq 0} \hat{f}^k \otimes \hat{e}^k \frac{q^{k(h^R + \hat{h}^{(2)} + k + 1)}}{[k]_q! [h^R + \hat{h}^{(2)} + 2]_q \dots [h^R + \hat{h}^{(2)} + k - 1]_q}, \quad (3.23)$$

$$\mathbf{J}^R = \sum_{k \geq 0} \hat{f}^k \otimes \hat{e}^k \frac{q^{k(h^L - \hat{h}^{(1)} + k + 1)}}{[k]_q! [h^L - \hat{h}^{(1)} + 2]_q \dots [h^L - \hat{h}^{(1)} + k - 1]_q}, \quad (3.24)$$

где h^L (h^R) по-прежнему обозначает оператор умножения на картановский элемент h слева (справа) в алгебрах (3.20), а элементы $a \in U(\mathbf{b}_\pm)$, встречающиеся в i -м тензорном сомножителе, сохраняют обозначение $\hat{a}^{(i)}$.

Мы можем также специализировать отображения J^L и J^R в точке $\lambda \in \mathbf{h}^*$ (или, эквивалентно, применить эти отображения к левому и правому $W^{\{\mathbf{n}_+\}}$ -модулям $W_{(\lambda, L)}^{\{\mathbf{n}_+\}}$ и $W_{(\lambda, R)}^{\{\mathbf{n}_+\}}$), так что

$$J^L(\lambda)(w_1, w_2) = \sum_i J_i(w_1, w_2) \langle h_i, \lambda \rangle, \quad (3.25)$$

если $J^L(w_1, w_2) = \sum_i J_i(w_1, w_2) h_i$, и

$$J^R(\lambda)(w_1, w_2) = \sum_i \langle h_i, \lambda \rangle J_i(w_1, w_2), \quad (3.26)$$

если $J^R(w_1, w_2) = \sum_i h_i J_i(w_1, w_2)$.

В случае, когда W является тензорной алгеброй $W = T(V)$ и V – прямая сумма представлений V_i , $V = \bigoplus_i V_i$, ограничение J^L и J^R на $V_i \otimes V_j$ определяет отображение слияния

$$\begin{aligned} J_{V_i, V_j}^L &: V_i \otimes V_j \rightarrow V_i \otimes V_j \otimes \mathbb{C}(\mathbf{h}), \\ J_{V_i, V_j}^R &: V_i \otimes V_j \rightarrow \mathbb{C}(\mathbf{h}) \otimes V_i \otimes V_j, \end{aligned}$$

как и в работе [7].

Поскольку проектор P имеет вес нуль по отношению к $\mathbf{h}$, оба оператора $J^R(\lambda)$ и $J^L(\lambda)$ являются операторами нулевого веса и связаны следующим образом:

$$J^L(\lambda)(v, w) = J^R(\lambda + \nu(v) + \nu(w))(v, w),$$

т.е.

$$\mathbf{J}^L(\lambda) = \mathbf{J}^R(\lambda + h^{(1)} + h^{(2)}). \quad (3.27)$$

Рассмотрим теперь тройное произведение $s(w_1)s(w_2)s(w_3) = Pw_1Pw_2Pw_3P$. Мы можем вычислить его двумя способами. Во-первых,

$$Pw_1Pw_2Pw_3P = \sum_i Pw_1PJ_i(w_2, w_3)h_iP = \sum_{i,j} PJ_j(w_1, J_i(w_1, w_2))Ph_ih_j. \quad (3.28)$$

С другой стороны,

$$Pw_1Pw_2Pw_3P = \sum_k PJ_k(w_1, w_2)Ph_kw_3P = \sum_{k,l} PJ_l(J_k(w_1, w_2), w_3)PT_{\nu(w_3)}(h_k)h_l. \quad (3.29)$$

Здесь $T_\gamma(h)$ обозначает оператор сдвига элемента $h \in U(\mathbf{h})$, рассматриваемого как функция на пространстве $\mathbf{h}^*$, на вектор $\gamma \in \mathbf{h}^*$:

$$T_\gamma(h(\lambda)) = h(\gamma + \lambda). \quad (3.30)$$

Равенство выражений (3.28) и (3.29) определяет тождество динамического коцикла для J^L и J^R :

$$\begin{aligned} J^L(w_1, J(w_2, w_3)) &= J^L(T_{\nu(w_3)}J^L(w_1, w_2)), \\ J^R(w_1, T_{\nu(w_1)}^{-1}J^R(w_2, w_3)) &= J^R(J^R(w_1, w_2), w_3). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Эквивалентно,

$$\begin{aligned} J^L(\lambda)(w_1, J^L(\lambda)(w_2, w_3)) &= J^L(\lambda)(J^L(\lambda + \nu(w_3))(w_1, w_2), w_3), \\ J^R(\lambda)(w_1, J^R(\lambda - \nu(w_1))(w_2, w_3)) &= J^R(\lambda)(J^R(\lambda)(w_1, w_2), w_3). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Коциклическое тождество в форме (3.32) в ситуации, когда W совпадает с тензорной алгеброй пространства $V \supset V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$, может быть записано в общепринятых обозначениях как

$$\begin{aligned} J_{V_1, V_2 \otimes V_3}^L(\lambda)(1 \otimes J_{V_2, V_3}^L(\lambda)) &= J_{V_1 \otimes V_2, V_3}^L(\lambda)(J_{V_1, V_2}^L(\lambda + h^{(3)}) \otimes 1), \\ J_{V_1, V_2 \otimes V_3}^R(\lambda)(1 \otimes J_{V_2, V_3}^R(\lambda - h^{(1)})) &= J_{V_1 \otimes V_2, V_3}^R(\lambda)(J_{V_1, V_2}^R(\lambda) \otimes 1). \end{aligned} \quad (3.33)$$

4. РАЗНОСТНОЕ УРАВНЕНИЕ

В этом разделе мы сформулируем и докажем разностное уравнение для коциклов J^L и J^R , определенных в предыдущем разделе. Это разностное уравнение является аналогом уравнения АБРР [6] для матрицы слияния Этингофа и Шифманна [7].

4.1. Классический случай. Пусть V – локально-конечный $U(\mathbf{g})$ -модуль, TV – его тензорная алгебра. Сохраним обозначения предыдущего раздела, где h^L (h^R) обозначает оператор умножения на h слева (справа), $h^R(x) = xh$, $h^L(x) = hx$, в алгебрах (3.20) либо в их образах $\text{End}(V \otimes V) \otimes \mathbb{C}(\mathbf{h})$ и $\mathbb{C}(\mathbf{h}) \otimes \text{End}(V \otimes V)$, а элементы $a \in U(\mathbf{b}_\pm)$, встречающиеся в i -м тензорном сомножителе $V^{(i)}$ (или действующие в $\text{End } V^{(i)}$), обозначаются как $\hat{a}^{(i)}$. Отметим, что оба оператора h^R и h^L коммутируют с эндоморфизмами $\hat{a}^{(i)}$, $i = 1, 2$, $a \in U(\mathbf{g})$.

Пусть x_i , $i = 1, \dots, r = \text{rank}(\mathbf{g})$, образуют ортонормальный базис в $\mathbf{h}$ по отношению к форме Киллинга, а ρ обозначает полусумму положительных корней, рассматриваемую как элемент $\mathbf{h}$. Определим элементы θ^L и θ^R следующим образом:

$$\begin{aligned} \theta^L &= \frac{1}{2} \sum_i (\hat{x}_i^{(2)})^2 + \sum_i x_i^R \hat{x}_i^{(2)} + \hat{\rho}^{(2)}, \\ \theta^R &= \frac{1}{2} \sum_i (\hat{x}_i^{(1)})^2 - \sum_i x_i^L \hat{x}_i^{(1)} - \hat{\rho}^{(1)}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

ТЕОРЕМА 2. Тензоры $\mathbf{J}^L$ и $\mathbf{J}^R$ удовлетворяют следующим разностным уравнениям:

$$[\theta^L, \mathbf{J}^L] = \left(\sum_{\gamma \in \Delta_+} \hat{e}_{-\gamma} \otimes \hat{e}_\gamma \right) \mathbf{J}^L, \quad (4.2)$$

$$[\theta^R, \mathbf{J}^R] = \left(\sum_{\gamma \in \Delta_+} \hat{e}_{-\gamma} \otimes \hat{e}_\gamma \right) \mathbf{J}^R. \quad (4.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство напоминает вывод уравнения АБРР, приведенный в работе [7].

Пусть C – квадратичный элемент Казимира:

$$C = \frac{1}{2} \sum_i x_i^2 + \rho + \sum_{\gamma \in \Delta_+} e_{-\gamma} e_\gamma.$$

Для любых $v_1, v_2 \in V$ рассмотрим произведение в алгебре $TV^{\{\mathbf{n}_+\}}$

$$F(v_1, v_2) = s_{v_1} C s_{v_2} = P v_1 P C P v_2 P. \quad (4.4)$$

Мы можем вычислить это произведение двумя способами. С одной стороны,

$$\begin{aligned} F(v_1, v_2) &= P v_1 P C P v_2 P = P v_1 P \left(\frac{1}{2} \sum_i x_i^2 + \rho \right) v_2 P = \\ &= P v_1 P v_2 P \left(\frac{1}{2} \sum_i (x_i + \langle x_i, \nu(v_2) \rangle)^2 + \rho + (\rho, \nu(v_2)) \right) = \\ &= P J^L(v_1, v_2) P \left(\frac{1}{2} \sum_i (x_i + \langle x_i, \nu(v_2) \rangle)^2 + \rho + (\rho, \nu(v_2)) \right), \end{aligned} \quad (4.5)$$

поскольку $P e_{-\gamma} = 0$ для любого $\gamma \in \Delta_+$. С другой стороны, можно переставить образующие e_γ и картановские элементы, входящие в два средних проектора в (4.4), направо, а образующие $e_{-\gamma}$ – налево. Так как C централен в $U^{\mathbf{h}}(\mathbf{g})$, он остается нетронутым при этой процедуре и, если $J^L(v_1, v_2) = \sum_j J_j^{(1)} \otimes J_j^{(2)} \otimes h_j$, где $J_j^{(1)} \in V^{(1)}$, $J_j^{(2)} \in V^{(2)}$ и $h_j \in \mathbb{C}(\mathbf{h})$, то

$$\begin{aligned} F(v_1, v_2) &= \sum_j P J_j^{(1)} C J_j^{(2)} P h_j = - \sum_{\gamma \in \Delta_+} \sum_j P \hat{e}_{-\gamma}(J_j^{(1)}) \hat{e}_\gamma(J_j^{(2)}) P h_j + \\ &+ \sum_j P J_j^{(1)} J_j^{(2)} P \left(\frac{1}{2} \sum_i (x_i + \langle x_i, \nu(J_j^{(2)}) \rangle)^2 + \rho + (\rho, \nu(J_j^{(2)})) \right) h_j = \\ &= - \sum_{\gamma \in \Delta_+} P (\hat{e}_{-\gamma} \otimes \hat{e}_\gamma) J^L(v_1, v_2) P + \\ &+ \sum_j P J_j^{(1)} J_j^{(2)} P \left(\frac{1}{2} \sum_i (x_i + \langle x_i, \nu(J_j^{(2)}) \rangle)^2 + \rho + (\rho, \nu(J_j^{(2)})) \right) h_j. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Вычитая (4.6) из (4.5), получаем (4.3).

Положим теперь для любого $\lambda \in \mathbf{h}^*$

$$\begin{aligned}\theta^L(\lambda) &= \frac{1}{2} \sum_i \hat{x}_i^2 + \lambda + \rho, \\ \theta^R(\lambda) &= \frac{1}{2} \sum_i \hat{x}_i^2 - \lambda - \rho.\end{aligned}\tag{4.7}$$

Тогда из теоремы 2 получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. Коциклы $\mathbf{J}^L(\lambda)$ и $\mathbf{J}^R(\lambda)$ удовлетворяют следующим разностным уравнениям:

$$[1 \otimes \theta^L(\lambda), \mathbf{J}^L(\lambda)] = \left(\sum_{\gamma \in \Delta_+} \hat{e}_{-\gamma} \otimes \hat{e}_\gamma \right) \mathbf{J}^L(\lambda),\tag{4.8}$$

$$[\theta^R(\lambda) \otimes 1, \mathbf{J}^R(\lambda)] = \left(\sum_{\gamma \in \Delta_+} \hat{e}_{-\gamma} \otimes \hat{e}_\gamma \right) \mathbf{J}^R(\lambda).\tag{4.9}$$

4.2. Уравнение типа АБРР для $q \neq 1$. Обратимся теперь к разностным уравнениям для коциклов $\mathbf{J}^L$ и $\mathbf{J}^R$, возникающих из алгебры $U_q(\mathfrak{g})$, где $q \neq 1$.

Сохраним те же обозначения, что и в классическом случае.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $U_q(\mathfrak{g})$ – q -деформация Дринфельда–Джимбо универсальной обертывающей алгебры простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тогда коциклы $\mathbf{J}^L$ и $\mathbf{J}^R$ удовлетворяют следующим разностным уравнениям:

$$R_0^{21} q^{-2\theta^L} \mathbf{J}^L = \mathbf{J}^L q^{-2\theta^L},\tag{4.10}$$

$$R_0^{21} q^{-2\theta^R} \mathbf{J}^R = \mathbf{J}^R q^{-2\theta^R}.\tag{4.11}$$

Здесь $R \in U_q(\mathfrak{b}_+) \otimes U_q(\mathfrak{b}_-)$ – универсальная R -матрица для $U_q(\mathfrak{g})$:

$$R_0 = R \cdot q^{-\sum_i x_i \otimes x_i},$$

x_i , как и раньше, образуют ортонормальный базис картановской подалгебры, и $R_0^{21} = PR_0P$, $P(u \otimes v) = v \otimes u$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вновь следует идеям работы [7]. Теперь C – центральный элемент [12]:

$$C = q^{-2\rho} u,\tag{4.12}$$

где

$$u = \sum_k S(b_k) a_k,\tag{4.13}$$

если универсальная R -матрица записана как $R = \sum_k a_k \otimes b_k$ и S — антипод в $U_q(\mathfrak{g})$. Для любых $v_1, v_2 \in V$, где V — локально-конечный $U_q(\mathfrak{g})$ -модуль, рассмотрим произведение

$$F(v_1, v_2) = s_{v_1} C s_{v_2} = P v_1 P C P v_2 P \quad (4.14)$$

в алгебре $TV^{\{\mathbf{n}_+\}}$. Считаем произведение двумя способами. С одной стороны,

$$\begin{aligned} F(v_1, v_2) &= P v_1 P C P v_2 P = P v_1 P q^{-2\rho - \sum_i x_i^2} v_2 P = \\ &= P v_1 P v_2 P q^{-\sum_i (x_i + \langle x_i, \nu(v_2) \rangle)^2 - 2(\rho + \langle \rho, \nu(v_2) \rangle)} = \\ &= P J^L(v_1, v_2) P q^{-\sum_i (x_i + \langle x_i, \nu(v_2) \rangle)^2 - 2(\rho + \langle \rho, \nu(v_2) \rangle)} = \\ &= q^{-\sum_i (x_i^R + x_i^{(2)})^2 - 2(\rho^R + \rho^{(2)})} P J^L(v_1, v_2) P, \end{aligned} \quad (4.15)$$

поскольку $P e_{-\gamma} = 0$ для любого $\gamma \in \Delta_+$. С другой стороны, мы можем переставить образующие e_γ и картановские элементы, входящие в два средних проектора в (4.4), направо, а образующие $e_{-\gamma}$ — налево. Так как C централен в $U_q^{\mathbf{h}}(\mathfrak{g})$, он остается нетронутым при этой процедуре и, если $J^L(v_1, v_2) = \sum_j J_j^{(1)} \otimes J_j^{(2)} \otimes h_j$, где $J_j^{(1)} \in V^{(1)}$, $J_j^{(2)} \in V^{(2)}$ и $h_j \in \mathbb{C}(\mathbf{h})$, то

$$F(v_1, v_2) = \sum_j P J_j^{(1)} C J_j^{(2)} P h_j = \sum_{j,k} P J_j^{(1)} S(b_k) a_k J_j^{(2)} P h_j q^{-2(\rho + \langle \rho, \nu(J_j^{(2)}) \rangle)}. \quad (4.16)$$

Используем следующие свойства коумножения элемента $(1 \otimes S)R$:

$$(\Delta \otimes 1)(1 \otimes S)R = \sum_{k,l} a_l \otimes a_k \otimes S(b_k) S(b_l), \quad (4.17)$$

$$(1 \otimes \Delta)(1 \otimes S)R = \sum_{k,l} a_k a_l \otimes S(b_k) \otimes S(b_l). \quad (4.18)$$

Соотношение (4.17) влечет за собой следующее тождество для любых $w_1 \in V^{(1)}$, $w_2 \in V^{(2)}$:

$$\begin{aligned} P w_1 \sum_k S(b_k) a_k w_2 P &= P w_1 \sum_{k,l} S(b_k) S(b_l) \hat{a}_l(w_2) a_k P = \\ &= P w_1 \sum_l S(b_l) \hat{a}_l(w_2) P q^{-\sum_i (x_i + \langle x_i, \nu(w_2) \rangle) x_i}, \end{aligned} \quad (4.19)$$

так что

$$F(v_1, v_2) = \sum_j P J_j^{(1)} \sum_k S(b_k) \hat{a}_k(J_j^{(2)}) P h_j q^{-\sum_i (x_i + \langle x_i, \nu(J_j^{(2)}) \rangle) x_i - 2(\rho + \langle \rho, \nu(J_j^{(2)}) \rangle)}. \quad (4.20)$$

Известно [12], что $(1 \otimes S^{-1})R = R^{-1}$, т.е.

$$\sum_{k,l} S^{-1}(b_l) b_k \otimes a_l a_k = 1 \otimes 1. \quad (4.21)$$

Применение $S \otimes 1$ к обеим частям (4.21) дает теперь равенство

$$\sum_{k,l} S(b_k) b_l \otimes a_l a_k = 1 \otimes 1. \quad (4.22)$$

Применяя его к тензорному произведению $J_j^{(1)} \otimes \hat{a}_k(J_j^{(2)})$ в правой части (4.20), получаем

$$\begin{aligned} F(v_1, v_2) = & \sum_{j,k,l,m} P \widehat{S(b_l)} \hat{b}_m(J_j^{(1)}) S(b_k) \hat{a}_m \hat{a}_l \hat{a}_k(J_j^{(2)}) P h_j \times \\ & \times q^{-\sum_i (x_i + \langle x_i, \nu(J_j^{(2)}) \rangle) x_i - 2(\rho + \langle \rho, \nu(J_j^{(2)}) \rangle)}, \end{aligned}$$

так что использование свойства коумножения (4.18) дает

$$\begin{aligned} F(v_1, v_2) = & \sum_{j,m} P \hat{b}_m(J_j^{(1)}) \hat{a}_m(J_j^{(2)}) P h_j \times \\ & \times q^{-\sum_i (x_i + \langle x_i, \nu(J_j^{(2)}) \rangle) x_i - 2(\rho + \langle \rho, \nu(J_j^{(2)}) \rangle) - \sum_i (x_i + \langle x_i, \nu(J_j^{(1)}) + \nu(J_j^{(2)}) \rangle) \langle x_i, \nu(J_j^{(2)}) \rangle} = \\ & = P R_0^{21} q^{-\sum_i ((x_i^R)^2 + (x_i^{(2)})^2 + 2x_i^R x_i^{(2)} + x_i^{(1)} x_i^{(2)}) - 2\rho^R - 2\rho^{(2)}} J(v_1, v_2) P = \\ & = P R_0^{21} q^{-\sum_i ((x_i^R)^2 + (x_i^{(2)})^2 + 2x_i^R x_i^{(2)}) - 2\rho^R - 2\rho^{(2)}} J(v_1, v_2) P. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Сравнивая (4.16) с (4.23) и сокращая обе части на $q^{-\sum_i (x_i^R)^2 - 2\rho^R}$, получаем в конце концов требуемое соотношение (4.10).

Так же как и в классическом случае, равенства (4.10) и (4.11) влекут за собой рекуррентные соотношения для коциклов $\mathbf{J}^L(\lambda)$ и $\mathbf{J}^R(\lambda)$, определенных, наряду с (3.21), соотношениями (3.25) и (3.26).

СЛЕДСТВИЕ 2. Для $q \neq 1$ динамические коциклы $\mathbf{J}^L(\lambda)$ и $\mathbf{J}^R(\lambda)$ удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям:

$$R_0^{21} q^{-1 \otimes 2\theta^L(\lambda)} \mathbf{J}^L(\lambda) = \mathbf{J}^L(\lambda) q^{-1 \otimes 2\theta^L(\lambda)}, \quad (4.24)$$

$$R_0^{21} q^{-2\theta^R(\lambda) \otimes 1} \mathbf{J}^R(\lambda) = \mathbf{J}^R(\lambda) q^{-2\theta^R(\lambda) \otimes 1}. \quad (4.25)$$

5. СВЯЗЬ С ДИНАМИЧЕСКИМ ТВИСТОМ

Согласно (3.11) и (3.12) каждый элемент s редукционной алгебры $W^{\{\mathbf{n}_+\}}$ определяет сплетающий оператор $\bar{s}^R(\lambda): M_\lambda \rightarrow W \otimes M_{\lambda-\nu}$, где ν – вес s . Сравним теперь более детально редукционную алгебру $TV^{\{\mathbf{n}_+\}}$ тензорной алгебры TV локально-конечного $U(\mathfrak{g})$ -модуля V с алгеброй сплетающих операторов в обозначениях, принятых в работе [7].

Для всякого локально-конечного $U(\mathfrak{g})$ -подмодуля $U \subset TV$ и вектора $u \in U$ рассмотрим сплетающий оператор [7]

$$\Phi_\lambda^u: M_\lambda \rightarrow M_{\lambda-\nu(u)} \otimes U, \quad (5.1)$$

определенный нормировочным условием $\Phi_\lambda^u(1_\lambda) = 1_{\lambda-\nu(u)} \otimes u + \text{l.o.t.}$, где l.o.t. означает слагаемые меньшего (по первой компоненте) веса, а 1_λ и $1_{\lambda-\nu(u)}$ суть старшие векторы модулей Верма M_λ и $M_{\lambda-\nu(u)}$. Обозначим через $\dot{\Phi}_\lambda^u$ сплетающий оператор, полученный из Φ_λ^u применением перестановки тензорных сомножителей:

$$\dot{\Phi}_\lambda^u: M_\lambda \rightarrow U \otimes M_{\lambda-\nu(u)}, \quad \dot{\Phi}_\lambda^u = P^{12} \Phi_\lambda^u. \quad (5.2)$$

Сплетающие операторы $\dot{\Phi}_\lambda^u$ и $\bar{s}_u^R(\lambda)$, $u \in TV$, образуют два различных базиса редукционного алгеброида $TV_{(\lambda, R)}^{\{\mathbf{n}_+\}}$. Следующее предложение устанавливает соответствие между ними.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Сплетающие операторы $\dot{\Phi}_\lambda^u$ и $\bar{s}_u^R(\lambda)$ связаны следующим образом:*

$$\bar{s}_u^R(\lambda) = \dot{\Phi}_\lambda^{P(\lambda-\nu(u))u}. \quad (5.3)$$

Здесь $\nu(u)$ – вес вектора u , а $P(\mu) = T_\mu(P)$ – сдвинутый проектор P .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению сплетающего оператора $\dot{\Phi}_\lambda^u$ старший (по второй тензорной компоненте) член старшего вектора $\dot{\Phi}_\lambda^u(1_\lambda)$ равен $u \otimes 1_{\lambda-\nu(u)}$. С другой стороны, вектор $\bar{s}_u^R(\lambda)(1_\lambda)$ определен как $\Delta(P)(u \otimes 1_{\lambda-\nu(u)})$. Таким образом, для наших целей нам необходимо вычислить старший член вектора $\Delta(P)(u \otimes 1_{\lambda-\nu(u)})$.

Представим P в виде $P = \sum_i f_i e_i a_i(h)$, где $f_i \in \mathbf{n}_-$, $e_i \in \mathbf{n}_+$ и $a_i(h)$ – рациональные функции картановских элементов. Тогда

$$\Delta(P) = \sum_i (f_i^{(1)} + f_i^{(2)})(e_i^{(1)} + e_i^{(2)})a_i(h_i^{(1)} + h_i^{(2)}).$$

Ненулевой вклад в старший член вектора $\Delta(P)(u \otimes 1_{\lambda-\nu(u)})$ могут внести только слагаемые

$$\sum_i f_i^{(1)} e_i^{(1)} a_i(h_i^{(1)} + h_i^{(2)})(u \otimes 1_{\lambda-\nu(u)}).$$

Их сумма в точности равна

$$P(\lambda - \nu(u))u \otimes 1_{\lambda-\nu(u)}.$$

Заметим, что для общего веса λ оператор $P(\lambda)$ обратим на любом конечномерном $U(\mathfrak{g})$ -модуле, так что мы действительно имеем дело с заменой базиса.

По определению матрицы слияния $\mathcal{J}_{V,W}$, данному в работе [7], для любых $v \in V$, $w \in W$, где V и W – конечномерные $U(\mathfrak{g})$ -модули, имеем

$$(\Phi_{\lambda-\nu(v)}^w \otimes 1) \circ \Phi_{\lambda}^v = \Phi_{\lambda}^{\mathcal{J}(w,v)}: M_{\lambda} \rightarrow M_{\lambda-\nu(v)-\nu(w)} \otimes W \otimes V, \quad (5.4)$$

откуда, согласно (5.2),

$$(1 \otimes \dot{\Phi}_{\lambda-\nu(v)}^w) \circ \dot{\Phi}_{\lambda}^v = \dot{\Phi}_{\lambda}^{P^{12}\dot{\mathcal{J}}(w,v)}: M_{\lambda} \rightarrow V \otimes W \otimes M_{\lambda-\nu(v)-\nu(w)}, \quad (5.5)$$

где $\dot{\mathcal{J}}$ означает матрицу слияния для алгебры $U^{\circ}(\mathfrak{g})$, в которой в качестве коумножения использовано противоположное к исходному. С другой стороны, в редукционной алгебре мы имеем следующие тождества для соответствующих сплетающих операторов:

$$\begin{aligned} \bar{s}_w^R(\lambda - \nu(v)) \circ \bar{s}_v^R(\lambda) &= \overline{s_v \cdot s_w}^R(\lambda) = \bar{s}_{J^R(v,w)}^R(\lambda), \\ \bar{s}_w^L(\lambda) \circ \bar{s}_v^L(\lambda + \nu(w)) &= \overline{s_v \cdot s_w}^L(\lambda) = \bar{s}_{J^L(v,w)}^L(\lambda), \end{aligned} \quad (5.6)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{s}_{J^R(v,w)}^R(\lambda): M_{\lambda} &\rightarrow V \otimes W \otimes M_{\lambda-\nu(v)-\nu(w)}, \\ \bar{s}_{J^L(v,w)}^L(\lambda): M_{\lambda+\nu(v)+\nu(w)} &\rightarrow V \otimes W \otimes M_{\lambda}. \end{aligned}$$

Сравнивая (5.5) и (5.6) и принимая во внимание (5.3), получаем

$$\Delta P(\lambda - \nu(v) - \nu(w)) J^R(v, w) = P^{12} \dot{\mathcal{J}}(P(\lambda - \nu(v) - \nu(w))w, P(\lambda - \nu(v))v), \quad (5.7)$$

или

$$J^R(\lambda) = \Delta(P)^{-1}(\lambda - h^{(1)} - h^{(2)}) \dot{\mathcal{J}}^{21}(\lambda) P(\lambda - h^{(1)} - h^{(2)}) \otimes P(\lambda - h^{(1)}). \quad (5.8)$$

Матрица слияния $\mathcal{J}$ удовлетворяет следующему уравнению АБРР [7]:

$$R_0^{21} q^{-1 \otimes 2\theta(\lambda)} \mathcal{J}(\lambda) = \mathcal{J}(\lambda) q^{-1 \otimes 2\theta(\lambda)}, \quad (5.9)$$

где

$$\theta(\lambda) = \theta^R(\lambda) = \frac{1}{2} \sum_i \hat{x}_i^2 - \lambda - \rho. \quad (5.10)$$

Из сравнения (5.10) и (4.24) мы можем заключить, что

$$\mathbf{J}^L(\lambda) = \mathcal{J}(-\lambda - 2\rho). \quad (5.11)$$

Сравнивая эти результаты, видим, что сдвинутый экстремальный проектор устанавливает связь между динамическим коциклом $\mathcal{J}(\lambda)$ и противоположным к коциклу противоположного коумножения $\dot{\mathcal{J}}^{21}(\lambda)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(-\lambda - 2\rho + h^{(1)} + h^{(2)}) &= \Delta(P)^{-1}(\lambda - h^{(1)} - h^{(2)}) \dot{\mathcal{J}}^{21}(\lambda) \times \\ &\times P(\lambda - h^{(1)} - h^{(2)}) \otimes P(\lambda - h^{(1)}). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Вероятно, соотношение (5.12) может быть извлечено из свойства коумножения $P(\lambda)$, используемого в работах [13].

Благодарности. Автор благодарен О. Огиевскому, А. Молеву, А. Столину, В. Толстому и П. Этингофу за полезные обсуждения по связанным с работой темам. Эта работа была поддержана грантом РФФИ № 01-01-00539, грантом поддержки научных школ № 00-15-96557 и грантом CRDF № RMI-2334-MO-02.

Список литературы

- [1] *J. Mickelsson*. Rep. Math. Phys. 1973. V. 4. № 4. P. 303–318.
- [2] *Р. М. Ашерова, Ю. Ф. Смирнов, В. Н. Толстой*. Матем. заметки. 1979. Т. 26. С. 15–25.
- [3] *Д. П. Желобенко*. Изв. АН СССР. Сер. матем. 1988. Т. 52. № 4. С. 758–773.
- [4] *Д. П. Желобенко*. Представления редутивных алгебр Ли. М.: Наука, 1994.
- [5] *G. Felder*. Conformal field theory and integrable systems associated with elliptic curves. In: Proc. of the Intern. Congress of Mathematicians (Zurich, Aug. 3–11, 1994). Basel: Birkhäuser, 1995. P. 1247–1255.
- [6] *D. Arnaudon, E. Buffenoir, E. Ragoucy, Ph. Roche*. Lett. Math. Phys. 1998. V. 44. № 3. P. 201–214.
- [7] *P. Etingof, O. Schiffmann*. Lectures on the dynamical Yang–Baxter equation. In: Quantum groups and Lie theory (Durham 1999). London Math. Soc. Lect. Notes Ser. V. 290. Ed. A. Pressley. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2001; math.QA/9908064.
- [8] *P. Etingof, A. Varchenko*. Commun. Math. Phys. 1999. V. 205. № 1. P. 19–52.
- [9] *В. Н. Толстой*. УМН. 1989. Т. 44. № 1. С. 211–212.
- [10] *S. M. Khoroshkin, V. N. Tolstoy*. Extremal projector and universal R -matrix for quantized contragredient Lie (super)algebras. In: Quantum Groups and Related Topics. Proc. of the First Max Born Symp. (Wroclaw, 1991). Math. Phys. Stud. V. 13. Ed. R. Gielserak. Dordrecht: Kluwer, 1992. P. 23–32.
- [11] *A. Joseph, G. Letzter*. J. Algebra. 1992. V. 153. P. 289–318.
- [12] *В. Г. Дринфельд*. Алгебра и анализ. 1989. Т. 1. № 2. С. 30–46.
- [13] *P. Etingof, A. Varchenko*. Adv. Math. 2002. V. 167. № 1. P. 74–127; *V. Tarasov, A. Varchenko*. Int. Math. Res. Notices. 2000. V. 15. P. 801–829.