Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. П. Санкович, О некоторых свойствах функциональных интегралов по мере Боголюбова, *ТМФ*, 2001, том 126, номер 1, 149–163

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf421>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 17:20:20

© 2001 г.

Д. П. Санкович*

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ПО МЕРЕ БОГОЛЮБОВА

Рассмотрены вопросы интегрирования по мере Боголюбова в пространстве непрерывных функций. Вычислены некоторые функциональные интегралы по этой мере. Построены приближенные формулы, точные для функциональных многочленов заданной степени, а также формулы, точные для интегрируемых функционалов более широкого класса. Доказано неравенство для следов и получена оценка сверху для гиббсовского равновесного среднего от квадрата оператора координаты в случае одномерного нелинейного осциллятора с положительным симметричным взаимодействием.

1. ВВЕДЕНИЕ

Вопросами интегрирования функций, заданных на абстрактных множествах, начал заниматься Фреше [1], обобщив соответствующим образом метод Лебега. Несколько позднее эти проблемы изучались Даниелем [2], [3], который воспользовался идеей продолжения линейных функционалов. Основой его теории является совокупность $H(X)$ элементарных функций $h(x)$ на множестве X с заданным для них элементарным интегралом $I(h)$. При выполнении некоторых условий эта совокупность может быть расширена до некоторой совокупности L , на которую распространяется интеграл I , причем так, что L представляет собой банахово пространство с нормой $\|\varphi\| = I(|\varphi|)$. В этом и состоит построение интеграла Лебега в схеме Даниеля [4], [5].

С теорией интеграла Даниеля много общего имеют ранние результаты Винера [6], который определил процесс интегрирования функционалов и показал, что рассмотренный им интеграл является интегралом Даниеля. Следует отметить, что во всех работах Винера начиная с 1921 года задача функционального интегрирования связывается с изучением броуновского движения частиц. На сегменте $[0, 1]$ определяется множество непрерывных действительных функций $C = C[0, 1]$, удовлетворяющих условию $x(0) = 0$. При этом $x(t)$ является координатой частицы, совершающей броуновское движение вдоль оси под действием случайных толчков и находящейся при $t = 0$ в начале координат. Винеровская мера имеет нулевое среднее и корреляционную функцию $\min(t, s)$. Эта мера включается в более общий класс мер в функциональных пространствах, которые принято называть гауссовыми.

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия

Впервые функциональное интегрирование в квантовой физике было применено Фейнманом [7]. Конструкция функционального (континуального) интеграла Фейнмана имеет некоторые общие свойства с интегралом Винера. Однако эти интегралы существенно различаются [8].

Идея записи физических наблюдаемых в виде континуальных интегралов получила свое развитие в квантовой теории поля для представления функций Грина. В свое время почти одновременно возникли два способа такого представления. Один из них основывался на формальном интегрировании уравнений в вариационных производных для функций Грина [9]–[12]. Боголюбовым был развит другой путь [13], который исходил из представления функций Грина через вакуумные ожидания хронологических произведений, причем операция усреднения по бозонному вакууму интерпретировалась как функциональный интеграл. В работе [14] боголюбовский способ функционального интегрирования был применен к вопросам градиентных преобразований электродинамических функций Грина и к исследованию модели Блоха–Нордсика. В дальнейшем Боголюбов вернулся к этому построению уже в рамках статистической механики при исследовании модели полярона [15]. В работе [16] было показано, что мера, возникающая в подходе Боголюбова, является гауссовой мерой в соответствующем пространстве непрерывных функций. Гиббсовские равновесные средние от хронологических произведений операторов выражаются в виде функциональных интегралов по данной мере.

Ниже рассмотрены некоторые свойства функциональных интегралов по мере Боголюбова. При этом используются методы теории гауссовых мер в банаховых пространствах [17], [18] и теории приближенного вычисления интегралов по гауссовым мерам [19], [20]. В разделе 2 приведены основные результаты теории интегрирования в абстрактных пространствах в приложении к конкретному случаю боголюбовской меры. В разделе 3 вычислены некоторые простейшие функциональные интегралы по мере Боголюбова. В разделе 4 рассмотрены формулы приближенного интегрирования. В разделе 5 доказано одно неравенство для следов, применяемое в теории фазовых переходов. Основное внимание в статье уделено приложению методов функционального интегрирования к задачам равновесной квантовой статистической механики.

2. МЕРА БОГОЛЮБОВА В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

В работе [16] показано, что в пространстве $X = C^0[0, \beta]$ непрерывных на отрезке $[0, \beta]$ функций с равномерной метрикой $\rho = \max_{t \in [0, \beta]} |x(t) - y(t)|$, удовлетворяющих условию $x(0) = x(\beta)$, определена гауссова мера μ_B с нулевым средним и корреляционной функцией

$$B(t, s) = \frac{1}{2m\omega \operatorname{sh} \frac{\beta\omega}{2}} \operatorname{ch} \left(\omega |t - s| - \frac{\beta\omega}{2} \right). \quad (1)$$

На пространстве с мерой $\{X, G, \mu_B\}$, где G – выделенная на пространстве X σ -алгебра его подмножеств, рассматриваются измеримые функционалы $F(x)$. Тогда для гиббсовского равновесного среднего от T -произведения, взятого по гамильтониану $\hat{\Gamma}$ гармони-

ческого осциллятора, имеет место формула

$$\langle T[F(\hat{Q}(t))] \rangle_{\hat{\Gamma}} = \int_X F(x(t)) d\mu_B(x), \quad (2)$$

где интеграл понимается как интеграл Даниеля по пространству X ,

$$\hat{\Gamma} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{q}^2, \quad \hat{Q}(t) = e^{t\hat{\Gamma}}\hat{q}e^{-t\hat{\Gamma}}, \quad \langle \dots \rangle_{\hat{\Gamma}} = \frac{\text{tr}(\dots e^{-\beta\hat{\Gamma}})}{\text{tr} e^{-\beta\hat{\Gamma}}},$$

величины $\hat{q}$, $\hat{p}$ представляют собой соответственно операторы координаты и импульса частицы с массой m и удовлетворяют коммутационному соотношению $[\hat{q}, \hat{p}] = i$ (предполагается, что $\hbar = 1$), β – обратная температура, ω – собственная частота осциллятора ($\beta > 0$, $\omega > 0$). Для интегрируемого функционала $F(x)$ среднее в формуле (2) существует и конечно.

Так определенную меру μ_B будем называть мерой Боголюбова.

Ядро $B(t, s)$ корреляционного оператора B симметрично и эрмитово. Оно принадлежит пространству L^2 функций двух переменных с суммируемым по мере Лебега квадратом в области $0 \leq t \leq \beta$, $0 \leq s \leq \beta$. В силу теоремы Шмидта [5] всякая функция $A(t, s)$ с суммируемым квадратом, симметричная относительно своих аргументов, разлагается в смысле сходимости в среднем в ряд

$$A(t, s) = \sum_n \lambda_n \Phi_n(t) \overline{\Phi_n(s)}, \quad (3)$$

где $\{\Phi_n(t)\}$ – ортонормированная последовательность собственных функций, а $\{\lambda_n\}$ – последовательность соответствующих собственных значений оператора A , порожденного ядром $A(t, s)$. Для корреляционной функции (1) имеет место [16] разложение (3), где

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \exp\left(\frac{2\pi i n t}{\beta}\right), \quad \lambda_n = \frac{1}{m} \frac{1}{\omega^2 + (2\pi n \beta^{-1})^2}$$

и n пробегает все целые числа от $-\infty$ до ∞ . По теореме Мерсера [5] ряд (3) для ядра $B(t, s)$ сходится равномерно, т.к. оператор B , порожденный ядром $B(t, s)$, положителен. Отметим также, что этот оператор вполне непрерывен. Разложение (3) для корреляционной функции $B(t, s)$ можно записать в пространстве действительных функций в виде

$$B(t, s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda_n \varphi_n(t) \varphi_n(s),$$

где

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\beta}} \cos \frac{2\pi n t}{\beta}, & n > 0; \\ \sqrt{\frac{2}{\beta}} \sin \frac{2\pi n t}{\beta}, & n < 0; \\ \sqrt{\frac{1}{\beta}}, & n = 0. \end{cases}$$

Сопряженное к X пространство $X' = V_0[0, \beta]$ есть пространство функций ограниченной вариации на $[0, \beta]$, удовлетворяющих условиям

$$g(0) = 0, \quad g(t) = \frac{1}{2}[g(t+0) + g(t-0)] \quad \text{для } t \in (0, \beta).$$

В силу теоремы Рисса [5] линейные функционалы в X имеют вид

$$\langle \varphi, x \rangle = \int_0^\beta x(t) d\varphi(t),$$

где интеграл понимается как интеграл Стильтьеса и $x(t) \in X$, $\varphi(t) \in V_0[0, \beta]$. Корреляционный функционал в пространстве X' можно записать в виде

$$K(\varphi, \psi) = \int_0^\beta \int_0^\beta B(t, s) d\varphi(t) d\psi(s),$$

где корреляционная функция меры имеет вид

$$B(t, s) = \int_X x(t)x(s) d\mu(x).$$

В силу теоремы Кьюлбса [21] гильбертово пространство H , порожденное мерой μ , представляет собой линейную оболочку собственных функций $\{\varphi_n(t)\}$ ядра $B(t, s)$, замкнутую относительно нормы, соответствующей скалярному произведению

$$(x, y)_H = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_n} \left(\int_0^\beta x(t) \varphi_n(t) dt \right) \left(\int_0^\beta y(t) \varphi_n(t) dt \right).$$

Функции $\{e_n(t) = \sqrt{\lambda_n} \varphi_n(t)\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ образуют базис в пространстве H , и для почти всех $x \in X$ имеет место разложение

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^\beta x(t) \varphi_n(t) dt \right) \varphi_n(t).$$

Общий вид линейного измеримого функционала на X определяется выражением

$$(a, x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_n} \left(\int_0^\beta x(t) \varphi_n(t) dt \right) \left(\int_0^\beta a(t) \varphi_n(t) dt \right),$$

где $a \in H$, $x \in X$. Полную ортонормированную систему в H образуют также функции

$$e_n(t) = \int_0^\beta B_{1/2}(t, u) \alpha_n(u) du,$$

где $B_{1/2}(t, u)$ — ядро оператора $B^{1/2}$, $\alpha_n(t)$ — произвольная полная ортонормальная система в пространстве $L_2[0, \beta]$.

Отметим, что замыкание $\overline{H}$ гильбертова пространства H является носителем меры μ и оно плотно почти всюду в X [22]. Тройка (X, H, μ) называется абстрактным винеровским пространством, а мера μ — абстрактной мерой Винера [23].

Заметим также, что в случае меры Боголюбова функция $G(t, s) = -mB(t, s)$ является функцией Грина краевой задачи

$$\begin{cases} y'' - \omega^2 y = 0, \\ y(0) = y(\beta), \\ y'(0) = y'(\beta) \end{cases}$$

на отрезке $[0, \beta]$.

3. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ ИНТЕГРАЛ ПО МЕРЕ БОГОЛЮБОВА

Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ — линейно независимые элементы из некоторого сепарабельного гильбертова пространства H , замыкание которого является носителем меры μ и которое плотно в X почти всюду. Тогда

$$\int_X F[(a_1, x), (a_2, x), \dots, (a_n, x)] d\mu(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \frac{1}{\sqrt{\det A}} \int_{R^n} e^{-\frac{1}{2}(A^{-1}u, u)} F(u) du, \quad (4)$$

если существует один из этих интегралов, где A — матрица с элементами $a_{ij} = (a_i, a_j)_H$; $i, j = 1, 2, \dots, n$; $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$; $du = du_1 du_2 \dots du_n$. Если в качестве элементов a_j взять ортонормированные векторы пространства H , то формула (4) принимает вид

$$\int_X F[(a_1, x), (a_2, x), \dots, (a_n, x)] d\mu(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{R^n} e^{-\frac{1}{2}(u, u)} F(u) du.$$

Особенно простой вид будет у формулы (4) в случае, когда функционал $F(x)$ зависит только от значений функции $x(t)$ в конечном числе точек. Если, например,

$$F(x(t)) = x(t_1)x(t_2) \dots x(t_n),$$

то выполняется теорема Вика, в силу которой

$$\int_X x(t_1)x(t_2) \dots x(t_n) d\mu(x) = \sum B(t_{i_1}, t_{i_2})B(t_{i_3}, t_{i_4}) \dots B(t_{i_{2k-1}}, t_{i_{2k}}),$$

где $n = 2k$ и суммирование проводится по всем $(2k)!/(2^k k!)$ способам разбиения чисел $1, 2, \dots, 2k$ на k различных неупорядоченных пар

$$(i_1, i_2), (i_3, i_4), \dots, (i_{2k-1}, i_{2k}).$$

При $n = 2k + 1$ этот интеграл обращается в нуль. Так, в частности, в случае меры Боголюбова

$$\begin{aligned} \langle \hat{q}^2 \rangle_{\hat{\Gamma}} &= \int_X x^2(t) d\mu_B(x) = B(t, t) = \frac{1}{2m\omega} \operatorname{cth} \frac{\beta\omega}{2}, \\ \langle e^{a\hat{q}^2} \rangle_{\hat{\Gamma}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} (a \langle \hat{q}^2 \rangle_{\hat{\Gamma}})^n = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a}{m\omega} \operatorname{cth} \frac{\beta\omega}{2}}}, \end{aligned}$$

где в последней формуле необходимо считать, что $-m\omega \operatorname{th}(\beta\omega/2) \leq a < m\omega \operatorname{th}(\beta\omega/2)$.

Рассмотрим на X квадратичный функционал

$$A(x, x) = \sum_{k,j=1}^{\infty} a_{kj}(e_k, x)(e_j, x),$$

где $a_{kj} = (Ae_k, e_j)_H$, A — самосопряженный ядерный оператор, действующий из H в H , $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — базис в H . Тогда, пользуясь формулой (4), можно вычислить следующие интегралы:

$$\int_X A(x, x) d\mu(x) = \operatorname{tr} A, \quad \int_X A^2(x, x) d\mu(x) = (\operatorname{tr} A)^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2,$$

где λ_k – собственные значения оператора A . Имеет место также равенство

$$\int_X e^{\frac{\lambda}{2} A(x,x)} d\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{D_A(\lambda)}}, \quad (5)$$

где $D_A(\lambda)$ – характеристический определитель оператора A в точке λ ,

$$\operatorname{Re} \lambda < \frac{1}{\lambda_1} \quad (\lambda_1 > \lambda_2 > \dots),$$

а

$$\sqrt{D_A(\lambda)} = \sqrt{|D_A(\lambda)|} \exp \left[-\frac{i}{2} \arg D_A(\lambda) \right].$$

Выберем в формуле (5) в качестве квадратичного функционала

$$A(x, x) = \int_0^\beta x^2(t) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k (e_k, x)^2,$$

где $e_k = \sqrt{\lambda_k} \varphi_k$, а λ_k и φ_k – собственные значения и собственные функции ядра $B(t, s)$. Воспользуемся формулой [5]

$$-\frac{d}{d\lambda} \ln D_B(\lambda) = \int_0^\beta B(t, t) dt + \lambda \int_0^\beta B^{(2)}(t, t) dt + \dots + \lambda^k \int_0^\beta B^{(k)}(t, t) dt + \dots,$$

где $B^{(k)}$ – соответствующие итерированные ядра, которые в случае меры Боголюбова имеют вид

$$B^{(k)}(t, t) = \frac{1}{\beta m^k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{[\omega^2 + (2\pi n\beta^{-1})^2]^k}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} -\frac{d}{d\lambda} \ln D_B(\lambda) &= \frac{1}{\lambda} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{m} \right)^k \frac{1}{[\omega^2 + (2\pi n\beta^{-1})^2]^k} = \\ &= \frac{\beta}{2m} \frac{1}{\sqrt{\omega^2 - \frac{\lambda}{m}}} \operatorname{cth} \left(\frac{\beta}{2} \sqrt{\omega^2 - \frac{\lambda}{m}} \right), \end{aligned}$$

где $\lambda < m\omega^2$. Интегрируя последнее уравнение, получаем

$$D_B(\lambda) = \frac{\operatorname{sh}^2 \left(\frac{\beta}{2} \sqrt{\omega^2 - \frac{\lambda}{m}} \right)}{\operatorname{sh}^2 \frac{\beta\omega}{2}},$$

откуда следует формула

$$\int_X \exp \left(\frac{\lambda}{2} \int_0^\beta x^2(t) dt \right) d\mu_B(x) = \frac{\operatorname{sh} \frac{\beta\omega}{2}}{\operatorname{sh} \left(\frac{\beta}{2} \sqrt{\omega^2 - \frac{\lambda}{m}} \right)}, \quad \lambda < m\omega^2. \quad (6)$$

Заметим, что моменты

$$m_k = \int_X A(x, x)^k d\mu_B(x) = \int_X \left(\int_0^\beta x^2(t) dt \right)^k d\mu_B(x)$$

могут быть определены с помощью формулы (6) и равенства

$$m_{k+1} = 2^{k+1} \frac{d^{k+1}}{d\lambda^{k+1}} \frac{1}{\sqrt{D_B(\lambda)}} \Big|_{\lambda=0}.$$

Если принять во внимание соотношение

$$D_B(\lambda) = \prod_{n=-\infty}^{\infty} (1 - \lambda \lambda_n),$$

то из найденного выше значения определителя Фредгольма ядра $B(t, s)$ получается следующая формула для бесконечного произведения:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{a}{n^2 + b^2} \right) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a}{b^2}}} \frac{\operatorname{sh}(\pi b \sqrt{1 + \frac{a}{b^2}})}{\operatorname{sh}(\pi b)}, \quad a > -b^2.$$

4. ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Рассмотрим приближенные формулы, точные для функциональных многочленов заданной степени.

Пусть X есть пространство $C[a, b]$ непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций $x(t)$. Будем считать, что в X задана некоторая гауссова мера μ с нулевым средним и корреляционной функцией $B(t, s)$. Произвольный непрерывный функциональный многочлен $P_n(x)$ степени n на пространстве C имеет вид

$$P_n(x) = p_0 + \sum_{j=1}^n \int_a^b \cdots \int_a^b x(t_1) \dots x(t_j) d_{t_1 \dots t_j}^{(j)} g(t_1, \dots, t_j),$$

где $p_0 = \text{const}$, а остальные слагаемые представляют собой кратные интегралы Стильтьеса.

ТЕОРЕМА 1 ([19]). Пусть ν – симметричная вероятностная мера на борелевских множествах из R , а заданная на $R \times [a, b]$ функция $\rho(u, t)$ такова, что

$$1) \quad \rho(u, t) = -\rho(-u, t),$$

$$2) \quad \prod_{j=1}^m \rho(u, t_j) \in L(R, \nu) \text{ для } 1 \leq m \leq 2n + 1,$$

$$3) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \rho(u, t) \rho(u, s) d\nu(u) = B(t, s). \quad (7)$$

Тогда формула

$$\int_C F(x) d\mu(x) \approx \int_{R^n} F(\theta_n(u, \cdot)) d\nu_n(u), \quad (8)$$

где функция

$$\theta_n(u, t) = \sum_{j=1}^n c_j \rho(u_j, t),$$

c_j^2 — корни многочлена

$$Q_n(z) = \sum_{k=0}^n \frac{z^{n-k}}{k!},$$

ν_n — мера в R^n , являющаяся n -кратным декартовым произведением мер ν , точна для функциональных многочленов степени $2n+1$.

ТЕОРЕМА 2 ([19]). Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда формула

$$\begin{aligned} \int_C F(x) d\mu(x) \approx & \frac{(-1)^n (A-n)^n}{n!} F(0) + \\ & + \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \frac{(A-n+k)^n}{k! (n-k)!} \int_{R^k} F(\theta_k^{(n)}(u, \cdot)) d\nu_k(u), \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \theta_k^{(n)}(u, t) &= \frac{1}{\sqrt{A-n+k}} \sum_{j=1}^k \rho(u_j, t), \quad R^k = \underbrace{R \times R \times \dots \times R}_k, \\ d\nu_k(u) &= d\nu(u_1) \dots d\nu(u_k), \quad k = 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

A — произвольная постоянная, точна для всех функциональных многочленов степени $2n+1$.

В случае $A = n$ формула (9) принимает вид [24]

$$\int_C F(x) d\mu(x) \approx I_n(F),$$

где

$$I_n(F) = \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \frac{k^n}{k! (n-k)!} \int_{R^k} F(\theta_k(u, \cdot)) d\nu_k(u)$$

и

$$\theta_k(u, t) = \frac{1}{\sqrt{k!}} \sum_{j=1}^k \rho(u_j, t).$$

Нетрудно убедиться в справедливости следующего рекуррентного соотношения для величины $I_n(F)$:

$$I_n(F) = \frac{n^n}{n!} \int_{R^n} F(\theta_n(u, \cdot)) d\nu_n(u) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{kn^{n-1-k}}{(n-k)!} I_k(F).$$

Получение формул вида (8), (9) для приближенного вычисления интегралов по гауссовой мере связано с нахождением функции $\rho(u, t)$ со свойствами 1–3 из теоремы 1. При этом наиболее трудным является решение уравнения (7).

Будем искать решение этого уравнения сначала для случая чисто дискретной меры ν на прямой. Напомним, что мера на прямой, сосредоточенная целиком на конечном или счетном множестве точек, называется дискретной.

Пусть на отрезке $[a, b]$ задано конечное или счетное число точек $\{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ и пусть каждой точке x_n поставлено в соответствие положительное число h_n , причем

$$\sum_n h_n < \infty.$$

Определим функцию f на $[a, b]$, положив $f(x) = \sum_{x_n < x} h_n$. Функция $f(x)$ не убывает и непрерывна слева. Если точка x совпадает с одной из точек x_n , скажем $x = x_{n_0}$, то

$$f(x_{n_0} + 0) - f(x_{n_0} - 0) = h_{n_0}.$$

Если x не совпадает ни с одной из точек x_n , то в этой точке функция $f(x)$ непрерывна. Функция $f(x)$ называется функцией скачков.

Зададим меру ν на R в виде

$$\nu\{(-\infty, x)\} = f(x)$$

и будем считать, что

$$\sum_n h_n = 1, \quad h_n = h_{-n}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Если положить $x_n = n$, то

$$\int_R \rho(u, s) \rho(u, t) d\nu(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n \rho(n, s) \rho(n, t).$$

Разложив корреляционную функцию в ряд по полной системе ортонормированных собственных функций

$$B(t, s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda_n \varphi_n(t) \varphi_n(s),$$

видим, что все условия теоремы 1 будут выполнены, если положить

$$\rho(u, t) = \begin{cases} 0 & \text{для } -1 < u < 1, \\ \sqrt{\frac{\lambda_n}{2h_n}} \varphi_n(t) & \text{для } u \in [n, n+1), \\ -\sqrt{\frac{\lambda_n}{2h_n}} \varphi_n(t) & \text{для } u \in (-n-1, -n], \quad n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

В случае абсолютно непрерывной меры ν решение уравнения (7) было получено для винеровской меры, условной меры Винера и ряда других мер. Для меры Боголюбова можно построить следующее решение уравнения (7). Выберем в качестве ν нормированную меру Лебега на отрезке $[-\beta, \beta]$, т.е.

$$d\nu(u) = \frac{1}{2\beta} du.$$

Тогда

$$\rho(u, t) = \sqrt{\frac{\beta}{m}} \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1} e^{\omega(t-|u|)} [\theta(t-|u|) + e^{\beta\omega} \theta(|u|-t)] \operatorname{sign} u. \quad (10)$$

Можно проверить, что так выбранные мера ν и функция $\rho(u, t)$ удовлетворяют всем условиям теоремы 1.

Итак, в рассматриваемом случае боголюбовской меры имеем по теореме 1

$$\int_X F(x) d\mu_B(x) \approx \frac{1}{(2\beta)^n} \int_{-\beta}^{\beta} \cdots \int_{-\beta}^{\beta} du_1 \dots du_n F\left(\sum_{j=1}^n c_j \rho(u_j, t)\right),$$

где функция $\rho(u, t)$ задана формулой (10).

Рассмотрим приближенные формулы, точные для функциональных многочленов третьей степени и для функционалов специального вида.

Пусть по-прежнему X — пространство $C[a, b]$ непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций, ν — некоторая мера борелевских множеств действительной оси R , $A(u)$ — положительная на R функция, $p(x)$ — весовой функционал. Предположим, что выполнены условия

$$\begin{aligned} \int_R A(u) d\nu(u) &\equiv A < \infty, \\ \int_X p(x)x(t) d\mu(x) &= \int_X p(x)x(t)x(s)x(\tau) d\mu(x) \equiv 0, \\ r(t, s) &\equiv \frac{1}{p_0} \int_X p(x)x(t)x(s) d\mu(x) < \infty, \end{aligned}$$

где

$$p_0 \equiv \int_X p(x) d\mu(x).$$

ТЕОРЕМА 3 ([25]). Пусть симметричная функция $r(t, s)$ представима в виде

$$r(t, s) = \int_R x(u, t)x(u, s) d\nu(u),$$

где функция $x(u, t)$ принадлежит пространству $L_2[R, \nu]$ относительно аргумента u . Тогда формула

$$\begin{aligned} \int_X p(x)F(x) d\mu(x) &\approx p_0(1-A)F(0) + \\ &+ \frac{1}{2}p_0 \int_R A(u) \left[F\left(\frac{x(u, \cdot)}{\sqrt{A(u)}}\right) + F\left(-\frac{x(u, \cdot)}{\sqrt{A(u)}}\right) \right] d\nu(u) \quad (11) \end{aligned}$$

точна, когда $F(x)$ — произвольный функциональный многочлен третьей степени.

Если мера ν дискретна, то

$$A = \sum_k A_k, \quad r(t, s) = \sum_k x_k(t)x_k(s),$$

и формула (11) принимает вид

$$\int_X p(x) F(x) d\mu(x) \approx p_0 (1 - A) F(0) + \frac{p_0}{2} \sum_k A_k \left[F\left(\frac{x_k(\cdot)}{\sqrt{A_k}}\right) + F\left(-\frac{x_k(\cdot)}{\sqrt{A_k}}\right) \right]. \quad (12)$$

Рассмотрим пример. Пусть вес

$$p(x) = \int_a^b x^2(t) dt.$$

Тогда

$$r(t, s) = B(t, s) + \frac{2}{\text{tr } B} \int_a^b B(t, \tau) B(\tau, s) d\tau, \quad \text{tr } B = \int_a^b B(t, t) dt.$$

Если теперь воспользоваться разложением корреляционной функции в ряд по ее собственным функциям, то для функции $r(t, s)$ получим

$$r(t, s) = \sum_k \left(\lambda_k + \frac{2}{\text{tr } B} \lambda_k^2 \right) \varphi_k(t) \varphi_k(s),$$

где λ_k — собственные числа ядра $B(t, s)$. Формула (12) примет вид

$$\begin{aligned} \int_X \left(\int_a^b x^2(t) dt \right) F(x) d\mu(x) &\approx \\ &\approx \text{tr } B \left\{ (1 - A) F(0) + \frac{1}{2} \sum_k A_k [F(b_k \varphi_k(\cdot)) + F(-b_k \varphi_k(\cdot))] \right\}, \end{aligned}$$

где

$$b_k = \left[\frac{1}{A_k} \left(\lambda_k + \frac{2}{\text{tr } B} \lambda_k^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \sum_k A_k = A < \infty.$$

ТЕОРЕМА 4 ([25]). Пусть функции $r(t, s)$ и

$$\rho(t, s) = \frac{1}{p_0} \int_X p(x) V(x) x(t) x(s) d\mu(x),$$

где $V(x)$ — некоторый четный положительный на C функционал, представимы в виде

$$r(t, s) = \sum_k x_k(t) x_k(s), \quad \rho(t, s) = \sum_k B_k x_k(t) x_k(s),$$

где B_k — такие величины, что при каждом значении k уравнение

$$V\left(\frac{x_k(\cdot)}{\sqrt{A_k}}\right) = B_k$$

имеет положительное решение A_k такое, что

$$A = \sum_k A_k < \infty.$$

Тогда формула (12) точна для всех функциональных многочленов третьей степени, а также для функционалов $F(x)$ вида

$$F(x) = V(x)p_2(x),$$

где $p_2(x)$ – произвольный однородный функционал второй степени.

В качестве примера рассмотрим случай меры Боголюбова. Пусть

$$p(x) \equiv 1, \quad V(x) = \|x\|^2 = \int_0^\beta x^2(t) dt.$$

Тогда

$$\rho(t, s) = \sum_k B_k x_k(t) x_k(s),$$

где $B_k = \text{tr } B + 2\lambda_k$, $x_k(t) = \sqrt{\lambda_k} \varphi_k(t)$, а λ_k и $\varphi_k(t)$ – собственные значения и собственные функции ядра $B(t, s)$. Другие величины, входящие в формулу (12), в рассматриваемом случае задаются соотношениями

$$\begin{aligned} \text{tr } B &= \frac{\beta}{2m\omega} \text{cth } \frac{\beta\omega}{2}, \quad A_k = \left(2 + \frac{\beta}{2\omega} \text{cth } \frac{\beta\omega}{2} [\omega^2 + (2\pi k\beta^{-1})^2] \right)^{-1}, \\ A &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4}{\beta\omega} \text{th } \frac{\beta\omega}{2}}} \frac{\text{cth} \left(\frac{\beta\omega}{2} \sqrt{1 + \frac{4}{\beta\omega} \text{th } \frac{\beta\omega}{2}} \right)}{\text{cth } \frac{\beta\omega}{2}}. \end{aligned}$$

5. НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ РАВНОВЕСНЫХ СРЕДНИХ

Рассмотрим систему с гамильтонианом $\hat{H} = \hat{\Gamma} + \hat{V}$, где $\hat{V} = V(\hat{q})$ – взаимодействие, а также однопараметрическое семейство гамильтонианов

$$\hat{H}(h) = \hat{\Gamma}(h) + \hat{V}, \quad \hat{\Gamma}(h) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(\hat{q} - h)^2, \quad h \in \mathbb{R}.$$

Статсумма рассматриваемой системы $Z(h) = \text{tr } e^{-\beta \hat{H}(h)}$ после канонического преобразования $\hat{q} - h \rightarrow \hat{q}$ принимает вид

$$Z(h) = \text{tr } \exp \{ -\beta [\hat{\Gamma} + V(\hat{q} + h)] \}.$$

Будем предполагать, что потенциал взаимодействия неотрицателен и симметричен, т.е. $V(x) \geq 0$, $V(x) = V(-x)$. С помощью оператора хронологического упорядочения можно записать [15], что

$$e^{-\beta(\hat{\Gamma} + \hat{V})} = e^{-\beta \hat{\Gamma}} T \exp \left(- \int_0^\beta ds e^{s \hat{\Gamma}} \hat{V} e^{-s \hat{\Gamma}} \right).$$

Тогда

$$R(h) \equiv \frac{\text{tr } e^{-\beta \hat{H}(h)}}{\text{tr } e^{-\beta \hat{\Gamma}}} = \left\langle T \exp \left[- \int_0^\beta ds V(\hat{Q}(s) + h) \right] \right\rangle_{\hat{\Gamma}}. \quad (13)$$

Записывая соотношение (13) через боголюбовский функциональный интеграл, имеем

$$R(h) = \int_X \exp \left[- \int_0^\beta ds V(x(s) + h) \right] d\mu_B(x).$$

Воспользуемся теперь теоремой о линейной замене переменной в интеграле по гауссовой мере [20], которая для интегрируемого функционала $F(x)$ и функции $a \in H$ дает

$$\int_X F(x) d\mu(x) = e^{-\frac{1}{2}\|a\|_H^2} \int_X F(x+a) e^{-(a,x)} d\mu(x). \quad (14)$$

Применим формулу (14) для случая меры Боголюбова и для постоянных функций a , которые в этом случае принадлежат H . Тогда имеем

$$\int_X F(x+a) d\mu_B(x) = \exp \left\{ -\frac{\beta m \omega^2 a^2}{2} \right\} \int_X F(x) \exp \left\{ am\omega^2 \int_0^\beta x(t) dt \right\} d\mu_B(x).$$

С помощью последнего соотношения функция $R(h)$ может быть записана в виде

$$R(h) = \exp \left\{ -\frac{\beta m \omega^2 h^2}{2} \right\} \int_X \exp \left\{ - \int_0^\beta V(x(t)) dt \right\} \exp \left\{ mh\omega^2 \int_0^\beta x(t) dt \right\} d\mu_B(x).$$

Рассмотрим теперь преобразование Фурье–Гаусса функционала $f(x)$,

$$\tilde{f}(y) \equiv F(f; y) = \int_X f(x + iy) d\mu_B(x),$$

и равенство Парсеваля

$$\int_X f \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) g^* \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) d\mu_B(x) = \int_X F \left(f; \frac{y}{\sqrt{2}} \right) F^* \left(g; \frac{y}{\sqrt{2}} \right) d\mu_B(y) \quad (15)$$

для случая функционалов

$$f(x) = F(x) \equiv \exp \left\{ - \int_0^\beta dt V(x(t)) \right\}, \quad g(x) = \exp \left\{ mh\omega^2 \int_0^\beta x(t) dt \right\}.$$

Равенство (15) принимает вид

$$\begin{aligned} \exp \left\{ -\frac{\beta m h^2 \omega^2}{2} \right\} \int_X F \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) \exp \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} h m \omega^2 \int_0^\beta x(t) dt \right\} d\mu_B(x) = \\ = \int_X \tilde{F} \left(\frac{y}{\sqrt{2}} \right) \exp \left\{ \frac{i}{\sqrt{2}} h m \omega^2 \int_0^\beta y(t) dt \right\} d\mu_B(y), \end{aligned}$$

откуда видно, что если при любом y выполняется неравенство

$$\tilde{F}(y) \geq 0, \quad (16)$$

то

$$R(h) = \tilde{F}(-ih) \leq R(0) = \tilde{F}(0). \quad (17)$$

Условие (16) доказывается следующим образом. Для симметричных потенциалов имеем

$$\begin{aligned}\tilde{F}(y) &= e^{\frac{1}{2}\langle y, y \rangle} \int_X \exp \left\{ - \int_0^\beta V(x) dt + i(x, y) \right\} d\mu_B(x) = \\ &= e^{\frac{1}{2}\langle y, y \rangle} \int_X \exp \left\{ - \int_0^\beta V(x) dt - i(x, y) \right\} d\mu_B(x) = \tilde{F}^*(y),\end{aligned}$$

т.е. в этом случае преобразование Фурье–Гаусса действительно. Докажем, что оно неотрицательно. Учтем, что

$$e^{\frac{1}{2}\|y\|^2} \int_X e^{i(x, y)} d\mu_B(x) = 1,$$

и применим неравенство Иенсена. Тогда имеем

$$\tilde{F}(y) \geq \exp \left\{ -e^{\frac{1}{2}\|y\|^2} \int_X d\mu_B(x) e^{i(x, y)} \int_0^\beta V(x(t)) dt \right\} \geq 0,$$

что и завершает доказательство неравенства (16).

Из условия (17) следует, в частности, что

$$(\hat{q}, \hat{q})_{\hat{H}} \leq \frac{1}{\beta m \omega^2}, \quad (18)$$

где внутреннее произведение Боголюбова произвольных операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ определяется как

$$(\hat{A}, \hat{B})_{\hat{H}} = \frac{1}{\beta \operatorname{tr} e^{-\beta \hat{H}}} \int_0^\beta ds \operatorname{tr} [e^{-s\hat{H}} \hat{A} e^{-(\beta-s)\hat{H}} \hat{B}] = (\hat{B}, \hat{A})_{\hat{H}}.$$

Если перейти от операторов $\hat{q}$, $\hat{p}$ к операторам $\hat{b}$, $\hat{b}^\dagger$ с помощью соотношений

$$\hat{q} = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}}(\hat{b} + \hat{b}^\dagger), \quad \hat{p} = i\sqrt{\frac{m\omega}{2}}(\hat{b}^\dagger - \hat{b})$$

и учесть правила отбора для равновесных средних по квадратичному гамильтониану, то неравенство (18) примет вид

$$(\hat{b}^\dagger, \hat{b})_{\hat{H}} \leq (\beta\omega)^{-1}.$$

Из соотношения (18) можно получить неравенство для гиббсовского равновесного среднего $\langle \hat{q}^2 \rangle_{\hat{H}}$. Для этого необходимо воспользоваться неравенством Фолька–Брука [26]. Пусть

$$g = \langle \hat{q}^2 \rangle_{\hat{H}}, \quad b = (\hat{q}, \hat{q})_{\hat{H}}, \quad c = \langle [\hat{q}, [\beta \hat{H}, \hat{q}]] \rangle_{\hat{H}}.$$

Пусть также имеют место оценки сверху $b \leq b_0$, $c \leq c_0$. Тогда

$$g \leq g_0 \equiv \frac{1}{2} \sqrt{c_0 b_0} \operatorname{cth} \sqrt{\frac{c_0}{4b_0}}.$$

В рассматриваемом случае $b_0 = (\beta m \omega^2)^{-1}$, $c_0 = \beta/m$, и последнее неравенство дает

$$\langle \hat{q}^2 \rangle_{\hat{H}} \leq \frac{1}{2m\omega} \operatorname{cth} \frac{\beta\omega}{2} = \langle \hat{q}^2 \rangle_{\hat{\Gamma}}. \quad (19)$$

Условие (17) является примером так называемого условия гауссовой доминантности [27], а вытекающее из (17) условие (18) – примером так называемого условия локаль-

ной гауссовой доминантности [28], играющего важную роль в теории фазовых переходов. Оценка типа оценки (19) ранее была получена в менее общем случае одномерного нелинейного осциллятора в работе [29].

Благодарности. Работа поддержана РФФИ, проект № 99-01-00887.

Список литературы

- [1] *M. Fréchet.* Bull. Soc. Math. France. 1915. V. 43. P. 249.
- [2] *P. J. Daniell.* Ann. Math. 1917–1918. V. 19. P. 279.
- [3] *P. J. Daniell.* Ann. Math. 1918–1919. V. 20. P. 281.
- [4] *Л. Люмис.* Введение в абстрактный гармонический анализ. М.: ИЛ, 1956.
- [5] *Ф. Русс, Б. Секефальви-Надь.* Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979.
- [6] *N. Wiener.* Ann. Math. 1920. V. 22. P. 66.
- [7] *R. Feynman.* Rev. Mod. Phys. 1948. V. 20. P. 367.
- [8] *R. Cameron.* J. Anal. Math. 1962/63. V. 10. P. 287.
- [9] *S. F. Edwards, R. E. Pierls.* Proc. Roy. Soc. 1954. V. A224. P. 24.
- [10] *K. Symanzik.* Zs. f. Naturforsch. 1954. V. 9a. P. 809.
- [11] *И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос.* ДАН СССР. 1954. Т. 97. С. 209.
- [12] *Е. С. Фрадкин.* ДАН СССР. 1954. Т. 98. С. 47.
- [13] *Н. Н. Боголюбов.* ДАН СССР. 1954. Т. 99. С. 225.
- [14] *А. В. Свидзинский.* ЖЭТФ. 1956. Т. 31. С. 324.
- [15] *Н. Н. Боголюбов, Н. Н. Боголюбов (мл.).* Аспекты теории полярона. Сообщения ОИЯИ, Р17-81-65. Дубна: ОИЯИ, 1981.
- [16] *Д. П. Санкович.* ТМФ. 1999. Т. 119. С. 345.
- [17] *Х.-С. Го.* Гауссовские меры в банаховых пространствах. М.: Мир, 1979.
- [18] *Г. Е. Шилов, Фан Дык Тинь.* Интеграл, мера и производная на линейных пространствах. М.: Наука, 1967.
- [19] *А. Д. Егоров, Л. А. Янович.* ДАН БССР. 1970. Т. 14. С. 873.
- [20] *Л. А. Янович.* Приближенное вычисление континуальных интегралов по гауссовым мерам. Минск: Наука и техника, 1976.
- [21] *J. Kuelbs.* J. Funct. Anal. 1970. V. 5. P. 354.
- [22] *B. S. Rajput.* J. Multivar. Anal. 1972. V. 2. P. 282.
- [23] *L. Gross.* Abstract Wiener spaces. In: Proc. 5th Berkeley Symp. Math. Stat. and Prob. 1965. V. 2. Eds. L. M. LeCam, J. Neyman. Berkeley: Univ. of California Press, 1967. P. 31.
- [24] *M. Kac.* On some connections between probability theory and differential and integral equations. In: Proc. 2nd Berkeley Symp. Math. Stat. and Prob. Ed. J. Neyman. Berkeley: Univ. of California Press, 1951. P. 189.
- [25] *П. И. Соболевский, Л. А. Янович.* ДАН БССР. 1974. Т. 18. С. 965.
- [26] *H. Falk, L. W. Bruch.* Phys. Rev. 1969. V. 180. P. 442.
- [27] *J. Fröhlich.* Bull. Amer. Math. Soc. 1978. V. 84. P. 165.
- [28] *Д. П. Санкович.* ТМФ. 1989. Т. 79. С. 460.
- [29] *N. N. Bogolubov, Jr., D. P. Sankovich.* Phys. Lett. A. 1989. V. 137. P. 179.

Поступила в редакцию 25.V.2000 г.