Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Марихин, В. В. Соколов, Пары коммутирующих гамильтонианов, квадратичных по импульсам, *ТМФ*, 2006, том 149, номер 2, 147–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf4224>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 07:50:20

© 2006 г.

В. Г. Марихин*, В. В. Соколов*

ПАРЫ КОММУТИРУЮЩИХ ГАМИЛЬТониАнов, КВАДРАТИЧНЫХ ПО ИМПУЛЬСАМ

В случае двух степеней свободы рассматриваются пары квадратичных по импульсам гамильтонианов, коммутирующих относительно стандартной скобки Пуассона. Найдены новые многопараметрические семейства таких пар. Приведена универсальная схема построения полного решения уравнения Гамильтона–Якоби в терминах интегралов на некоторой алгебраической кривой. Для наиболее сложных примеров эта кривая является негиперэллиптическим накрытием над эллиптической кривой.

Ключевые слова: интегрируемые гамильтоновы системы, разделение переменных, алгебраические системы.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работах [1]–[4] рассматривалась задача о парах квадратичных по импульсам гамильтонианов, коммутирующих относительно стандартной скобки Пуассона. Основной мотивацией данной работы является тот факт, что целый ряд моделей интегрируемых волчков, таких как волчок Шоттки–Манакова на $so(4)$, волчок Клебша, гироскоп Ковалевской и др., может быть сведен к задаче о паре коммутирующих гамильтонианов со стандартной скобкой Пуассона (см. [3] и приведенную там литературу). Более того, как показано в работе [3], задача о разделении переменных может быть эффективно решена в терминах канонического гамильтонова формализма, т.е. можно явно найти решение уравнения Гамильтона–Якоби соответствующей системы.

Целью данной работы является обобщение подхода, развитого в работе [3], на общий случай пар коммутирующих гамильтонианов с двумя степенями свободы, в том числе построение универсального решения уравнения Гамильтона–Якоби.

В разделе 2 сформулированы необходимые и достаточные условия существования указанных пар гамильтонианов, кратко рассмотрены свойства решений уравнения Эйлера–Дарбу, возникающего как одно из необходимых условий. В разделе 3

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Москва, Россия.
E-mail: mvg@itp.ac.ru, sokolov@itp.ac.ru

построено универсальное решение уравнения Гамильтона–Якоби рассматриваемых систем в терминах интегралов на некоторой алгебраической кривой (в общем случае негиперэллиптической). В разделе 4 рассмотрены несколько классов решения уравнения Эйлера–Дарбу, которые приводят к построению коммутирующих пар гамильтонианов, и высказана гипотеза о том, что любая такая пара принадлежит к одному из этих классов. Найдены соответствующие алгебраические кривые для разделяющих переменных. Показано, что в случае моделей из классов 2 и 3 алгебраическая кривая является разветвленным негиперэллиптическим накрытием над эллиптической кривой. Пример применения общего подхода, развитого в данной работе, к физически интересному случаю волчка Стеклова содержится в приложении.

2. ПАРЫ КВАДРАТИЧНЫХ ГАМИЛЬТониАНОВ

Рассмотрим пару гамильтонианов вида

$$H = ap_1^2 + cp_2^2 + dp_1 + ep_2 + f, \quad (1)$$

$$K = Ap_1^2 + Cp_2^2 + Dp_1 + Ep_2 + F, \quad (2)$$

коммутирующих относительно стандартной скобки Пуассона $\{p_\alpha, q_\beta\} = \delta_{\alpha\beta}$. Коэффициенты в формулах (1), (2) представляют собой некоторые (локально) аналитические функции переменных q_1, q_2 .

Из условия $\{H, K\} = 0$ следует, что

$$a = \frac{S_1(q_1)}{\sigma_1(q_1) - \sigma_2(q_2)}, \quad c = \frac{S_2(q_2)}{\sigma_1(q_1) - \sigma_2(q_2)}$$

для некоторых функций S_i, σ_i . Ясно, что в невырожденном случае $\sigma'_1 \neq 0, \sigma'_2 \neq 0$ функции $\sigma_1(q_1)$ и $\sigma_2(q_2)$ сводятся соответственно к q_1 и q_2 подходящим каноническим преобразованием вида

$$\hat{q}_1 = \phi(q_1), \quad \hat{q}_2 = \phi(q_2), \quad \hat{p}_1 = \frac{p_1}{\phi'(q_1)}, \quad \hat{p}_2 = \frac{p_2}{\phi'(q_2)}.$$

Одним из результатов работы [4] является

ТЕОРЕМА 1. *Всякая пара коммутирующих гамильтонианов (1), (2) с $\sigma_1(q_1) = q_1, \sigma_2(q_2) = q_2$ может быть сведена каноническим преобразованием*

$$\hat{p}_1 = p_1 + \frac{\partial F(q_1, q_2)}{\partial q_1}, \quad \hat{p}_2 = p_2 + \frac{\partial F(q_1, q_2)}{\partial q_2}$$

к паре вида

$$H = \frac{U_1 - U_2}{q_1 - q_2}, \quad K = \frac{q_2 U_1 - q_1 U_2}{q_1 - q_2}, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} U_1 &= S_1(q_1)p_1^2 + \frac{\sqrt{S_1(q_1)S_2(q_2)}Z_{q_1}}{q_1 - q_2}p_2 - \frac{S_1(q_1)Z_{q_1}^2}{4(q_1 - q_2)^2} + V_1(q_1, q_2), \\ U_2 &= S_2(q_2)p_2^2 - \frac{\sqrt{S_1(q_1)S_2(q_2)}Z_{q_2}}{q_1 - q_2}p_1 - \frac{S_2(q_2)Z_{q_2}^2}{4(q_2 - q_1)^2} + V_2(q_1, q_2), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{2}\sqrt{S_1(q_1)}\partial_{q_1}\left(\sqrt{S_1(q_1)}\frac{Z_{q_1}^2}{q_1 - q_2}\right) + f_1(q_1), \\ V_2 &= \frac{1}{2}\sqrt{S_2(q_2)}\partial_{q_2}\left(\sqrt{S_2(q_2)}\frac{Z_{q_2}^2}{q_2 - q_1}\right) + f_2(q_2) \end{aligned} \quad (5)$$

для некоторых функций $Z(q_1, q_2)$, $S_i(q_i)$ и $f_i(q_i)$. Скобка Пуассона $\{H, K\}$ равна нулю тогда и только тогда, когда

$$Z_{q_1, q_2} = \frac{Z_{q_1} - Z_{q_2}}{2(q_2 - q_1)} \quad (6)$$

и

$$\left(Z_{q_1}\frac{\partial}{\partial q_2} - Z_{q_2}\frac{\partial}{\partial q_1}\right)\left(\frac{V_1 - V_2}{q_1 - q_2}\right) = 0. \quad (7)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Функция Z в формулах (4), (5) определена с точностью до сдвига $Z \rightarrow Z + k_1$. Функции f_i в (5) определены с точностью до сдвига $f_i(x) \rightarrow f_i(x) + k_2x + k_3$, где k_i – произвольные постоянные. Этот сдвиг соответствует преобразованию $H \rightarrow H + k_2$, $K \rightarrow K + k_3$.

Отметим, что впервые уравнение Эйлера–Дарбу (6) в связи с задачей о паре коммутирующих квадратичных гамильтонианов возникло в работе [2].

Общее аналитическое решение уравнения Эйлера–Дарбу (6) имеет вблизи линии сингулярности $q_1 = q_2$ следующее разложение:

$$\begin{aligned} Z(q_1, q_2) &= A + \ln(q_1 - q_2)B, \\ A &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i(q_1 + q_2)(q_1 - q_2)^{2i}, \quad B = \sum_{i=0}^{\infty} b_i(q_1 + q_2)(q_1 - q_2)^{2i}, \end{aligned}$$

где a_0 и a_1 – произвольные функции. Остальные коэффициенты могут быть легко выражены через эти две функции и их производные. Например, $b_0 = a_0''/2$.

Подставляя разложения функции $Z(q_1, q_2)$ в (7), находим, что $B = 0$. Нетрудно проверить, что всякое решение уравнения (6) с $B = 0$ задается формулой

$$Z(q_1, q_2) = z_0 + \delta(q_1 + q_2) + (q_1 - q_2)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(2k)}(q_1 + q_2)}{2^{2k}k!(k+1)!} (q_1 - q_2)^{2k}, \quad (8)$$

где $g(x)$ – произвольная функция, а z_0, δ – произвольные постоянные. Будем называть функцию $g(x)$ *производящей функцией* для решения (8). Без потери общности положим $z_0 = 0$. Что касается δ , то этот параметр играет важную роль при классификации гамильтонианов из теоремы 1.

Опишем в замкнутом виде все функции Z , соответствующие рациональным производящим функциям g . Выбирая $g(x) = x^n$, получаем бесконечную последовательность полиномиальных решений $Z^{(n)}$ уравнения (6). В частности,

$$\begin{aligned} g(x) = 1 &\iff Z^{(0)}(x, y) = (x - y)^2, \\ g(x) = x &\iff Z^{(1)}(x, y) = (x + y)(x - y)^2, \\ g(x) = x^2 &\iff Z^{(2)}(x, y) = \frac{1}{4}((x - y)^2 + 4(x + y)^2)(x - y)^2. \end{aligned}$$

Вся последовательность может быть построена (с точностью до постоянных множителей) с помощью оператора

$$x^2 \frac{\partial}{\partial x} + y^2 \frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{2}(x + y),$$

действующего на $Z^{(0)}$. Рациональные функции $g(x) = (x - \mu)^{-n}$ порождают еще один класс точных решений уравнения (6). Например, имеем

$$g_\mu(x) = \frac{1}{4} \frac{1}{x - 2\mu} \iff Z_\mu(x, y) = \sqrt{(\mu - x)(\mu - y)} + \frac{1}{2}(x + y) - \mu.$$

Решение, соответствующее полюсу порядка $n \geq 2$, может быть получено дифференцированием последней формулы по параметру μ . Поскольку соответствие между функциями Z и g линейно, мы построили решение Z с произвольной рациональной производящей функцией

$$g(x) = \sum_i c_i x^i + \sum_{i,j} d_{ij} (x - \mu_i)^{-j}.$$

ГИПОТЕЗА 1. Для любого гамильтониана (3)–(7) производящая функция g рациональна и имеет вид $g(x) = P(x)/S(x)$, где P и S – некоторые многочлены такие, что $\deg P < 5$, $\deg S < 6$.

В работах [2], [3] рассматривалось следующее решение системы (6), (7):

$$\begin{aligned} Z(x, y) &= x + y, \quad S_1(x) = S_2(x) = \sum_{i=0}^6 c_i x^i, \\ f_1(x) = f_2(x) &= -\frac{3}{4}c_6 x^4 - \frac{1}{2}c_5 x^3 + \sum_{i=0}^2 k_i x^i, \end{aligned}$$

где c_i , k_i – произвольные постоянные. В работе [3] показано, что волчок Клебша и $so(4)$ -волчок Шоттки–Манакова [5] являются частными случаями этой модели, и для этой модели найдено полное решение уравнения Гамильтона–Якоби. Полученные результаты могут рассматриваться как некоторое (обобщенное) разделение переменных на негиперэллиптической кривой рода 4.

Основная цель настоящей работы – построить полное решение уравнения Гамильтона–Якоби для произвольной пары гамильтонианов (3)–(7).

3. УНИВЕРСАЛЬНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА–ЯКОБИ

Пусть гамильтонианы H и K имеют вид (3)–(5). Рассмотрим систему $H = e_1$, $K = e_2$, где e_i – произвольные постоянные. Пусть $p_1 = F_1(x, y)$, $p_2 = F_2(x, y)$ – ее решение. Здесь и далее мы используем обозначения x и y вместо q_1 и q_2 . Из известной леммы Якоби следует, что если $\{H, K\} = 0$, то $\partial F_1 / \partial y = \partial F_2 / \partial x$. Чтобы найти функцию действия $S(x, y, e_1, e_2)$, достаточно в явном виде решить совместную систему

$$\frac{\partial}{\partial x} S = F_1, \quad \frac{\partial}{\partial y} S = F_2.$$

Перепишем формулы $H = e_1$, $K = e_2$ в виде

$$p_1^2 + ap_2 + b = 0, \quad p_2^2 + Ap_1 + B = 0, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} a &= \frac{Z_x}{x-y} \sqrt{\frac{S_2(y)}{S_1(x)}}, & A &= -\frac{Z_y}{x-y} \sqrt{\frac{S_1(x)}{S_2(y)}}, \\ b &= -\frac{Z_x^2}{4(x-y)^2} + \frac{V_1 - e_1x + e_2}{S_1(x)}, & B &= -\frac{Z_y^2}{4(x-y)^2} + \frac{V_2 - e_1y + e_2}{S_2(y)}. \end{aligned}$$

Легко проверить, что

$$2b_y + Aa_x + 2aA_x = 0, \quad 2Aa_y + aA_y + 2B_x = 0. \quad (10)$$

С помощью уравнений (6) и (7) нетрудно получить также следующее тождество:

$$Ab_x - aB_y + 2A_xb - 2a_yB = 0. \quad (11)$$

Используя стандартную технику резольвент Лагранжа (см., например, [6]), сведем систему (9), эквивалентную алгебраическому уравнению четвертой степени, к системе

$$uv = \frac{1}{4}aA, \quad (12)$$

$$Au^3 + 4\frac{b}{a}u^2v - 4\frac{B}{A}uv^2 - av^3 = 0, \quad (13)$$

которая эквивалентна кубическому уравнению относительно u^2 . Пусть (u_k, v_k) , $k = 1, 2, 3$, – решения системы (12), (13) такие, что

$$\begin{aligned} u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 &= -b, & v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 &= -B, \\ u_1u_2u_3 &= -\frac{1}{8}a^2A, & v_1v_2v_3 &= -\frac{1}{8}A^2a. \end{aligned}$$

Тогда формулы

$$\begin{aligned} p_1 &= u_1 + u_2 + u_3, & p_2 &= v_1 + v_2 + v_3; \\ p_1 &= u_3 - u_1 - u_2, & p_2 &= v_3 - v_1 - v_2; \\ p_1 &= u_2 - u_1 - u_3, & p_2 &= v_2 - v_1 - v_3; \\ p_1 &= u_1 - u_2 - u_3, & p_2 &= v_1 - v_2 - v_3 \end{aligned}$$

определяют четыре решения системы (9). Для определенности будем рассматривать первое из них.

ЛЕММА 1. Для $i = 1, 2, 3$ выполнены соотношения $\partial u_i / \partial y = \partial v_i / \partial x$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дифференцируя уравнения (12) и (13) по x и y , находим u_y и v_x как функции от u и v . Тогда, выражая v через u , получаем, что условие $u_y = v_x$ эквивалентно выполнению тождеств (10) и (11).

Лемма 1 означает, что в переменных u_1, u_2, u_3 происходит “частичное” разделение переменных. А именно, $S = S_1 + S_2 + S_3$, где S – искомая функция действия, а функции S_i определяются из системы

$$\frac{\partial}{\partial x} S_i = u_i, \quad \frac{\partial}{\partial y} S_i = v_i.$$

Положим

$$u = \frac{1}{2} \frac{Z_x}{x - y} \sqrt{\frac{y - \xi}{x - \xi}}, \quad v = -\frac{1}{2} \frac{Z_y}{x - y} \sqrt{\frac{x - \xi}{y - \xi}}.$$

Легко видеть, что пара (u, v) для любого ξ удовлетворяет уравнению (12). Кроме того, нетрудно проверить, что если Z удовлетворяет (6), то $\partial u / \partial y = \partial v / \partial x$. Пользуясь этим фактом, введем функцию $\sigma(x, y, \xi)$ такую, что

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = u, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial y} = v.$$

Ясно, что функция σ определена однозначно с точностью до прибавления произвольной функции от переменной ξ . В случае, когда производящая функция g рациональна, соответствующая функция Z выражается через квадратичные радикалы и σ находится явно без каких-либо проблем. Положим $Y = \partial \sigma / \partial \xi$.

После умножения уравнения (13) на множитель

$$-2 \frac{\sqrt{S_1(x)} \sqrt{S_2(y)} \sqrt{x - \xi} \sqrt{y - \xi} (x - y)}{Z_x Z_y}$$

левая часть (13) может быть записана в виде

$$-e_2 + e_1 \xi + \frac{y - \xi}{x - y} \left(V_1 - \frac{S_1(x) Z_x^2}{4(x - \xi)(x - y)} \right) - \frac{x - \xi}{x - y} \left(V_2 + \frac{S_2(y) Z_y^2}{4(y - \xi)(x - y)} \right). \quad (14)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть выполнены соотношения (6), (7). Тогда выражение (14) является функцией переменных Y и ξ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим функцию (14) через $\Psi(x, y, \xi)$. Рассмотрим якобиан

$$J = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Заменяя $\partial Y / \partial y$ и $\partial Y / \partial x$ на $\partial v / \partial \xi$ и $\partial u / \partial \xi$, соответственно, нетрудно непосредственно проверить, что якобиан J тождественно равен нулю в силу соотношений (6), (7).

Согласно доказанному предложению соотношение $\Psi(x, y, \xi) = 0$ может быть записано в виде $\phi(\xi, Y) = 0$. Для практического нахождения функции ϕ полезно положить $y = x$. После этого выражение $Y(x, y, \xi)$ значительно упрощается и функция $\Psi(x, x, \xi)$ легко выражается через ξ и $Y(x, x, \xi)$.

Уравнение $\phi(\xi, Y) = 0$ задает кривую, на которой в терминах дифференциалов выражается функция действия S .

Обозначим через $\xi_k(x, y)$, $k = 1, 2, 3$, корни кубического уравнения $\Psi(x, y, \xi) = 0$.

ТЕОРЕМА 2. Функция действия S имеет вид

$$S(x, y) = \sum_{k=1}^3 \left(\sigma(x, y, \xi_k) - \int^{\xi_k} Y(\xi) d\xi \right), \quad (15)$$

где $Y(\xi)$ – алгебраическая функция на кривой $\phi(\xi, Y) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial x} S(x, y) = \sum_{k=1}^3 \sigma_x(x, y, \xi_k) + \sum_{k=1}^3 \{ \sigma_\xi(x, y, \xi_k) - Y(\xi_k) \} \xi_{k,x} = \sum_{k=1}^3 u_k = p_1.$$

Аналогично

$$\frac{\partial}{\partial y} S(x, y) = p_2.$$

4. ПРИМЕРЫ

В этом разделе мы опишем все известные нам к настоящему моменту пары гамильтонианов (3)–(7). Для всех этих гамильтонианов в случае общего положения указывается явный вид функции $\sigma(x, y, \xi)$ и кривой $\phi(\xi, Y) = 0$, задающих функцию действия (15). Вырождения нетрудно исследовать либо с помощью предельных переходов, либо применяя напрямую формулы (14), (15).

4.1. Класс 1. Для моделей из этого класса

$$S_1 = S_2 = S, \quad f_1 = f_2 = f. \quad (16)$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть

$$g = \frac{\tilde{G}}{S}, \quad \tilde{G} = G - \frac{\delta}{10}S', \quad f = -\frac{4\tilde{G}^2}{S} - \frac{4\delta}{3}\tilde{G}' - \frac{\delta^2}{12}S'',$$

где

$$S(x) = s_5x^5 + s_4x^4 + s_3x^3 + s_2x^2 + s_1x + s_0, \quad G(x) = g_3x^3 + g_2x^2 + g_1x + g_0,$$

s_i, g_i, δ – произвольные постоянные. Тогда функции S, f и функция Z , соответствующая (см. раздел 2) производящей функции g , удовлетворяют системе (6), (7).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Параметр δ из теоремы 3 совпадает с параметром δ из формулы (8). Предположим, что в формуле (8) $\delta = 0$. Тогда можно проверить, что всякая пара гамильтонианов (3)–(7), (16), удовлетворяющая этому условию, описывается теоремой 3.

Рассмотрим случай общего положения

$$S(x) = s_5(x - \mu_1)(x - \mu_2)(x - \mu_3)(x - \mu_4)(x - \mu_5),$$

где $s_5 \neq 0$ и все корни μ_i многочлена S различны. Нетрудно проверить, что функция Z для интегрируемой модели из теоремы 3 имеет вид

$$Z(x, y) = \sum_{i=1}^5 \nu_i \sqrt{(\mu_i - x)(\mu_i - y)}, \quad (17)$$

где ν_i – произвольные постоянные. Из формулы (8) коэффициенты g_i и δ выражаются через постоянные ν_i . Например, $2\delta = -\sum \nu_i$. Функция f задается формулой

$$f(x) = -\frac{1}{16} \sum_{i=1}^5 \nu_i^2 \frac{S'(\mu_i)}{x - \mu_i} + k_1x + k_0,$$

где k_1, k_0 – произвольные постоянные.

Вычисления показывают, что для функции (17)

$$\begin{aligned} \sigma(x, y, \xi) &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^5 \nu_i \ln \frac{\sqrt{x - \xi} \sqrt{y - \mu_i} + \sqrt{y - \xi} \sqrt{x - \mu_i}}{\sqrt{x - y} \sqrt{\mu_i - \xi}}, \\ Y &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^N \nu_i \frac{\sqrt{(x - \mu_i)(y - \mu_i)}}{(\xi - \mu_i) \sqrt{(x - \xi)(y - \xi)}}. \end{aligned} \quad (18)$$

Алгебраическая кривая имеет вид

$$\phi(Y, \xi) = S(\xi)Y^2 + f(\xi) - \xi e_1 + e_2 = 0$$

и является гиперэллиптической рода 2.

Оказывается (см. приложение), что волчок Стеклова на $so(4)$ [7] является частным случаем модели из теоремы 3.

4.2. Класс 2. Функции Z для моделей этого класса являются специальными случаями функций Z из класса 1. Однако именно для этих специальных случаев функции S и f содержат гораздо больше произвольных параметров, чем обеспечивает общая формула из теоремы 3.

Такие функции Z могут быть определены как решения системы

$$Z_{xy} = \frac{Z_x - Z_y}{2(y - x)} = \frac{1}{3}U(Z)Z_xZ_y, \quad (19)$$

где U – некоторая функция одной переменной.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Можно проверить, что этот класс решений уравнения Эйлера–Дарбу $Z_{xy} = (Z_x - Z_y)/(2(y - x))$ совпадает с классом решений вида

$$Z = F\left(\frac{h(x) - h(y)}{x - y}\right),$$

где F и h – некоторые функции одной переменной. При этом оказывается, что $U = F''/F'^2$.

ЛЕММА 2. Система (19) совместна тогда и только тогда, когда

$$U = \frac{3}{2} \frac{B'}{B}, \quad B(Z) = b_2Z^2 + b_1Z + b_0,$$

где b_i – произвольные постоянные.

В случае $\deg B = 2$ с точностью до линейных замен Z можно считать, что

$$Z(x, y) = \sqrt{(x - \mu_1)(y - \mu_1)} + \sqrt{(x - \mu_2)(y - \mu_2)}. \quad (20)$$

При этом $b_2 = 1$, $b_1 = 0$, $b_0 = -(\mu_1 - \mu_2)^2$.

Если $\deg B = 1$, то

$$Z(x, y) = \sqrt{xy} + \frac{1}{2}(x + y), \quad (21)$$

$b_1 = 1$, $b_2 = b_0 = 0$.

Наконец, если $\deg B = 0$, то

$$Z(x, y) = x + y. \quad (22)$$

Этот случай был рассмотрен в работе [3].

Исследуем теперь эти три случая подробно.

1. Пусть функция Z задается формулой (20). Тогда

$$S(x) = (x - \mu_1)(x - \mu_2)P(x) + (x - \mu_1)^{3/2}(x - \mu_2)^{3/2}Q(x), \quad \deg P \leq 3, \quad \deg Q \leq 2,$$

и

$$\begin{aligned} f(x) = & f_0 + f_1x + k_2(x - \mu_1)^{1/2}(x - \mu_2)^{1/2} + \frac{\mu_2 - \mu_1}{16} \left(\frac{P(\mu_1)}{x - \mu_1} - \frac{P(\mu_2)}{x - \mu_2} \right) + \\ & + \frac{\mu_2 - \mu_1}{32} (x - \mu_1)^{1/2}(x - \mu_2)^{1/2} \left(\frac{Q(\mu_1)}{x - \mu_1} - \frac{Q(\mu_2)}{x - \mu_2} \right). \end{aligned}$$

В случае, когда $Q = 0$, $k_2 = 0$, эти формулы совпадают с соответствующими формулами для класса 1. Функции σ , Y задаются формулами, аналогичными формулам (18) для класса 1:

$$\sigma(x, y, \xi) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \ln \frac{\sqrt{x-\xi} \sqrt{y-\mu_i} + \sqrt{y-\xi} \sqrt{x-\mu_i}}{\sqrt{x-y} \sqrt{\mu_i-\xi}},$$

$$Y = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^2 \frac{\sqrt{(x-\mu_i)(y-\mu_i)}}{(\xi-\mu_i) \sqrt{(x-\xi)(y-\xi)}}.$$

Алгебраическую кривую в этом случае можно записать в виде

$$[S_R(\xi) + \eta S_I(\xi)]Y^2 - [k_R(\xi) + \eta k_I(\xi)] = 0, \quad (23)$$

где

$$S_R(x) = (x - \mu_1)(x - \mu_2)P(x), \quad S_I(x) = (x - \mu_1)(x - \mu_2)Q(x),$$

$$k_R(x) = -e_2 + e_1x - f_0 - f_1x - \frac{\mu_2 - \mu_1}{16} \left(\frac{P(\mu_1)}{x - \mu_1} - \frac{P(\mu_2)}{x - \mu_2} \right),$$

$$k_I(x) = k_2 - \frac{1}{32}(\mu_1 - \mu_2)^2 - \frac{\mu_1 - \mu_2}{16} \left(\frac{Q(\mu_1)}{x - \mu_1} - \frac{Q(\mu_2)}{x - \mu_2} \right),$$

$$\frac{1}{\eta} = \frac{1}{\sqrt{\xi - \mu_1} \sqrt{\xi - \mu_2}} \sqrt{1 - \frac{(\mu_1 - \mu_2)^2}{16(\xi - \mu_1)^2(\xi - \mu_2)^2 Y^2}}.$$

Отметим, что из последней формулы можно выразить η^2 как функцию ξ , Y и после простых преобразований привести уравнение для кривой к стандартной алгебраической форме

$$\Phi(\xi, Y) = \sum_{i,j} c_{ij} Y^i \xi^j = 0.$$

Однако ответ получается довольно громоздким.

Выражая Y как функцию от (ξ, η) и подставляя в (23), можно проверить, что в переменных (ξ, η) эта кривая приобретает вид произвольной 10-параметрической кубики. Таким образом, в случае общего положения кривая $\phi(Y, \xi) = 0$, в терминах которой записывается функция действия (см. теорему 2), является накрытием над эллиптической кривой. Поскольку

$$\eta = (\xi - \mu_1) \left(\frac{\sqrt{x - \mu_1}}{\sqrt{x - \mu_2}} + \frac{\sqrt{y - \mu_1}}{\sqrt{y - \mu_2}} \right)^{-1} + (\xi - \mu_2) \left(\frac{\sqrt{x - \mu_2}}{\sqrt{x - \mu_1}} + \frac{\sqrt{y - \mu_2}}{\sqrt{y - \mu_1}} \right)^{-1},$$

то точки (ξ_1, η_1) , (ξ_2, η_2) , (ξ_3, η_3) лежат на одной прямой.

2. Для функции Z вида (21) имеем

$$S(x) = xP(x) + x^{3/2}Q(x), \quad \deg P \leq 3, \quad \deg Q \leq 2,$$

$$f(x) = -\frac{1}{16x}P(x) - \frac{1}{32\sqrt{x}}Q(x) + f_1x + f_q\sqrt{x} + f_0.$$

Функция Y задается формулой

$$Y = \frac{\xi + \sqrt{x}\sqrt{y}}{4\xi\sqrt{x - \xi}\sqrt{y - \xi}}.$$

Кривая и в этом случае может быть записана в виде (23), где

$$\begin{aligned} S_R(x) &= xP(x), & S_I(x) &= xQ(x), \\ k_R(x) &= -e_2 + e_1x - f_0 - f_1x + \frac{1}{16x}P(x), & k_I(x) &= \frac{1}{16x}Q(x) - f_q, \\ \eta &= \frac{4Y\xi^{3/2}}{\sqrt{16Y^2\xi^2 - 1}}. \end{aligned}$$

В переменных (ξ, η) она также имеет вид произвольной кубики. Из формулы $\eta = (\xi + \sqrt{xy})/(\sqrt{x} + \sqrt{y})$ следует, что точки (ξ_1, η_1) , (ξ_2, η_2) , (ξ_3, η_3) лежат на одной прямой.

3. Для функции Z , заданной формулой (22), имеем

$$\begin{aligned} S(x) &= s_6x^6 + s_5x^5 + s_4x^4 + s_3x^3 + s_2x^2 + s_1x + s_0, \\ f(x) &= -\frac{1}{40}S''(x) - \frac{1}{32\sqrt{x}}Q(x) + f_2x^2 + f_1x + f_0. \end{aligned}$$

В этом случае

$$Y = \frac{1}{2\sqrt{x - \xi}\sqrt{y - \xi}}.$$

Кривая имеет относительно простой алгебраический вид:

$$S(\xi)Y^6 - F(\xi)Y^4 - \left(\frac{1}{8}F''(\xi) + \frac{7}{1920}S^{IV}(\xi) - \frac{k_2}{2}\right)Y^2 - \frac{s_6}{64} = 0, \quad F(\xi) = -e_2 + e_1\xi - f(\xi),$$

и в переменных (ξ, η) , где $\eta = \xi^2 - 1/(4Y^2)$, имеет вид произвольной кубики. Поскольку $\eta = \xi(x + y) - xy$, то точки (ξ_1, η_1) , (ξ_2, η_2) , (ξ_3, η_3) лежат на одной прямой.

4.3. Класс 3. Гамильтониан (3)–(7) назовем *несимметрическим*, если $S_1(x) \neq S_2(x)$, или $f_1(x) \neq f_2(x)$.

ТЕОРЕМА 4 [4]. В несимметрическом случае функции Z , S_i , f_i удовлетворяют (6), (7) тогда и только тогда, когда

$$\delta = 0, \quad g = \frac{1}{H}, \quad S_{1,2} = WH \pm MH^{3/2}, \quad f_{1,2} = -\frac{4W}{H} \mp 2MH^{-1/2} \pm aH^{1/2},$$

где g – порождающая функция для Z ,

$$\begin{aligned} W(x) &= w_3x^3 + w_2x^2 + w_1x + w_0, & H(x) &= h_2x^2 + h_1x + h_0, \\ M(x) &= m_2x^2 + m_1x + m_0, \end{aligned}$$

w_i, h_i, m_i, a – произвольные постоянные.

Рассмотрим случай общего положения $H(x) = (x - \mu_1)(x - \mu_2)$. Алгебраическая кривая в этом случае задается формулой

$$\Psi(\xi, Y) = -e_2 + e_1\xi - \frac{RW(\xi)}{2(\xi - \mu_1)(\xi - \mu_2)(\mu_2 - \mu_1)} + \\ + 4M(\xi)\sqrt{2Y} \frac{\sqrt{\xi - \mu_1}\sqrt{\xi - \mu_2}}{(\mu_2 - \mu_1)^{3/2}}\sqrt{R} + 8b\sqrt{2Y} \frac{(\xi - \mu_1)^{3/2}(\xi - \mu_2)^{3/2}}{\sqrt{R}\sqrt{\mu_2 - \mu_1}} = 0, \quad (24)$$

где

$$Y = \frac{\sqrt{(x - \mu_1)(y - \mu_1)}}{(\xi - \mu_1)\sqrt{(x - \xi)(y - \xi)}} - \frac{\sqrt{(x - \mu_2)(y - \mu_2)}}{(\xi - \mu_2)\sqrt{(x - \xi)(y - \xi)}}, \\ R = 16(\xi - \mu_1)^2(\xi - \mu_2)^2Y^2 - (\mu_1 - \mu_2)^2.$$

Подставляя

$$Y = \frac{1}{4} \frac{(\mu_1 - \mu_2)^{3\eta/2}}{(\xi - \mu_2)(\xi - \mu_1)\sqrt{\eta^2(\mu_2 - \mu_1) - 8(\xi - \mu_1)(\xi - \mu_2)}}$$

в (24), получаем кубику в переменных (ξ, η) с полным набором из десяти независимых параметров. Нетрудно проверить, что $\eta = a(x, y)\xi + b(x, y)$, где a, b – некоторые функции.

Таким образом, в случае моделей из классов 2 и 3 алгебраическая кривая является разветвленным негиперэллиптическим накрытием над эллиптической кривой. Динамика трех точек (ξ_1, Y_1) , (ξ_2, Y_2) , (ξ_3, Y_3) на этой кривой (см. теорему 2) подчиняется следующему условию: их проекции на эллиптическую базу (ξ_1, η_1) , (ξ_2, η_2) , (ξ_3, η_3) лежат на одной прямой.

ГИПОТЕЗА 2. *Всякая пара гамильтонианов (3)–(7) принадлежит к одному из трех классов, описанных выше.*

ПРИЛОЖЕНИЕ

Волчок Стеклова

Покажем, что случай волчка Стеклова на $so(4)$ после ограничения на симплектические листы является частным случаем модели из класса 1. Гамильтониан и дополнительный интеграл в случае волчка Стеклова имеют вид

$$H = (\mathbf{S}_1, A\mathbf{S}_1) + (\mathbf{S}_1, B\mathbf{S}_2), \quad K = (\mathbf{S}_1, \bar{A}\mathbf{S}_1) + (\mathbf{S}_1, \bar{B}\mathbf{S}_2),$$

где

$$A = -\alpha^2 \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\alpha_1^2}, \frac{1}{\alpha_2^2}, \frac{1}{\alpha_3^2}\right), \quad B = \alpha \operatorname{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \\ \bar{A} = -\operatorname{diag}(\alpha_1^2, \alpha_2^2, \alpha_3^2), \quad \bar{B} = \alpha \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \frac{1}{\alpha_3}\right),$$

$\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$. Здесь $\mathbf{S}_i$ – трехмерные векторы с компонентами S_i^α . Легко проверить, что гамильтонианы H и K коммутируют относительно спиновой скобки Пуассона

$$\{S_i^\alpha, S_j^\beta\} = \kappa \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \delta_{ij} S_i^\gamma.$$

Нам удобно положить постоянную κ равной $-2i$.

Фиксируем значения функций Казимира для спиновой скобки: $(\mathbf{S}_k, \mathbf{S}_k) = j_k^2$, $k = 1, 2$. Тогда формулы

$$\mathbf{S}_k = \pi_k \mathbf{K}(Q_k) + \frac{j_k}{2} \mathbf{K}'(Q_k), \quad \mathbf{K}(Q) = ((Q^2 - 1), i(Q^2 + 1), 2Q),$$

определяют координаты Дарбу π_1, π_2, Q_1, Q_2 для симплектического листа пуассонова многообразия с координатами $\mathbf{S}_k, k = 1, 2$. Поскольку это преобразование линейно по импульсам π_k , в результате получается пара коммутирующих относительно скобки $\{\pi_\alpha, Q_\beta\} = \delta_{\alpha\beta}$ гамильтонианов, квадратичных по импульсам. Укажем канонические преобразования, приводящие эту пару к виду (3)–(5), (16).

В результате канонического преобразования

$$P_1 = \pi_1 \sqrt{r(Q_1)}, \quad P_2 = \pi_2 \sqrt{R(Q_2)}, \quad dX = \frac{dQ_1}{\sqrt{r(Q_1)}}, \quad dY = \frac{dQ_2}{\sqrt{R(Q_2)}},$$

где

$$r(Q_1) = (\mathbf{K}(Q_1), A\mathbf{K}(Q_1)), \quad R(Q_2) = (\mathbf{K}(Q_2), \bar{A}\mathbf{K}(Q_2)),$$

получаем

$$H = P_1^2 + 2P_1 P_2 V + j_2 P_1 V_Y + j_1 P_2 V_X + \frac{1}{2} j_1 j_2 V_{X,Y} + \frac{j_1^2}{6} \left(\frac{g_1''(X)}{g_1(X)} - \frac{3}{2} \left(\frac{g_1'(X)}{g_1(X)} \right)^2 \right),$$

$$K = P_2^2 + 2P_1 P_2 W + j_2 P_1 W_Y + j_1 P_2 W_X + \frac{1}{2} j_1 j_2 W_{X,Y} + \frac{j_2^2}{6} \left(\frac{g_2''(Y)}{g_2(Y)} - \frac{3}{2} \left(\frac{g_2'(Y)}{g_2(Y)} \right)^2 \right).$$

Здесь

$$V(X, Y) = \frac{(\mathbf{K}(Q_1), B\mathbf{K}(Q_2))}{\sqrt{r(Q_1)}\sqrt{R(Q_2)}}, \quad W(X, Y) = \frac{(\mathbf{K}(Q_1), \bar{B}\mathbf{K}(Q_2))}{\sqrt{r(Q_1)}\sqrt{R(Q_2)}},$$

$g_1(X) = \sqrt{r(Q_1)}, g_2(Y) = \sqrt{R(Q_2)}$. Применяя теперь каноническое преобразование $(P_1, P_2, X, Y) \rightarrow (p_1, p_2, x, y)$ вида

$$dX = \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{\sqrt{S(x)}} + \frac{dy}{\sqrt{yS(y)}} \right), \quad dY = -\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{\sqrt{xS(x)}} + \frac{dy}{\sqrt{yS(y)}} \right),$$

$$P_1 = \frac{2}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \left[\left(p_1 - \frac{j_1 + j_2}{4(x-y)} \sqrt{\frac{y}{x}} \right) \sqrt{S(x)} - \left(p_2 + \frac{j_1 + j_2}{4(x-y)} \sqrt{\frac{x}{y}} \right) \sqrt{S(y)} \right],$$

$$P_2 = \frac{2}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \left[\left(p_1 - \frac{j_1 + j_2}{4(x-y)} \sqrt{\frac{y}{x}} \right) \sqrt{yS(x)} - \left(p_2 + \frac{j_1 + j_2}{4(x-y)} \sqrt{\frac{x}{y}} \right) \sqrt{xS(y)} \right],$$

получим (3)–(5), (16), где

$$S(x) = -4x(1 + \alpha_1^2 x)(1 + \alpha_2^2 x)(1 + \alpha_3^2 x), \quad Z(x, y) = -\frac{1}{2}j_1(x + y) - j_2\sqrt{xy},$$

$$f(x) = \frac{1}{4}\left(j_1^2\alpha^2 x^2 + \frac{j_2^2}{x}\right) - j_2^2\frac{1}{4}\alpha^2\left(\frac{1}{\alpha_1^2} + \frac{1}{\alpha_2^2} + \frac{1}{\alpha_3^2}\right)x.$$

Благодарности. Авторы благодарны Е. В. Ферапонтову за внимание к работе. Исследования были частично поддержаны РФФИ (гранты № 05-01-00189 и № 04-01-00403), а также Программой поддержки ведущих научных школ (НШ-1716.2003.1, НШ-6358.2006.2).

Список литературы

- [1] B. Dorizzi, B. Grammaticos, A. Ramani, P. Winternitz, *J. Math. Phys.*, **26** (1985), 3070–3079; E. V. Ferapontov, A. P. Fordy, *Physica D*, **108** (1997), 350–364; *Rep. Math. Phys.*, **44**:1–2 (1999), 71–80; E. McSween, P. Winternitz, *J. Math. Phys.*, **41** (2000), 2957–2967.
- [2] H. M. Yehia, *J. Phys. A*, **25** (1992), 197–221.
- [3] V. G. Marikhin, V. V. Sokolov, *Regul. Chaotic Dyn.*, **10**:1 (2005), 59–70.
- [4] В. Г. Марихин, В. В. Соколов, *УМН*, **60**:5 (2005), 175–176.
- [5] F. Schottky, *Sitzungsber. Königl. Preuss. Acad. Wiss. zu Berlin*, **13** (1891), 227–232; С. В. Манаков, *Функц. анализ и его прилож.*, **10**:4 (1976), 93–94; A. Clebsch, *Math. Ann.*, **3** (1870), 238–262.
- [6] В. В. Прасолов, Ю. П. Соловьев, *Эллиптические функции и алгебраические уравнения*, Факториал, М., 1997.
- [7] V. A. Stekloff, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Sci. Math. Sci. Phys., Ser. 3*, **1** (1909), 145–226.

Поступила в редакцию 24.05.2006