Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Цыганов, О бигамильтоновых системах натурального вида, *ТМФ*, 2006, том 149, номер 2, 161–182

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf4225>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 13:04:15

© 2006 г.

А. В. Цыганов*

О БИГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМАХ НАТУРАЛЬНОГО ВИДА

Предложен новый метод построения интегрируемых систем натурального вида, в котором интегралы движения являются решениями переопределенной системы алгебраических и дифференциальных уравнений в частных производных, полученной из условия совместности тензоров Пуассона, полиномиальных по импульсам, и условия инвариантности соответствующего интегралам движения билагранжева распределения относительно действия оператора рекурсии.

Ключевые слова: интегрируемые системы, бигамильтоновы многообразия, разделение переменных.

1. ВВЕДЕНИЕ

Гладкое многообразие M , снабженное парой совместных тензоров Пуассона P и P' , называется бигамильтоновым многообразием. Динамические системы на многообразии M , обладающие достаточным для интегрируемости по Лиувиллю количеством функционально независимых интегралов движения $H_1, H_2, \dots, H_n$ в биинволюции относительно скобок Пуассона

$$\{H_i, H_k\} = \{H_i, H_k\}' = 0, \quad (1.1)$$

будем называть для краткости биинтегрируемыми системами или обобщенными бигамильтоновыми системами [1].

Наиболее общим методом поиска интегрируемых систем, который применим практически ко всем известным системам, является метод неопределенных коэффициентов [2], при этом интегралы движения H_i ищутся в виде полиномов или других функций с неопределенными коэффициентами, которые затем находятся из условия инволютивности интегралов движения (1.1).

В данной работе рассмотрена модификация метода неопределенных коэффициентов, которая может быть использована для поиска тензоров Пуассона P' и связанных с ними бигамильтоновых систем натурального вида. В отличие от исходного метода, предлагаемый алгоритм позволяет получить не только интегралы движения, но и оператор рекурсии вместе с соответствующими ему переменными разделения.

*Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: tsiganov@mph.phys.spbu.ru

В качестве примера построены операторы рекурсии для известных интегрируемых систем натурального вида с интегралами движения третьей и четвертой степени по импульсам.

2. ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ НАТУРАЛЬНОГО ВИДА НА ωN -МНОГООБРАЗИЯХ

Напомним, что для систем натурального вида гамильтониан H является суммой положительно-определенной кинетической энергии T и потенциальной энергии V . Например, на симплектическом многообразии $M \simeq \mathbb{R}^{2n}$, т.е. в евклидовом пространстве, функция Гамильтона имеет вид

$$H = T + V = \sum_{i=1}^n p_i^2 + V(q). \quad (2.1)$$

Здесь p и q – канонические координаты, так что скобки Пуассона для произвольных функций $f, g \in C^\infty(M)$ определяются соотношениями

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right). \quad (2.2)$$

Соответствующий тензор Пуассона

$$P = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \text{diag}(1, \dots, 1), \quad (2.3)$$

называется каноническим тензором.

В данной работе рассматривается вопрос о построении интегрируемых систем натурального вида на ωN -многообразиях, которые являются частным случаем бигамильтоновых многообразий общего положения [1], [3]–[5].

2.1. ωN -многообразия. Введем некоторые определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Тензоры Пуассона P и P' называются *совместными*, если любая их линейная комбинация $\tilde{P} = P + \lambda P'$ также является тензором Пуассона.

Здесь и всюду далее подразумевается, что тензоры P и P' независимы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Если один из тензоров Пуассона невырожден, то бигамильтоново многообразие M называется ωN -многообразием.

Без ограничения общности можно предположить, что невырожден первый тензор P . В этом случае на ωN -многообразии M определена и симплектическая форма $\omega = P^{-1}$, и оператор

$$N = P'P^{-1}, \quad (2.4)$$

который называют оператором рекурсии (формально) [3], [4], а также тензором Нийенхейса [5] или наследующим оператором [6]. Бигамильтоново многообразие M , снабженное оператором рекурсии N , принято называть многообразием Пуассона–Нийенхейса.

В рассматриваемом нами случае для построения оператора N (2.4) необходимо найти тензор Пуассона, совместный с каноническим тензором (2.3). Если $z = (q, p) = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$, то скобки Пуассона, отвечающие тензору Пуассона P' , определяются следующим образом:

$$\{f(z), g(z)\}' = \sum_{i,k=1}^{2n} P'_{ik}(z) \frac{\partial f(z)}{\partial z_i} \frac{\partial g(z)}{\partial z_k}.$$

В общем случае элементы $P'_{ik}(z)$ тензора P' являются функциями координат q и импульсов p , которые удовлетворяют системе алгебраических уравнений (кососимметричность)

$$P'_{ij} = -P'_{ji}, \quad i, j = 1, 2, \dots, 2n,$$

и системе дифференциальных уравнений

$$\sum_{m=1}^{2n} \left(P'_{im} \frac{\partial P'_{jk}}{\partial z_m} + P'_{jm} \frac{\partial P'_{ki}}{\partial z_m} + P'_{km} \frac{\partial P'_{ij}}{\partial z_m} \right) = 0, \quad i, j, k = 1, 2, \dots, 2n, \quad (2.5)$$

которые следуют из тождества Якоби

$$\{f, \{g, h\}'\}' + \{g, \{h, f\}'\}' + \{h, \{f, g\}'\}' = 0 \quad (2.6)$$

для произвольных функций f, g и $h \in C^\infty(M)$.

Так как искомый тензор P' должен быть совместен с тензором P (2.3), то функции $\tilde{P}_{ij}(z) = P_{ij}(z) + \lambda P'_{ij}(z)$ должны удовлетворять дифференциальным уравнениям

$$\sum_{m=1}^{2n} \left(\tilde{P}_{im} \frac{\partial \tilde{P}_{jk}}{\partial z_m} + \tilde{P}_{jm} \frac{\partial \tilde{P}_{ki}}{\partial z_m} + \tilde{P}_{km} \frac{\partial \tilde{P}_{ij}}{\partial z_m} \right) = 0, \quad i, j, k = 1, 2, \dots, 2n, \quad (2.7)$$

которые следуют из тождества Якоби для скобок Пуассона $\{\cdot, \cdot\}_\lambda = \{\cdot, \cdot\} + \lambda \{\cdot, \cdot\}'$, где λ – произвольный числовой параметр.

Любое решение $P'(z)$ уравнений (2.5), (2.7) определяет тензор N (2.4), с помощью которого систему уравнений (2.5), (2.7) можно записать в инвариантном виде.

ТЕОРЕМА 1 [7], [1]. Для пуассонова пучка $\tilde{P} = P + \lambda P'$ кручение Нийенгейса оператора рекурсии N равно нулю,

$$T_N(X, Y) = [NX, NY] - N([NX, Y] + [X, NY] - N[X, Y]) = 0, \quad (2.8)$$

для любых векторных полей X, Y на ωN -многообразии M .

Всюду далее мы будем использовать частные решения системы уравнений (2.5), (2.7) или эквивалентной ей системы (2.8).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть M является ωN -многообразием размерности $2n$. Если в любой точке $z \in M$ оператор рекурсии N имеет n различных собственных значений $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, то такое многообразие M называется *полупростым*. Если собственные значения λ_i оператора рекурсии функционально независимы, то многообразие M называется *регулярным*.

Уравнения (2.5), (2.7) имеют бесконечно много решений. Поэтому далее мы будем решать эти уравнения в классе функций $P'_{ij}(q, p)$, полиномиальных по импульсам p , что позволит нам найти достаточно большое, но все же конечное число решений.

ПРИМЕР 1. Два кососимметричных тензора

$$P' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & q_1 \\ * & 0 & q_1 & 2q_2 \\ * & * & 0 & -p_1 \\ * & * & * & 0 \end{pmatrix}, \quad P' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 - q_1^2 & -q_1 q_2 \\ * & 0 & -q_1 q_2 & a_2 - q_2^2 \\ * & * & 0 & -q_1 p_2 + q_2 p_1 \\ * & * & * & 0 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

являются тензорами Пуассона, совместными с каноническим тензором P (2.3). Соответствующие операторы N (2.4) обладают нулевым кручением Нийенхейса и их собственные значения функционально независимы. Таким образом, тензоры (2.9) задают структуру регулярного полупростого ωN -многообразия в $M = \mathbb{R}^4$.

2.2. Координаты Дарбу–Нийенхейса. Оператор рекурсии существует практически для всех интегрируемых по Лиувиллю динамических систем [8]. В силу этого классификация пуассоновых пучков $P + \lambda P'$ должна практически повторять классификацию интегрируемых систем, которая имеет значительно более длинную историю (см. [1], [2], [9]). В основе этой взаимосвязи лежит тот факт, что оператор N порождает переменные разделения для соответствующих бигамильтоновых интегрируемых систем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Локальные координаты (x_i, y_i) на ωN -многообразии называются *координатами Дарбу–Нийенхейса*, если они являются координатами Дарбу относительно симплектической формы

$$\omega = P^{-1} = \sum_{i=1}^n dy_i \wedge dx_i$$

и диагонализуют оператор рекурсии

$$N = \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \otimes dx_i + \frac{\partial}{\partial y_i} \otimes dy_i \right), \quad (2.10)$$

что эквивалентно соотношениям $\{x_i, y_j\} = \delta_{ij}$, $\{x_i, y_j\}' = \lambda_i \delta_{ij}$.

Из определения (2.10) следует, что

$$N^* dx_i = \lambda_i dx_i, \quad N^* dy_i = \lambda_i dy_i, \quad (2.11)$$

где N^* – оператор, сопряженный оператору N . Так как для оператора N кручение Нийенхейса T_N равно нулю, то

$$N^* d\lambda_i = \lambda_i d\lambda_i.$$

В силу этого собственные значения λ_i оператора рекурсии можно рассматривать как координаты Дарбу–Нийенхейса специального вида, которые всегда существуют, если многообразие M регулярно.

ТЕОРЕМА 2 [3], [4]. Если в окрестности точки $z \in M$ регулярного ωN -многообразия собственные значения λ_i оператора рекурсии N различны, то в этой окрестности можно с помощью квадратур определить n функций $\mu_1, \dots, \mu_n$, которые вместе с собственными значениями $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ являются координатами Дарбу–Нийенхейса.

Так как λ_i являются собственными значениями оператора рекурсии (как минимум кратности два), то их легко найти в виде корней минимального характеристического полинома оператора N

$$\Delta(\lambda) = (\det(N - \lambda I))^{1/2} = \prod_{j=1}^n (\lambda - \lambda_j).$$

Сопряженные координаты μ_j находятся с помощью интегрирования соотношений (2.11), в которых необходимо положить $x_i = \lambda_i$ и $y_i = \mu_i$.

ПРИМЕР 2. Для первого тензора P' в (2.9) минимальный характеристический полином оператора рекурсии N имеет вид

$$\Delta(\lambda) = \lambda^2 - q_2\lambda - \frac{q_1}{4} = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2).$$

Соответствующие координаты Дарбу–Нийенхейса специального вида

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(q_2 \pm \sqrt{q_1^2 + q_2^2} \right), \quad \mu_{1,2} = p_2 - \frac{p_1}{q_1} \left(q_2 \pm \sqrt{q_1^2 + q_2^2} \right)$$

являются параболическими координатами на плоскости и сопряженными им импульсами. Для второго тензора P' в (2.9) соответствующий минимальный полином

$$\Delta(\lambda) = \lambda^2 + (q_1^2 + q_2^2 - a_1 - a_2)\lambda + a_1a_2 - a_2q_1^2 - a_1q_2^2 = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$$

является производящей функцией эллиптических координат $\lambda_{1,2}$ на плоскости.

2.3. Интегрируемые системы в методе Якоби. Согласно методу Якоби переменные разделения, совпадающие в нашем случае с координатами Дарбу–Нийенхейса, можно использовать для построения сколь угодно большого семейства интегрируемых систем.

ТЕОРЕМА 3. Произведение n одномерных лагранжесевых подмногообразий

$$\mathcal{C}_i: \quad \Phi_i(\mu_i, \lambda_i; \alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0 \quad \text{таких, что} \quad \det \left\| \frac{\partial \Phi_i(\mu_i, \lambda_i)}{\alpha_j} \right\| \neq 0, \quad (2.12)$$

является n -мерным лагранжесевым подмногообразием в M . Решения разделенных уравнений $\Phi_i = 0$ (2.12) относительно параметров α_k являются функционально независимыми функциями $H_k = \alpha_k(\mu, \lambda)$ в инволюции.

Основным недостатком метода Якоби является тот факт, что мы априори не знаем, какие разделенные уравнения $\Phi_i(\lambda_i, \mu_i, \alpha) = 0$ необходимо использовать для получения интегрируемых систем натурального вида или других физически интересных динамических систем.

Для построения бигамильтоновых интегрируемых систем необходимого нам типа можно использовать следующие известные факты.

ТЕОРЕМА 4 [3], [4]. Если M является регулярным ωN -многообразием размерности $2n$ и $\{H_1, \dots, H_n\}$ – семейство независимых функций на M , то следующие утверждения эквивалентны:

- 1) функции $\{H_1, \dots, H_n\}$ находятся в бинволюции (1.1);
- 2) лагранжесово расслоение $\mathcal{F}$, отвечающее функциям $\{H_1, \dots, H_n\}$, допускает разделение переменных в координатах Дарбу–Нийенхейса;
- 3) распределение $\mathcal{D}$, образованное векторными полями X_{H_k} , лагранжесово относительно $\omega = P^{-1}$ и инвариантно относительно действия оператора N .

Инвариантность распределения $\mathcal{D}$ относительно действия оператора N означает, что существует контрольная матрица F , собственные значения которой равны собственным значениям оператора рекурсии λ_i , такая, что

$$N^* dH_j = \sum_{k=1}^n F_{jk} dH_k, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.13)$$

В переменных Дарбу–Нийенхейса уравнения (2.13) совпадают с известным критерием Леви–Чивита [9], в котором описываются гамильтоновы системы, допускающие разделение переменных в данной системе координат.

Обычно критерий Леви–Чивита используют для нахождения переменных разделения, т.е. подставляют в уравнения (2.13) конкретные интегралы движения H_i и затем решают полученные уравнения относительно N [3], [4], [10], [11]. В данной работе мы будем решать обратную задачу. Подставляя неизвестный оператор N и неизвестный гамильтониан натурального вида $H = H_1$ (2.1) в соотношения (2.8) и (2.13), мы получим систему уравнений

$$T_N = 0, \quad N^* dH = F dH. \quad (2.14)$$

Эту систему уравнений мы и предлагаем решать относительно потенциала $V(q)$, интегралов движения $H_2(p, q), \dots, H_n(p, q)$ и функций $N_{ij}(p, q)$.

Предложенный метод наследует основной недостаток метода Якоби, так как контрольная матрица F в уравнениях (2.14) остается неопределенной, так же как и разделенные уравнения $\Phi_i = 0$ в методе Якоби. Одной из возможностей решения этой проблемы является использование контрольных матриц F специального вида.

ПРИМЕР 3. Если $H_k = \text{tr } N^k / (2k)$, то контрольная матрица в уравнении (2.13) имеет вид

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \sigma_n & \sigma_{n-1} & \sigma_{n-2} & \dots & \sigma_1 \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

где σ_k – элементарные симметрические полиномы степени k от собственных значений λ_i оператора N . В этом случае уравнения (2.13) становятся стандартными рекуррентными соотношениями

$$N^* dH_i = dH_{i+1} \quad \text{или} \quad P' dH_i = P dH_{i+1}.$$

Интегралы движения H_i образуют цепочку Ленарда–Магри, а соответствующие векторные поля X_{H_i} являются бигамильтоновыми [1], [4], [12].

2.4. Однородные системы Штеккеля. Рассмотрим специальный класс разделенных уравнений вида

$$\Phi_i(\mu_i, \lambda_i, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{j=1}^n S_{ij}(\lambda_i) \alpha_j - s_i(\mu_i, \lambda_i) = 0, \quad H_i = \alpha_i. \quad (2.16)$$

Здесь S и s называются матрицей и вектором Штеккеля, для которых $\det S \neq 0$ и элементы S_{ij} , s_i зависят только от пары сопряженных координат λ_i и μ_i .

ТЕОРЕМА 5 [3], [4]. *Предположим, что семейство $\{H_1, \dots, H_n\}$ независимых интегралов движения в бинволюции определяет билагранжеево расслоение регулярного полупростого ωN -многообразия. Если матрица F в (2.13) удовлетворяет соотношениям*

$$N^* dF = F dF, \quad \text{т.е.} \quad N^* dF_{ij} = \sum_{k=1}^n F_{ik} dF_{kj}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.17)$$

то интегралы движения $\{H_1, \dots, H_n\}$ допускают штеккелевское разделение переменных (2.16) относительно координат Дарбу–Нийенхейса, а матрица Штеккеля S находится из уравнения

$$F = S^{-1} \Lambda S, \quad \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Подставляя оператор N и гамильтониан натурального вида $H = H_1$ (2.1) в соотношения (2.8), (2.13) и (2.17), мы получим расширенную систему дифференциальных уравнений

$$T_N = 0, \quad N^* dH = F dH, \quad N^* dF = F dF \quad (2.18)$$

для неизвестных функций $V(q)$, $H_2(p, q), \dots, H_n(p, q)$, $N_{ij}(p, q)$ и $F_{ij}(p, q)$.

Систему уравнений (2.18) также пока невозможно исследовать в общем виде. Дело в том, что хотя мы и зафиксировали необходимый нам вид функции Гамильтона (2.1) и класс разделенных уравнений (2.16), но входящий в них вектор Штеккеля s остается по-прежнему неопределенным.

Поэтому далее мы будем рассматривать однородные системы Штеккеля, для которых матрица Штеккеля и разделенные уравнения имеют вид

$$S = \begin{pmatrix} \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_n^{n-1} & \dots & \lambda_n & 1 \end{pmatrix}, \quad \Phi_i = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \lambda_i^k = s_i(\mu_i, \lambda_i). \quad (2.19)$$

В этом случае контрольная матрица равна

$$F = S^{-1} \Lambda S = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \sigma_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \sigma_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

где σ_j – симметрические полиномы от собственных значений λ_j оператора N

$$\Delta(\lambda) = \lambda^n - \sigma_1 \lambda^{n-1} - \sigma_2 \lambda^{n-2} - \dots - \sigma_n. \quad (2.21)$$

Решая разделенные уравнения (2.16) относительно постоянных $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, можно построить соответствующие им интегралы движения H_i :

$$H_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \sigma_j}{\partial \lambda_j} \frac{s_i(\mu_i, \lambda_i)}{\prod_{i \neq k} (\lambda_i - \lambda_k)}. \quad (2.22)$$

Соответствующие векторные поля X_{H_i} называются квазигамильтоновыми полями пфаффовского типа [3], [4].

Напомним, что в общем случае матрица Штеккеля S совпадает с транспонированной матрицей Бриль–Нётер, которая является производной отображения Абеля, т.е. является линейным отображением из касательного пространства к лагранжеву подмногообразию данной интегрируемой системы в касательное пространство якобиана некоторой алгебраической кривой [13].

В нашем случае матрица S вида (2.19) определена с помощью канонического базиса (базиса Веронезе) в пространстве голоморфных дифференциалов на гиперэллиптической кривой C [13].

ГИПОТЕЗА. Для интегрируемых систем с контрольной матрицей F вида (2.20) билагранжево расслоение, отвечающее интегралам движения H_i (2.22), представимо в виде произведения гиперэллиптических кривых C_i , задаваемых разделенными уравнениями (2.19).

Согласно этой гипотезе, выбирая контрольную матрицу F вида (2.20), мы тем самым де-факто фиксируем и вектор Штеккеля s , так как алгебраическая кривая, отвечающая разделенным уравнениям, должна быть гиперэллиптической кривой.

Эта гипотеза верна для всех известных на данный момент интегрируемых систем, обладающих контрольной матрицей вида (2.20). Кроме того, для всех известных примеров интегрируемых систем на более общих не гиперэллиптических кривых C_i соответствующая матрица F имеет другой вид [3], [4].

ПРИМЕР 4. Рассмотрим интегрируемую систему на плоскости, допускающую разделение переменных в полярных координатах (r, ϕ, p_r, p_ϕ) . Соответствующий тензор Пуассона

$$P' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & r^2 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

задает структуру регулярного, но не полупростого ωN -многообразия в $M = \mathbb{R}^4$. Для интегралов движения

$$H_1 = p_r^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2} + V(r), \quad H_2 = p_\phi \quad (2.24)$$

контрольная матрица и разделенные уравнения имеют вид

$$F = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Phi_1 = p_r^2 + \frac{\alpha_2^2}{r^2} + V(r) - \alpha_1 = 0, \quad \Phi_2 = p_\phi - \alpha_2 = 0.$$

Если $V(r)$ – полином, то первое из разделенных уравнений Φ_1 задает гиперэллиптическую кривую на плоскости, а второе уравнение Φ_2 – прямую.

3. БИГАМИЛЬТОНОВЫ СИСТЕМЫ В $\mathbb{R}^{2n}$

В настоящее время известны два больших класса бигамильтоновых систем натурального вида в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{2n}$. Изучению этих систем посвящено достаточно большое количество работ (см. [3], [4], [12], [14]–[16] и приведенную там литературу). В этом разделе мы лишь кратко опишем эти два класса интегрируемых систем.

3.1. Системы Штеккеля: квадратичные интегралы. Предположим, что $M = T^*Q$ и на конфигурационном пространстве $Q \simeq \mathbb{R}^n$ определен конформный тензор Киллинга L градиентного типа, обладающий нулевым кручением Нийенхейса и различными собственными значениями $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ [12], [14].

В этом случае оператор N является полным поднятием тензора L на фазовое пространство $M = T^*Q$:

$$N \frac{\partial}{\partial q^k} = \sum_{i=1}^n L_k^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \sum_{ij} p_j \left(\frac{\partial L_i^j}{\partial q^k} - \frac{\partial L_k^j}{\partial q^i} \right) \frac{\partial}{\partial p_i}, \quad N \frac{\partial}{\partial p_k} = \sum_{i=1}^n L_i^k \frac{\partial}{\partial p_i}.$$

Соответствующий второй тензор Пуассона

$$P' = NP = \begin{pmatrix} 0 & -L_i^j \\ L_i^j & \left(\frac{\partial L_j^k}{\partial q_i} - \frac{\partial L_i^k}{\partial q_j} \right) p_k \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

является линейным полиномом по импульсам p .

ПРИМЕР 5. В пространстве $M = \mathbb{R}^4$ существует всего четыре подобных линейных тензора P' : тензоры (2.9), отвечающие эллиптическим и параболическим координатам, тензор (2.23), отвечающий полярным координатам, и числовой кососимметричный тензор, отвечающий декартовым координатам [14].

Для тензора Пуассона P' вида (3.1) и натурального гамильтониана $H_1 = T + V$ (2.1) система уравнений (2.14) распадается на два уравнения

$$d(\mathcal{L}_{X_T} \theta' - T d\sigma_1) = 0, \quad d(\mathcal{L}_{X_V} \theta' - V d\sigma_1) = 0, \quad (3.2)$$

определяющих тензор L и потенциал V , а также систему рекуррентных уравнений для определения интегралов движения

$$N^* dH_i = dH_{i+1} + \sigma_i dH_1, \quad i = 2, 3, \dots, n, \quad (3.3)$$

которые необходимо решать, начиная с $i = n$ при условии $H_{n+1} = 0$. В уравнения (3.2) входит производная Ли $\mathcal{L}$ вдоль векторного поля X и деформация стандартной формы Лиувилля $\theta = \sum_j p_j dq^j$ вида $\theta' = \sum_{i,j=1}^n L_j^i p_i dq^j$.

В работах [11] предложено программное обеспечение, которое позволяет эффективно решать уравнения вида (3.2) и (3.3) на различных римановых многообразиях Q положительной кривизны, в том числе и на евклидовых пространствах.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Поскольку тензор Пуассона P' является линейной функцией от импульсов p_j специального вида, а функции σ_i зависят только от координат q , то согласно уравнениям (3.3) для интегрируемых систем натурального вида все интегралы движения $H_2, \dots, H_n$ будут не более чем квадратичными полиномами по импульсам.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Поскольку собственные значения оператора N совпадают с собственными значениями $\lambda_i(q_1, \dots, q_n)$ тензора L , которые являются функциями на конфигурационном пространстве Q , то соответствующие интегрируемые системы допускают разделение переменных в ортогональных криволинейных системах координат.

3.2. Цепочки Тоды. Бигамильтонова структура открытых цепочек Тоды $\mathcal{A}_n$ -типа с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} e^{2(q_i - q_{i+1})}$$

активно исследовалась в ряде работ начиная с 1979 года (см. [16] и приведенную там литературу). Второй оператор Пуассона

$$P' = \sum_{i=1}^{n-1} 2e^{2(q_i - q_{i+1})} \frac{\partial}{\partial p_{i+1}} \wedge \frac{\partial}{\partial p_i} + \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial}{\partial q_i} \wedge \frac{\partial}{\partial p_i} + \frac{1}{2} \sum_{i < j}^n \frac{\partial}{\partial q_j} \wedge \frac{\partial}{\partial q_i} \quad (3.4)$$

является линейной функцией от импульсов [16].

Для открытых цепочек Тоды, отвечающих классическим корневым системам $\mathcal{BC}_n$ -и $\mathcal{D}_n$ -типа, второй тензор Пуассона $\tilde{P}' = P'P^{-1}P' + K(p, q)$ является квадратичным полиномом по импульсам [15]. Здесь P' – линейный по импульсам тензор для цепочки Тоды $\mathcal{A}_n$ -типа (3.4), а дополнительное слагаемое $K(p, q)$ является линейной функцией от импульсов p_1 и p_n , которая зависит от типа корневой системы.

В следующем разделе мы предьявим обобщение известных квадратичных тензоров Пуассона [15], которое связано с деформацией цепочек Тоды, предложенной Иноземцевым [17].

4. БИГАМИЛЬТОНОВЫ СИСТЕМЫ НА ПЛОСКОСТИ

В данном разделе мы используем функцию Гамильтона натурального вида H (2.1) и полиномиальную по импульсам подстановку для тензора Пуассона P' в уравнения (2.14) и опишем все нетривиальные физические решения полученных уравнений при $n = 2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Решение уравнений (2.14) называется *тривиальным*, если интегралы движения функционально зависимы или постоянны, если $V = \text{const}$ и если $V(q)$ является комплексной функцией.

Мы ограничимся рассмотрением только полупростых и регулярных ωN -многообразий, так как в противном случае нам не известны ни переменные разделения, ни форма разделенных уравнений и, следовательно, класс соответствующих интегрируемых систем слишком широк.

ПРИМЕР 6. Подставляя тензор Пуассона P' , не зависящий от импульсов, и гамильтониан $H_1 = p_1 p_2 + V(q_1, q_2)$ в (2.14), можно получить следующее решение:

$$P' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & f(q_1) & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 \end{pmatrix},$$

$$H_1 = p_1 p_2 + \frac{q_2}{4C_1 q_1} + f(q_1), \quad H_2 = \sqrt{q_1} e^{C_1 p_2^2}.$$

Такие решения уравнений (2.14) далее не рассматриваются.

Интегрируемые системы натурального вида на плоскости являются одними из наиболее исследованных семейств интегрируемых систем [2], [9]. Поэтому, решая уравнения (2.14) при $n = 2$, мы можем только построить неизвестные ранее операторы рекурсии для уже известных интегрируемых систем. Тем не менее нам удалось найти две новые интегрируемые системы с псевдоевклидовой метрикой.

4.1. Тензор Пуассона, линейный по импульсам. Рассмотрим следующий анзац для тензора Пуассона:

$$P' = \begin{pmatrix} 0 & h(q) & c_1 p_1 + c_2 p_2 & c_3 p_3 + c_4 p_4 \\ * & 0 & c_5 p_1 + c_6 p_2 & c_7 p_1 + c_8 p_2 \\ * & * & 0 & f(q) \\ * & * & * & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

где f и h – функции от координат q , а c_k – числовые параметры.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Решения уравнений (2.5), (2.7) вида (4.1) существуют тогда и только тогда, когда функции $h(q)$ и $f(q)$ имеют вид

$$\begin{aligned} 1) \quad & h(q_1, q_2) = \text{const}, \quad f(q_1, q_2) = e^{q_1}, \\ 2) \quad & h(q_1, q_2) = q_1, \quad f(q_1, q_2) = q_1^\alpha, \end{aligned}$$

с точностью до преобразований Галилея $q \rightarrow q' = Aq + b$.

В первом случае тензор Пуассона, совместный с каноническим, имеет вид

$$P'_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2(c_1^2 + c_2 c_3)}{c_3} & c_1 p_1 + c_2 p_2 & c_3 p_1 - c_1 p_2 \\ * & 0 & c_2 p_1 - \frac{c_1 c_2}{c_3} p_2 & -c_1 p_1 + \frac{c_2 c_3 + 2c_1^2}{c_3} p_2 \\ * & * & 0 & b e^{q_1} \\ * & * & * & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Во втором случае существуют два тензора Пуассона с произвольным показателем α

$$P'_2 = \begin{pmatrix} 0 & q_1 & -\frac{(\alpha+1)}{2} p_2 & 0 \\ * & 0 & \frac{(1-\alpha)}{2} p_1 + a p_2 & -\frac{(\alpha+1)}{2} p_2 \\ * & * & 0 & b q_1^\alpha \\ * & * & * & 0 \end{pmatrix}, \quad P'_3 = \begin{pmatrix} 0 & q_1 & 0 & 0 \\ * & 0 & p_1 + a p_2 & -(\alpha+1) p_2 \\ * & * & 0 & b q_1^\alpha \\ * & * & * & 0 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

и один тензор Пуассона с $\alpha = -3$

$$P'_4 = \begin{pmatrix} 0 & q_1 & c_1 p_1 + c_2 p_2 & -\frac{c_1^2}{c_2} p_1 - c_1 p_2 \\ * & 0 & (c_2 + 1) p_1 + \frac{c_2(c_2-1)}{c_1} p_2 & -c_1 p_1 + (2 - c_2) p_2 \\ * & * & 0 & b q_1^{-3} \\ * & * & * & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Решения расширенной системы уравнений (2.14) описываются следующими двумя предложениями.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если тензор Пуассона P' имеет вид (4.1), то система уравнений (2.14) с матрицей F (2.15) имеет единственное нетривиальное решение

$$P' = \begin{pmatrix} 0 & a & p_1 & 0 \\ * & 0 & 0 & p_2 \\ * & 0 & 0 & b e^{(q_2 - q_1)/a} \\ * & * & * & 0 \end{pmatrix}, \quad H_1 = p_1^2 + p_2^2 + 2a b e^{(q_2 - q_1)/a}. \quad (4.5)$$

Второй интеграл движения $H_2 = (p_1 + p_2)H_1 - (p_1 + p_2)^3/3$ формально является полиномом третьей степени по импульсам.

Это решение системы уравнений (2.14) совпадает с открытой цепочкой Тоды $\mathcal{A}_2$ -типа.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Нетривиальные решения уравнений (2.5), (2.7) вида (4.1) и уравнений (2.13) с контрольной матрицей F (2.20) при

$$H_1 = p_1^2 + p_2^2 + V(q_1, q_2), \quad H_2 = H_2(p_1, p_2, q_1, q_2)$$

имеют вид

$$\begin{aligned}
 P'_1 &= \begin{pmatrix} 0 & -2 & p_2 & 3p_1 \\ * & 0 & p_1 & p_2 \\ * & * & 0 & be^{q_1} \\ * & * & -be^{q_1} & 0 \end{pmatrix}, & V_1 &= -\frac{2b}{3}e^{q_1} + C_1e^{-q_1/2+\sqrt{3}q_2/2} + C_2e^{-q_1/2-\sqrt{3}q_2/2}, \\
 P'_2 &= \begin{pmatrix} 0 & q_1 & -2p_2/3 & 0 \\ * & 0 & p_1/3 & -2p_2/3 \\ * & * & 0 & bq_1^{1/3} \\ * & * & * & 0 \end{pmatrix}, & V_2 &= \frac{b(3q_1^2 + 4q_2^2) + C_1q_2 + C_2}{4q_1^{2/3}}, \\
 P'_3 &= \begin{pmatrix} 0 & q_1 & 0 & 0 \\ * & 0 & p_1 & -2p_2 \\ * & * & 0 & bq_1 \\ * & * & * & 0 \end{pmatrix}, & V_3 &= b\left(\frac{q_1^2}{4} + q_2^2\right) + C_1q_2 + \frac{C_2}{q_1^2}, \\
 P'_4 &= \begin{pmatrix} 0 & q_1 & 0 & 4p_1 \\ * & 0 & p_1 & 2p_2 \\ * & * & 0 & b/q_1^3 \\ * & * & * & 0 \end{pmatrix}, & V_4 &= \frac{b}{4q_1^2} + C_1q_2^2 + C_2q_2 - C_3q_1^2,
 \end{aligned}$$

где C_j – произвольные постоянные, возникающие при интегрировании дифференциальных уравнений.

Соответствующие вторые интегралы движения H_2 являются полиномами третьей степени по импульсам, которые мы не будем выписывать явно, так как первое решение отвечает трехчастичной периодической цепочке Тоды в системе центра масс [2], второе решение известно как система Холта [2], [18], третье и четвертое решения можно рассматривать как системы типа Калоджеро [2], [9]. Это означает, что полученные нами интегралы движения совпадают с известными интегралами движения, полученными, например, с помощью представлений Лакса [9].

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если предположить, что в тензоре P' (4.1) коэффициенты c_k являются не числами, а функциями от координат q , то решений уравнений (2.5), (2.7) будет довольно много, но множество нетривиальных решений полной системы уравнений (2.14) останется тем же самым.

В уравнениях (2.13) можно использовать функцию Гамильтона натурального вида, определенную с точностью до точечных преобразований, т.е. в виде

$$H = \tilde{T} + V(q), \quad \tilde{T} = \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(q)p_i p_j + \sum_{k=1}^n b_k(q)p_k. \quad (4.6)$$

Здесь $b_{ij}(q)$ и $b_k(q)$ являются функциями от координат q такими, что кинетическую энергию $\tilde{T}$ можно привести к форме (2.1) точечными преобразованиями.

Используя эту возможность обобщения предложенного алгоритма, можно, например, получить некоторые системы Драша [19]. Мы ограничимся рассмотрением только одной из систем Драша, последней в его списке, для которой переменные

разделения были не известны ранее и которая не является вырожденной системой Штекеля, обладающей квадратичными интегралами движения [20].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Одно из решений системы уравнений (2.18) на плоскости с псевдоевклидовой метрикой, т.е. при $H_1 = p_1 p_2 + V(q_1, q_2)$, имеет вид

$$H_1 = p_1 p_2 - 2b \frac{2aq_1 - q_2}{\sqrt{q_1}} + \frac{C_1}{\sqrt{q_1}} + C_2 \left(q_2 - \frac{2a}{3} q_1 \right).$$

Подставляя соответствующий тензор Пуассона $P' = P'_3$ (4.3) при $\alpha = -1/2$ в оператор N и вычисляя его собственные значения, мы получим переменные разделения для данной интегрируемой системы

$$\lambda_{1,2} = -\frac{p_2}{4} \pm \frac{\sqrt{p_2^2 + 16b\sqrt{q_1}}}{4}.$$

Второй интеграл движения H_2 является кубическим полиномом по импульсам.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Другой возможностью расширить область применимости алгоритма является свобода выбора одного из интегралов $H_1, \dots, H_n$, который можно отождествить с функцией Гамильтона натурального вида. В приведенных ранее примерах мы отождествляли $H_1 = H$.

4.2. Квадратичный по импульсам тензор Пуассона. Рассмотрим следующий анзац для тензора Пуассона:

$$P' = \begin{pmatrix} 0 & h_1(q)p_1 + h_2(q)p_2 & \sum c_{ij}^1 p_i p_j + g_1(q) & \sum c_{ij}^2 p_i p_j + g_2(q) \\ * & 0 & \sum c_{ij}^3 p_i p_j + g_3(q) & \sum c_{ij}^4 p_i p_j + g_4(q) \\ * & * & 0 & f_1(q)p_1 + f_2(q)p_2 \\ * & * & * & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

где f_i, g_i, h_i – функции от координат q , а c_{ij}^k – числовые параметры.

4.2.1. Квадратичные интегралы движения. Одно из решений уравнений (2.5), (2.7), (2.13) с контрольной матрицей F (2.20) имеет вид

$$H_1 = p_1^2 + p_2^2 + \frac{C_3}{2}(q_1^2 + q_2^2) - \frac{C_1 - C_2}{2(q_1 + q_2)^2} - \frac{C_1 + C_2}{2(q_1 - q_2)^2}$$

и

$$P' = \begin{pmatrix} 0 & p_1 q_2 - p_2 q_1 & -p_1^2 + g_1(q) & -p_2 p_1 + g_2(q) \\ * & 0 & -p_2 p_1 + g_3(q) & -p_2^2 + g_4(q) \\ * & * & 0 & p_1 f_1(q) + p_2 f_2(q) \\ * & * & * & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

где

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{q_1(C_1 q_1^3 + 3C_2 q_1^2 q_2 + 3C_1 q_1 q_2^2 + C_2 q_2^3)}{(q_1 - q_2)^3 (q_1 + q_2)^3}, \\ g_2 &= \frac{q_1(C_2 q_1^3 + 3C_1 q_1^2 q_2 + 3C_2 q_1 q_2^2 + C_1 q_2^3)}{(q_1 - q_2)^3 (q_1 + q_2)^3}, \\ g_3 &= q_2 q_1^{-1} g_1(q), \quad g_4 = q_2 q_1^{-1} g_2(q), \\ f_1 &= q_1^{-1} g_2(q), \quad f_2 = q_1^{-1} g_1(q). \end{aligned}$$

В этом случае входящий в уравнения (2.13) интеграл движения $H_2 = \tilde{H}_2 - H_1^2/4$ является комбинацией гамильтониана H_1 и независимого от него квадратичного полинома по импульсам $\tilde{H}_2$ такого, что $\{H_1, \tilde{H}_2\} = 0$.

Подставляя тензор P' (4.8) в уравнения (2.13) с контрольной матрицей F вида (2.15), можно получить другое нетривиальное решение:

$$H_1 = p_1^2 + p_2^2 - \frac{C_1(q_1^2 + q_2^2)}{(q_1 + q_2)^2(q_1 - q_2)^2} - \frac{2C_2q_1q_2}{(q_1 + q_2)^2(q_1 - q_2)^2}.$$

Как и ранее, второй интеграл движения H_2 , входящий в уравнения (2.13), является комбинацией двух квадратичных интегралов движения. Таким образом, мы опять получили интегрируемую систему с квадратичными интегралами движения, которая допускает разделение переменных в одной из криволинейных систем координат на плоскости.

4.2.2. Интегралы движения четвертого порядка по импульсам. Всюду далее мы не будем рассматривать интегрируемые системы, для которых второй интеграл движения H_2 в (2.13) является полиномом четвертой степени только формально, т.е. для которых H_2 является комбинацией гамильтониана H_1 и второго независимого квадратичного полинома $\tilde{H}_2$. Также мы не будем рассматривать системы, которые допускают разделение переменных в исходных физических переменных $q_{1,2}$, т.е. системы, для которых $\partial^2 V / \partial q_1 \partial q_2 = 0$.

Итак, подставляя анзац (4.7) в уравнения (2.5), (2.7), мы получим, что функции h_i либо постоянные ($h_i = \text{const}$), либо линейные ($h_i = a_i q_1 + b_i q_2$). Рассмотрим эти два случая по отдельности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Существуют всего два решения уравнений системы (2.14) с контрольной матрицей F (2.15), гамильтонианом натурального вида H_1 и тензором Пуассона вида (4.7)*

$$P' = \begin{pmatrix} 0 & 2ap_1 + 2bp_2 & p_1^2 + g_1(q) & g_2(q) \\ * & 0 & g_3(q) & p_2^2 + g_4(q) \\ * & * & 0 & f_1(q)p_1 + f_2(q)p_2 \\ * & * & * & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Если $a \neq 0$ и $b \neq 0$, то гамильтониан равен

$$H_1 = p_1^2 + p_2^2 + (a+b)C_1e^{(q_2-q_1)/(a+b)} - (a-b)C_2e^{(q_2+q_1)/(a-b)}, \quad (4.10)$$

при этом функции, определяющие тензор Пуассона, имеют вид

$$\begin{aligned} f_1 &= C_1e^{(q_2-q_1)/(a+b)} - C_2e^{(q_1+q_2)/(a-b)}, & f_2 &= C_1e^{(q_2-q_1)/(a+b)} + C_2e^{(q_1+q_2)/(a-b)}, \\ g_1 &= 2bf_2, & g_2 &= bf_1 - af_2, & g_3 &= -g_2, & g_4 &= 2af_1. \end{aligned}$$

Если либо $a = 0$, либо $b = 0$, то существует еще одно нетривиальное решение. При $a = 0$ и $b = 1$ гамильтониан имеет вид

$$H_1 = p_1^2 + p_2^2 + 2C_1e^{-q_1-q_2} + 2C_2e^{q_2-q_1} - \frac{C_4e^{2q_2}}{2(C_2e^{2q_2} - C_1)^2} - \frac{C_5e^{q_2}(C_2e^{2q_2} + C_1)}{(C_2e^{2q_2} - C_1)^2}, \quad (4.11)$$

а остальные функции, входящие в тензор P' (4.9), равны

$$\begin{aligned} f_1 &= (C_2 e^{q_2} - C_1 e^{-q_2}) e^{-q_1}, & f_2 &= (C_2 e^{q_2} + C_1 e^{-q_2}) e^{-q_1}, \\ g_1 &= 2f_2, & g_2 &= f_1 + \frac{dg_4}{dq_2}, & g_3 &= f_1, \\ g_4 &= \frac{C_4 e^{2q_2}}{(C_2 e^{2q_2} - C_1)^2} + \frac{C_5 e^{q_2} (C_2 e^{2q_2} + C_1)}{(C_2 e^{2q_2} - C_1)^2}. \end{aligned}$$

Интегралы движения H_2 являются полиномами четвертой степени по импульсам.

Первое решение (4.10) отвечает открытой двухчастичной цепочке Тоды, связанной с корневой системой $\mathcal{D}_2$ -типа.

Если $C_4 = C_5 = 0$, то второе решение (4.11) также отвечает цепочке Тоды $\mathcal{D}_2$ -типа. Однако если $C_1 = 0$ или $C_2 = 0$, то решение (4.11) отвечает открытой двухчастичной цепочке Тоды, связанной с корневой системой $\mathcal{BC}_2$ -типа. В случае $C_1 = C_2$ решение (4.11) отвечает деформации цепочки Тоды, предложенной Иноземцевым [17].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Для уравнений (2.14) с контрольной матрицей F (2.20) существуют только два явных нетривиальных решения вида (4.7) с $h_i = a_i q_1 + b_i q_2$. Первое из них отвечает системе типа Холта с гамильтонианом

$$H_1 = p_1^2 + p_2^2 - \frac{C_1(2q_1^2 + 9q_2^2)}{6q_2^{2/3}} + \frac{C_2}{q_1^2} + C_3 q_2^{2/3} - \frac{C_4}{q_2^{2/3}} \quad (4.12)$$

и тензором Пуассона

$$P' = \begin{pmatrix} 0 & 3p_1 q_2 & p_1^2 + C_2/q_1^2 & p_1 p_2 + C_1 q_1 q_2^{1/3} \\ * & 0 & -3C_2 q_2/q_1^3 & p_1^2 - 3C_1 q_2^{4/3} + C_2/q_1^2 + 2C_3 q_2^{2/3} \\ * & * & 0 & -C_1 p_1 q_2^{1/3} - C_2 p_2/q_1^3 \\ * & * & * & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

Второе решение отвечает известной интегрируемой системе с потенциалом четвертой степени (биквадратичный потенциал)

$$H_1 = p_1^2 + p_2^2 - C_1 \left(4q_1^4 + 3q_1^2 q_2^2 + \frac{q_2^4}{2} \right) + C_2 \left(q_1^2 + \frac{q_2^2}{4} \right) - \frac{C_3}{q_1^2} - \frac{C_4}{q_2^2} \quad (4.14)$$

и тензором Пуассона

$$P' = \begin{pmatrix} 0 & p_1 q_2 & p_1^2 + g_1(q) & p_1 p_2 + g_2(q) \\ * & 0 & g_3(q) & p_1^2 + 2p_2^2 + g_4(q) \\ * & * & 0 & p_1 f_1(q) + p_2 f_2(q) \\ * & * & * & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.15)$$

где

$$\begin{aligned} f_1 &= -C_1 q_2^3, & f_2 &= 2C_1 q_1 (4q_1^2 + 3q_2^2) - C_2 q_1 - \frac{C_3}{q_1^3}, \\ g_1 &= -4C_1 q_1^4 + C_2 q_1^2 - \frac{C_3}{q_1^2}, & g_2 &= C_1 q_1 q_2^3, & g_3 &= 4g_2 + q_2 f_2, \\ g_4 &= -C_1 (4q_1^4 + 6q_1^2 q_2^2 + q_2^4) + C_2 \left(q_1^2 + \frac{q_2^2}{2} \right) - \frac{C_3}{q_1^2}. \end{aligned}$$

Соответствующие вторые интегралы движения H_2 совпадают с известными полиномами четвертой степени по импульсам [2], [9].

Во втором случае можно сделать контракцию переменных специального вида [21] и получить систему типа Энона–Эйлеса с потенциалом третьей степени

$$H_1 = p_1^2 + p_2^2 + \frac{1}{3} q_1 (16q_1^2 + 3q_2^2) + \frac{C_1}{q_2^2}. \quad (4.16)$$

Выпишем соответствующий тензор Пуассона явно:

$$P' = \begin{pmatrix} 0 & q_2 p_1 & p_1^2 + 16q_1^3/3 & p_1 p_2 - q_2^3/6 \\ * & 0 & 8q_2 q_1^2 + q_2^3/3 & p_1^2 + 2p_2^2 + 2q_1 q_2^2 + 16q_1^3/3 \\ * & * & 0 & -p_2 (8q_1^2 + q_2^2) \\ * & * & * & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Собственные значения операторов N , построенных с помощью тензоров (4.15) и (4.17), удовлетворяют тривиальным уравнениям движения $\dot{\lambda}_{1,2} = 0$ и, следовательно, не являются переменными разделения для системы с потенциалом четвертой степени (4.14) и системы типа Энона–Эйлеса (4.16).

Кроме этих решений уравнений (2.5), (2.7), (2.13) существуют еще несколько решений вида (4.7), для которых функции Гамильтона не могут быть выписаны явно. Во всех этих случаях функции $f_i(q)$, $g_i(q)$ и полином четвертого порядка по импульсам $H_2(p, q)$ выражаются через потенциал $V(q_1, q_2)$, который, в свою очередь, удовлетворяет различным дифференциальным уравнениям второго и третьего порядка в частных производных. В качестве примера мы выпишем одно из полученных уравнений второго порядка:

$$(q_1 q_2 + C_1) \left(\frac{\partial^2}{\partial q_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial q_2^2} \right) V + 3 \left(q_2 \frac{\partial}{\partial q_1} - q_1 \frac{\partial}{\partial q_2} \right) V = (q_1^2 - q_2^2 + C_2) \frac{\partial^2}{\partial q_1 \partial q_2} V.$$

Подобные уравнения второго порядка рассматривались, например, в работах [2], [22]. Уравнения третьего порядка в частных производных, которые используются для описания интегрируемых систем на плоскости, практически не встречаются в литературе. Эти системы требуют отдельного детального исследования.

Как и ранее, в уравнениях (2.13) можно использовать функцию Гамильтона натурального вида (4.6), определенную с точностью до канонических точечных преобразований.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. В случае псевдоевклидовой метрики на плоскости существуют два явных решения уравнений (2.14) вида (4.7). В первом случае

$$H_1 = p_1 p_2 + C_1(4q_1^2 + 5\alpha q_1 q_2 + \alpha^2 q_2^2) + \frac{C_2(q_1 + \alpha q_2)}{q_2^{1/3}} + \frac{C_3}{q_2^{2/3}} + \frac{C_4}{q_2^{4/3}},$$

$$P' = \begin{pmatrix} 0 & 3q_2 p_1 & p_1^2 - 6C_1 q_2(q_1 + \alpha q_2) & \alpha p_1^2 - 3p_1 p_2 - 3C_1(q_1 + \alpha q_2)(2q_1 + \alpha q_2) - \frac{C_2(q_1 + \alpha q_2)}{q_2^{1/3}} + \frac{2C_4}{q_2^{4/3}} \\ * & 0 & 18C_1 q_2^2 & 9C_1 q_2(2q_1 + \alpha q_2) + 3C_2 q_2^{2/3} \\ * & * & 0 & (3C_1(2q_1 - \alpha q_2) + \frac{C_2}{q_2^{1/3}})p_1 + 18C_1 q_2 p_2 \\ * & * & * & 0 \end{pmatrix},$$

во втором случае

$$H_1 = p_1 p_2 + \left(C_1 + \frac{C_2}{\sqrt{q_2}}\right)q_1 + C_3 q_2 + \frac{3C_2 C_3}{C_1} \sqrt{q_2},$$

$$P' = \begin{pmatrix} 0 & 4q_2 p_1 & p_1^2 + q_1 + \alpha q_2 & (6C_1 + 4\alpha)p_1^2 - 2p_1 p_2 + 2(C_1 + \alpha)q_1 + 2C_1 \alpha \left(\left(\sqrt{q_2} + \frac{C_2}{C_1}\right)^2 - \frac{C_2^2(6C_1 + \alpha)}{4C_1^3}\right) \\ * & 0 & 2q_2 & p_1^2 + q_1 + (\alpha + 4C_1)q_2 + 4C_2 \sqrt{q_2} \\ * & * & 0 & -\frac{C_3}{C_1} p_1 + p_2 \\ * & * & * & 0 \end{pmatrix},$$

где $\alpha = (C_3 - 2C_1^2)/C_1$.

Эти интегрируемые системы с интегралами движения H_2 четвертой степени по импульсам являются новыми интегрируемыми системами.

4.3. Нормированные тензоры Пуассона. В данном разделе мы рассмотрим нормированные тензоры Пуассона

$$P' = \det(\hat{P}')^{-1} \hat{P}', \quad (4.18)$$

где $\hat{P}'$ – кососимметричный тензор вида (4.7).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Существуют только два нетривиальных решения уравнений (2.14) с матрицей F (2.20) и нормированным тензором Пуассона P' (4.18), в котором

$$\hat{P}' = \begin{pmatrix} 0 & p_1 q_2 & -p_2^2 + g_1(q) & p_1 p_2 + g_2(q) \\ * & 0 & g_3(q) & p_2^2 + g_4(q) \\ * & * & 0 & f_1(q)p_1 + f_2(q)p_2 \\ * & * & * & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

Первое решение отвечает системе типа Энона–Эйлеса с гамильтонианом

$$H_1 = p_1^2 + p_2^2 - C_1 q_1(16q_1^2 + 3q_2^2) - 2C_2 q_1.$$

В этом случае функции, входящие в (4.19), равны

$$\begin{aligned} f_1 &= 0, & f_2 &= 3C_1(8q_1^2 + q_2^2) + C_2, \\ g_1 &= 3C_1 q_1 q_2^2, & g_2 &= \frac{C_1}{2} q_2^3, \\ g_3 &= 4g_2 - f_2 q_2, & g_4 &= -g_1. \end{aligned}$$

Второе решение отвечает системе с потенциалом четвертой степени

$$H_1 = p_1^2 + p_2^2 + C_1(8q_1^4 + 6q_1^2q_2^2 + q_2^4) + C_2(4q_1^2 + q_2^2) + \frac{C_3}{q_1^2}.$$

В этом случае функции, входящие в (4.19), имеют вид

$$\begin{aligned} f_1 &= 2C_1q_1^3, & f_2 &= -4C_1q_1(3q_2^2 + 4q_1^2) - 4C_2q_1 + \frac{C_3}{q_1^3}, \\ g_1 &= -(C_1(q_2^2 + 6q_1^2) + C_2)q_2^2, & g_2 &= -2C_1q_1q_2^3, \\ g_3 &= 4g_2 - f_2q_2, & g_4 &= -g_1. \end{aligned}$$

Соответствующие вторые интегралы движения, которые являются решениями уравнений (2.13), имеют вид

$$H_2 = \det(\hat{P}') = \sqrt{p_2^4 + q_1f_1p_1^2 + (q_2f_2 + g_3)p_1p_2 - 2g_1p_2^2 - g_1^2 + g_2g_3}.$$

Квадраты этих интегралов движения являются полиномами четвертой степени по импульсам, построенными ранее (см. [2], [9]).

В обоих случаях соответствующие собственные значения оператора N тривиальны: $\lambda_{1,2} = \pm 1$. Переменные разделения или переменные Дарбу–Нийенхейса (x, y) определяются не собственными значениями оператора N , а с помощью канонических преобразований $z = (q, p) \rightarrow \zeta = (x, y)$, которые диагонализуют оператор N (2.10).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Пусть $J = \partial\zeta/\partial z$ – матрица Якоби преобразования $\zeta = \zeta(z)$. Решения системы уравнений

$$JPJ^T = P, \quad JNJ^{-1} = \text{diag}(1, -1, 1, -1) \quad (4.20)$$

относительно $\zeta(p, q)$ являются переменными разделения для системы Энона–Эйлеса и системы с потенциалом четвертой степени, построенными ранее в работе [21].

Первое уравнение системы (4.20) означает, что искомое преобразование координат $z \rightarrow \zeta$ является каноническим преобразованием. Второе уравнение в (4.20) означает, что данное преобразование приводит оператор N к диагональному виду. Уравнения (4.20) решались с помощью системы символьных вычислений Maple.

Взаимосвязь таких канонических преобразований, диагонализующих оператор N , и преобразований Беклунда, приводящих к разделению переменных, более подробно будет рассмотрена в последующих публикациях.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе предложен новый прямой метод построения интегрируемых систем натурального вида. В этом методе интегралы движения являются решениями переопределенной системы алгебраических и дифференциальных уравнений

в частных производных, полученной из условия совместности тензоров Пуассона (2.5), (2.7) и условия инвариантности билагранжева распределения относительно действия оператора рекурсии (2.13).

Достоинством предлагаемого метода является достаточно легкая его реализация с помощью любой системы символьных вычислений. Одна из возможных реализаций приведена в приложении. Тем самым задача о построении и классификации бигамильтоновых интегрируемых систем достаточно широкого класса сведена к простым компьютерным вычислениям.

К недостаткам предложенного алгоритма относятся необходимость выбора анзаца для тензора Пуассона и использование контрольных матриц F специального вида. Основной проблемой при этом является необходимость такого выбора, чтобы множество соответствующих интегрируемых систем было, с одной стороны, достаточно узким, для того чтобы найти все эти системы в расчетах на компьютере, а с другой стороны, это множество должно быть достаточно широким и включать в себя нетривиальные интегрируемые системы.

В качестве примера мы использовали очень простые анзацы (4.1) и (4.7) и, тем не менее, воспроизвели большинство из известных интегрируемых систем на плоскости с интегралами третьей и четвертой степени по импульсам.

Вторым недостатком алгоритма является необходимость решения сильно переопределенной системы уравнений, так что при использовании стандартных процедур вычислений время, необходимое для расчетов, растет экспоненциально как с ростом размерности $n = \text{rank } P'$, так и с увеличением степени матричного полинома P' .

ПРИЛОЖЕНИЕ

Программа для построения бигамильтоновых систем

Данная работа, так же как и работы [11], может быть отнесена к активно развивающемуся разделу вычислительной математической физики. Поэтому далее приведена программная реализация описанного выше алгоритма построения бигамильтоновых систем, выполненная в среде символьных вычислений Maple. Строки программы помечены символом `>`, остальное представляет собой краткий комментарий.

Итак, загрузим необходимую нам библиотеку встроенных процедур, зададим размерность фазового пространства и определим канонические переменные:

```
> restart: with(linalg):
> n:=2:
> q:=seq(q||i,i=1..n): p:=seq(p||i,i=1..n):
> var:=q,p;
```

Теперь введем канонический тензор Пуассона:

```
> ed:=array(identity, 1..n,1..n): z:=array(sparse,1..n,1..n):
> P1:=blockmatrix(2,2,[z,ed,-ed,z]);
```

и анзац для второго тензора Пуассона

```
> P2 := array(antisymmetric,1..2*n,1..2*n):
> P2[1,2]:=a*q1: P2[1,3]:=c1*p1+c2*p2: P2[1,4]:=c3*p1+c4*p2:
> P2[2,3]:=c5*p1+c6*p2: P2[2,4]:=c7*p1+c8*p2: P2[3,4]:=f1(q):
```

в который входят неопределенные коэффициенты $c_1, \dots, c_8$ и функция $f_1(q)$.

Определим скобки Пуассона, отвечающие тензорам P' и $P + \lambda P'$:

```
> P3:=evalm(P1+lambda*P2);
> PB2 := proc (f, g) options operator, arrow:
>   add(add(P2[i,j]*diff(f,var[i])*diff(g,var[j]),i=1. . 2*n),j=1. . 2*n)
>   end:
> PB3 := proc (f, g) options operator, arrow:
>   add(add(P3[i,j]*diff(f,var[i])*diff(g,var[j]),i=1. . 2*n),j=1. . 2*n)
>   end:
```

После этого выпишем тождества Якоби (2.6):

```
> f:=F(var); g:=G(var): h:=H(var):
> Y2:=simplify(PB2(PB2(f,g),h)+PB2(PB2(g,h),f)+PB2(PB2(h,f),g)):
> Y3:=simplify(PB3(PB3(f,g),h)+PB3(PB3(g,h),f)+PB3(PB3(h,f),g)):
```

и создадим систему уравнений (2.5), (2.7)

```
> ListEq:=NULL:
> for i to 2*n do
>   for j to 2*n do
>     for k to 2*n do
>       Eq2:=coeff(coeff(coeff(
>         Y2,diff(f,var[i]),1),diff(h,var[j]),1),diff(g,var[k]),1):
>       Eq3:=coeff(coeff(coeff(
>         Y3,diff(f,var[i]),1),diff(h,var[j]),1),diff(g,var[k]),1):
>       ListEq:=ListEq,coeffs(collect(Eq2,{p},distributed),{p}),
>         coeffs(collect(Eq3,{p,lambda},distributed),{p,lambda}):
>   end do: end do: end do:
```

Далее построим оператор N^* и его минимальный характеристический полином $\Delta(\lambda)$:

```
> N:=evalm(inverse(P1)&*P2);
> ed2:=array(identity,1. . 2*n,1. . 2*n):
> Delta:=collect(simplify(sqrt(factor(
>   det(N-lambda*ed2))),symbolic),lambda,factor);
> if coeff(Delta,lambda,n)<0 then Delta:=-Delta: end if:
```

Теперь у нас все готово для определения контрольной матрицы F (2.20):

```
> sigma:=vector(n):
> for k to n do sigma[k]:=-coeff(Delta,lambda,n-k): end do:
> F:=delcols(augment(sigma,ed),n+1. . n+1):
```

Введем функцию Гамильтона натурального вида $H = H_1$ и остальные интегралы движения $H_k(p, q)$ в виде неопределенных пока функций и вычислим соответствующие им дифференциалы:

```
> H1:=add(p||k^2,k=1. . n)+V(q);
> for k from 2 to n do H||k:=h||k(var); dH||k:=vector(2*n): end do:
> for k to n do
>   for i to 2*n do dH||k[i]:=simplify(diff(H||k,var[i]),symbolic):
> end do: end do:
```

Нам осталось задать уравнения (2.13):

```
> ListEqH:=NULL:
> for i to n do
```

```

> Z[i]:=simplify(evalm(N&*dH|i-add(F[i,j]*dH|j,j=1..n))):
> ListEqH:=ListEqH,seq(Z|i[k],k=1..2*n):
> end do:

```

и решить полученную полную систему уравнений

```

> Ans:=pdsolve({ListEq,ListEqH},{f1(q),V(q),seq(H|k,k=2..n)},
> parameters={seq(c|j,j=1..8)});

```

С помощью данной программы построение интегрируемых систем из п. 4.1 занимает несколько секунд на обычном персональном компьютере, а построение интегрируемых систем из п. 4.2 и 4.3 занимает несколько минут.

Если мы хотим исключить тривиальные решения, а это лучше всего сделать для уменьшения времени работы, то к построенным выше уравнениям необходимо добавить дополнительные уравнения, например $\partial H_k / \partial p_i \neq 0$ и $\partial^2 V(q_1, q_2) / \partial q_1 \partial q_2 \neq 0$.

Благодарности. Автору приятно поблагодарить И. В. Комарова за многочисленные полезные обсуждения и интерес к работе. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 06-01-00140).

Список литературы

- [1] F. Magri, "Eight lectures on integrable systems", *Integrability of Nonlinear Systems* (Proc. of the CIMPA school (Pondicherry Univ., India, January 8–25, 1996)), Lect. Notes Phys., **495**, eds. Y. Kosmann-Schwarzbach et al., Springer, Berlin–Heidelberg, 1997, 256–296.
- [2] J. Hietarinta, *Phys. Rep.*, **147** (1987), 87–154.
- [3] G. Falqui, F. Magri, M. Pedroni, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **8** (2001), 118–127.
- [4] G. Falqui, M. Pedroni, *Math. Phys. Anal. Geom.*, **6** (2003), 139–179.
- [5] Y. Kosmann-Schwarzbach, F. Magri, *Ann. Inst. H. Poincaré, Phys. Théor.*, **53** (1990), 35–81.
- [6] B. Fuchssteiner, A. Fokas, *Physica D*, **4** (1981), 47–66.
- [7] И. М. Гельфанд, И. Я. Дорфман, *Функц. анализ и его прилож.*, **13:4** (1979), 13–30.
- [8] R. Brouzet, *J. Math. Phys.*, **34** (1993), 1309–1313.
- [9] А. М. Переломов, *Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли*, Наука, М., 1990.
- [10] C. Bartocci, G. Falqui, M. Pedroni, *Differ. Geom. Appl.*, **21:3** (2004), 349–360.
- [11] A. V. Tsiganov, Yu. A. Grigoryev, *Regul. Chaotic Dyn.*, **10** (2005), 413–422; А. В. Цыганов, Ю. А. Григорьев, *Нелинейная механика*, **1** (2005), 163–179.
- [12] A. Ibort, F. Magri, G. Marmo, *J. Geom. Phys.*, **33** (2000), 210–228.
- [13] A. V. Tsiganov, *J. Math. Phys.*, **40** (1999), 279–298.
- [14] S. Benenti, *J. Math. Phys.*, **38** (1997), 6578–6602.
- [15] P. A. Damianou, *Rev. Math. Phys.*, **16** (2004), 175–241.
- [16] R. L. Fernandes, *J. Phys. A*, **26** (1993), 3797–3803.
- [17] V. I. Inozemtsev, *Commun. Math. Phys.*, **121** (1989), 629–643.
- [18] C. R. Holt, *J. Math. Phys.*, **23** (1982), 1037–1046.
- [19] J. Drach, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **200** (1935), 22–26.
- [20] А. В. Цыганов, *ТМФ*, **124:3** (2000), 426–444.
- [21] S. Rauch-Wojciechowski, A. V. Tsiganov, *J. Phys. A*, **29** (1996), 7769–7778.
- [22] M. Wojciechowska, S. Wojciechowski, *Phys. Lett. A*, **105** (1984), 11–14.

Поступила в редакцию 21.03.2006,
после доработки 14.06.2006