Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Прохоренко, *ABC*-формула и *R*-операция для
квантовых процессов с нестабильными состояниями,
ТМФ, 2006, том 149, номер 2, 183–201

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf4226>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 16:42:25

© 2006 г.

Д. В. Прохоренко*

ABC-ФОРМУЛА И R-ОПЕРАЦИЯ ДЛЯ КВАНТОВЫХ ПРОЦЕССОВ С НЕСТАБИЛЬНЫМИ СОСТОЯНИЯМИ

Для широкого класса гамильтонианов, используемых в квантовой теории поля и статистической физике, получена явная формула, описывающая поведение вакуумного среднего оператора эволюции на больших, но конечных интервалах времени. Эта формула справедлива также для процессов с нестабильными состояниями.

Ключевые слова: *R*-операция, процессы с нестабильными состояниями, квантовые динамические системы.

1. ВВЕДЕНИЕ

S-матрица, которая описывает поведение системы на бесконечных интервалах времени [1], [2], является важным объектом в квантовой теории поля. Однако существует большое количество важных задач (в частности, в квантовой оптике [3], в статистической физике [4], при изучении распадов в квантовой механике [5] и теории элементарных частиц [6]), в которых исследуется поведение системы на больших, но конечных интервалах времени. Общим методом для изучения подобных проблем является метод стохастического предела, развитый в работах Аккарди, Лу, Воловича и других (см., например, [7]). Основная идея этого метода состоит в получении и исследовании квантовых стохастических уравнений, описывающих поведение оператора эволюции при малых константах связи λ и больших временах t . Поправки высших порядков к результатам, полученным методом стохастического предела, найдены в работе [8].

Мы будем рассматривать гамильтонианы в фоковском пространстве вида

$$H = H_0 + \lambda V,$$

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: prokhor@mi.ras.ru

где H_0 – свободный гамильтониан, а V – взаимодействие, которое есть сумма мономов Вика с ядрами, лежащими в пространстве Шварца. Отметим, что мы рассматриваем трансляционно-неинвариантные гамильтонианы. Используя теорию возмущений, мы получим следующую явную формулу для вакуумного среднего оператора эволюции:

$$\langle 0|U(t)|0\rangle = e^{At+B+C(t)},$$

где A и B – константы, а $C(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Эта формула (так называемая *ABC-формула*) получена в работе [9] двумя способами: с использованием волновых операторов и теории возмущений. Метод, основанный на использовании волновых операторов, позволяет установить эту формулу только в случае отсутствия распада. Метод, основанный на использовании теории возмущений, позволяет рассматривать также случай распада. Однако выражения для A , B и $C(t)$, полученные в [9] методом теории возмущений, в случае распада требуют модификации, что и сделано в данной работе. Заметим, что формула получена для вакуумного среднего оператора эволюции, однако ее можно обобщить на случай матричных элементов между экспоненциальными векторами.

Интересно обобщение этого результата на случай трансляционно-инвариантных гамильтонианов, однако такая важная в квантовой оптике система, как атом, взаимодействующий с полем излучения, описывается трансляционно-неинвариантным гамильтонианом, к тому же в этой системе возбужденное состояние атома нестабильно (см. [3]).

Заметим, что для доказательства того, что интегралы, представляющие коэффициенты A и B , существуют, мы будем использовать технику, подобную той, которая используется в теории перенормировок [1], [10], [11].

Асимптотическое поведение оператора эволюции при больших временах для системы заряженных частиц было исследовано в работе [12]. Отделение эффектов самодействия от эффектов рассеяния для трансляционно-инвариантных гамильтонианов, что необходимо для построения волновых операторов, было выполнено в [13] (о теории рассеяния для моделей Ли см. [14]).

В кинетической теории газов для определения коэффициентов переноса используется вириальное разложение. Было обнаружено, что это разложение содержит расходимости [15]. Эти расходимости возникают при изучении динамики конечного множества молекул при больших временах. Возможно, и здесь использование техники теории перенормировок окажется полезным.

Проблема рассеяния элементарных частиц является сложной, поскольку большинство элементарных частиц нестабильны [6]. Стабильная частица определяет неприводимое унитарное представление группы Пуанкаре. Представления группы Пуанкаре, соответствующие нестабильным частицам, рассмотрены в [16]. Новые перенормировочные предписания для волновой функции для нестабильных частиц

предложены в работе [17], где также было показано, что обычные перенормировочные предписания для волновой функции в случае нестабильных частиц ведут к калибровочно-неинвариантному результату.

Золотое правило Ферми и экспоненциальное поведение при больших временах для одной модели, описывающей нестабильные частицы, исследовались в [18]. В работе [19] было показано, что нестабильную частицу можно рассматривать как открытую квантовую систему.

Возможно ABC-формулу можно использовать при построении волновых операторов в случае распада.

Работа построена следующим образом. В разделе 2 определен класс рассматриваемых гамильтонианов, в разделе 3 найдены достаточные условия существования коэффициента A , а в разделе 4 – достаточные условия существования коэффициента B .

2. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Пусть $\mathcal{F} = L^2(\mathbb{R}^d)$ обозначает бозонное пространство Фока над одночастичным гильбертовым пространством $L^2(\mathbb{R}^d)$. Пусть $a^+(k)$ и $a(k)$ – операторы рождения и уничтожения в $\mathcal{F}$:

$$[a(k), a(k')] = [a^+(k), a^+(k')] = 0, \quad [a(k), a^+(k')] = \delta(k - k').$$

Вакуумное состояние определяется соотношением $a(k)|0\rangle = 0$. Рассмотрим в пространстве Фока $\mathcal{F}$ гамильтониан

$$H = \int \omega(k) a^+(k) a(k) dk + \lambda \sum_{m,n=0}^N \int v_{m,n}(p_1, \dots, p_m \mid p_1, \dots, p_n) \times \\ \times \prod_{i=1}^m a^+(p_i) dp_i \prod_{j=1}^n a(q_j) dq_j, \quad k, p_i, q_j \in \mathbb{R}^d, \quad N = 1, 2, \dots,$$

где $v_{m,n}$ – функции из пространства Шварца, $v_{0,0} = 0$.

Мы рассматриваем следующий закон дисперсии:

$$\omega(k) = \frac{k^2}{2} - \omega_0, \quad \omega_0 \in \mathbb{R}, \quad \omega_0 \neq 0,$$

но основные результаты могут быть обобщены на релятивистский случай.

Определим оператор эволюции следующим образом:

$$U(t) := e^{itH_0} e^{-itH}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

По определению [10], [20] граф Фридрихса – это четверка (V', R, l^+, l^-) , где V' – конечное упорядоченное множество, называемое множеством вершин, R – конечное множество, называемое множеством ребер, l^+ и l^- суть отображения $l^\pm: R \rightarrow V'$ такие, что $l^+(r) > l^-(r) \forall r \in R$.

Обозначим через V множество всех вершин, за исключением минимальной.

Граф Фридрихса называется связным, если для любых двух вершин $v \neq v'$ существует чередующаяся последовательность вершин и ребер $v = v_0, r_1, v_1, \dots, r_n, v_n = v'$ такая, что для любого $i = 1, 2, \dots, n$ справедливы равенства $v_{i-1} = l^-(r_i)$, $v_i = l^+(r_i)$ или $v_{i-1} = l^+(r_i)$, $v_i = l^-(r_i)$.

Согласно кластерной теореме [10] имеем

$$U =: e^{U_c} :,$$

где индекс “с” указывает, что оставляются только связные графы Фридрихса, а $:$: означает нормальное упорядочение [10].

Теперь сформулируем основной результат.

ТЕОРЕМА 1. *Если $d \geq 3$, то справедливо равенство*

$$\langle 0 | e^{-itH} | 0 \rangle = e^{At+B+C(t)}$$

в смысле формальных степенных рядов по λ . Здесь $A, B, C(t)$ – формальные степенные ряды по λ :

$$A = \sum_{n=2}^{\infty} A_n \lambda^n, \quad B = \sum_{n=2}^{\infty} B_n \lambda^n, \quad C(t) = \sum_{n=2}^{\infty} C_n(t) \lambda^n,$$

и $C_n(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

НАЧАЛО ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Имеем

$$\langle 0 | e^{-itH} | 0 \rangle = \langle 0 | e^{itH_0} e^{-itH} | 0 \rangle = e^{\langle 0 | U_c(t) | 0 \rangle},$$

где

$$\langle 0 | U_c(t) | 0 \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} (-i\lambda)^{n+1} F_n(t),$$

а $F_n(t)$ – сумма по всем связным графам Фридрихса порядка $n+1$ выражений вида

$$F_n^{\Phi}(t) = \int_0^t dt_n \dots \int_0^{t_1} dt_0 \int e^{i(E_n t_n + \dots + E_0 t_0)} f(p) dp.$$

Здесь $f(p)$ – произведение ядер мономов,

$$E_i = \sum_{l^-(r)=v} \omega(p_r) - \sum_{l^+(r)=v} \omega(q_r),$$

$\{p_r\}$ – импульсы, соответствующие ребрам $\{r \mid l^-(r) = v\}$, а $\{q_r\}$ – импульсы, соответствующие ребрам $\{r \mid l^+(r) = v\}$.

Преобразуем F_n^Φ . Имеем

$$\begin{aligned} F_n^\Phi(t) &= \int_0^t dt_n \int_0^{t_n} dt_{n-1} \dots \int_0^{t_1} dt_0 \int e^{i(E_n t_n + \dots + E_0 t_0)} f(p) dp = \\ &= \int_0^t dt_0 \int_0^{t-t_0} dt_n \dots \int_0^{t_2} dt_1 \int e^{i(E_n t_n + \dots + E_1 t_1)} f(p) dp = \\ &= \int_0^t dt_0 \int_0^{t_0} dt_n \dots \int_0^{t_2} dt_1 \int e^{i(E_n t_n + \dots + E_1 t_1)} f(p) dp. \end{aligned}$$

Возьмем $T > t$. Тогда

$$\begin{aligned} F_n^\Phi(t) &= \int_0^t dt_0 \int_0^T dt_n \dots \int_0^{t_2} dt_1 \int e^{i(E_n t_n + \dots + E_1 t_1)} f(p) dp - \\ &\quad - \int_0^t dt_0 \int_{t_0}^T dt_n \dots \int_0^{t_2} dt_1 \int e^{i(E_n t_n + \dots + E_1 t_1)} f(p) dp. \end{aligned}$$

Функция

$$\int e^{i(E_n t_n + \dots + E_1 t_1)} f(p) dp$$

есть непрерывная функция и потому локально интегрируема. Заметим, что теорема будет доказана, если мы покажем, что следующие пределы существуют:

$$A_n^\Phi = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T dt_n \dots \int_0^{t_2} dt_1 \int e^{i(E_n t_n + \dots + E_1 t_1)} f(p) dp, \quad (1)$$

$$B_n^\Phi = - \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^t dt_0 \int_{t_0}^T dt_n \dots \int_0^{t_2} dt_1 \int e^{i(E_n t_n + \dots + E_1 t_1)} f(p) dp. \quad (2)$$

Обозначим через A_n сумму выражений (1), взятую по всем графам степени n , а через B_n – сумму выражений (2). Получим

$$F_n(t) = A_n t + B_n + C_n(t),$$

где $C_n(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Ниже мы докажем, что пределы (1), (2) существуют, если $d \geq 3$.

3. СХОДИМОСТЬ ВЫРАЖЕНИЙ ДЛЯ A_n

Зафиксируем граф Фридрихса Φ . Получим

$$I := A_n^\Phi = \int_0^\infty dt_n \dots \int_0^{t_2} dt_1 \int e^{i(E_n t_n + \dots + E_1 t_1)} f(p) dp. \quad (3)$$

Граф Фридрихса $\Phi = (V, R, l^+, l^-)$, фигурирующий в (3), связный.

Напомним, что через V мы обозначили множество всех вершин, за исключением минимальной. Произвольный элемент из V мы обозначим через v , $v \in V$. Множество V мы можем отождествить с множеством $\{1, 2, \dots, n\}$.

Для любого $r \in R$ определим множество V_r :

$$V_r := \{v \mid l^+(r) \geq v > v-1 \geq l^-(r)\}.$$

Для любого $v \in V$ определим множество R_v :

$$R_v := \{r \mid l^+(r) \geq v > v-1 \geq l^-(r)\}.$$

Очевидно, что $v \in V_r \Leftrightarrow r \in R_v$. Для любого $A \subset V$ положим

$$R_A = \{r \mid \exists v \in A: r \in R_v\}.$$

Введем новые переменные интегрирования $\tau_i := t_i - t_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Получим

$$\begin{aligned} I = & \int_0^\infty d\tau_n \dots \int_0^\infty d\tau_1 \exp\left(i\omega_0 \sum_{r \in R} \sum_{v \in V_r} \tau_v\right) \times \\ & \times \int \prod_r dp_r \exp\left(\frac{i}{2} \sum_{r \in R} p_r^2 \sum_{v \in V_r} \tau_v\right) f(\dots p_r \dots). \end{aligned} \quad (4)$$

Сначала выберем

$$f(\dots p_r \dots) = \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{r \in R} p_r^2\right).$$

Тогда интеграл по импульсам p_r берется явно, получим

$$I = \int_0^\infty d\tau_n \dots \int_0^\infty d\tau_1 \exp\left(i\omega_0 \sum_{r \in R} \sum_{v \in V_r} \tau_v\right) \prod_r \left\{ (2\pi)^{d/2} \left(1 + i \sum_{v \in V_r} \tau_v\right)^{-d/2} \right\}. \quad (5)$$

Наша цель – выяснить, когда интеграл I существует.

Пусть $A \subset V$ и $\mathcal{O}_A$ подмножество в $\mathbb{R}_+^n$, определенное следующим образом:

$$\mathcal{O}_A = \{(\tau_1, \dots, \tau_n) \mid \tau_i < 1, \text{ если } i \in A; \tau_i \geq 1, \text{ если } i \notin A\}.$$

Интеграл I сходится тогда и только тогда, когда он сходится по каждой из областей $\mathcal{O}_A$. Интеграл I по множеству $\mathcal{O}_\emptyset$ существует, если существует интеграл

$$J = \int_1^\infty d\tau_n \dots \int_1^\infty d\tau_1 \prod_r \left(\sum_{v \in V_r} \tau_v \right)^{-d/2}.$$

Для оценки этого интеграла используем неравенство Гельдера

$$\left| \int d\tau \prod_{k=1}^n f_k(\tau) \right| \leq \prod_{k=1}^n \left(\int d\tau |f_k(\tau)|^{q_k} \right)^{1/q_k}, \quad 0 < q_k \leq \infty, \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{q_k} = 1.$$

Существование левой части этого неравенства следует из существования правой.

Интегрируя по τ_1 , получаем

$$J \leq C_1 \int_1^\infty d\tau_n \dots \int_1^\infty d\tau_2 \prod_r \left(\sum_{v \in V_r, v \neq 1} \tau_v \right)^{-(d/2 - (q_r^1)^{-1})}.$$

По определению q_r^1 выбраны так, что $q_r^1 = \infty$, если $r \notin R_1$ и $\sum_{r \in R} 1/q_r = 1$.

Интеграл по τ_1 существует, если существует набор коэффициентов q_r^1 такой, что $d/2 - (q_r^1)^{-1} > 0$.

Проинтегрируем теперь по τ_2 . Получим

$$J \leq C_2 \int_1^\infty d\tau_n \dots \int_1^\infty d\tau_3 \prod_r \left(\sum_{v \in V_r, v \neq 1,2} \tau_v \right)^{-(d/2 - (q_r^1)^{-1} - (q_r^2)^{-1})}.$$

Интеграл по τ_2 существует, если $d/2 - (q_r^1)^{-1} - (q_r^2)^{-1} > 0$. Заметим, что отсюда следует, что $d/2 - (q_r^1)^{-1} > 0$. По индукции можно показать, что J существует, если выполнено следующее условие.

А. Найдутся такие действительные числа $0 \leq s_r^v < \infty$, что

$$\sum_{r \in R_v} s_r^v = 1, \quad \sum_{v \in V_r} s_r^v < \frac{d}{2}. \quad (6)$$

Это типичная задача линейного программирования (см. [21]). Условие А эквивалентно следующему условию.

Б. Найдутся такие действительные числа $0 \leq s_r^v < \infty$, что

$$\sum_{r \in R_v} s_r^v > 1, \quad (7)$$

$$\sum_{v \in V_r} s_r^v = \frac{d}{2}. \quad (8)$$

Докажем, что из условия Б следует условие А. Уменьшая все ненулевые s_r^v на достаточно малые ненулевые величины, мы сохраним неравенство (7), а в (8) получим строгое неравенство. Затем, перебирая все вершины, начиная с $v = 1$ и заканчивая $v = n$, уменьшая s_r^v , мы добьемся того, чтобы (7) превратилось в равенство.

Введем понятие фактор-графа. Фактор-граф Φ_A , $A \subset V$, является результатом последовательного действия операций T_i . По определению T_i – граф, множество вершин которого есть $T_i := V - \{i\}$, а множество ребер $T_i R$ состоит из всех ребер, для которых либо $l^+(r) \neq i$, либо $l^-(r) \neq i - 1$. Функции l^+ , l^- для графа $T_i \Phi$ суть ограничения соответствующих функций для графа Φ на $T_i R$.

Положим по определению

$$\Phi_A = \prod_{i \in V \setminus A} T_i \Phi,$$

причем сомножители располагаются в порядке возрастания номеров слева направо.

Степенью расходимости графа Φ называется величина

$$C_\Phi = |V| - \frac{d}{2}|R|.$$

Наша задача будет состоять в том, чтобы найти условия, необходимые и достаточные для выполнения условия Б. Если выполнено условие Б, то индекс расходимости

графа и всех его фактор-графов отрицателен. Проверим это только для самого графа:

$$\frac{d}{2}|R| = \sum_{r \in R} \sum_{v \in V_r} s_r^v = \sum_{v \in V} \sum_{r \in R_v} s_r^v > \sum_{v \in V_r} 1 = |V|.$$

Итак,

$$|V| - \frac{d}{2}|R| < 0.$$

Верно и обратное.

УТВЕРЖДЕНИЕ. Если индекс расходимости графа и всех его фактор-графов отрицателен, то выполнено условие Б.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим набор коэффициентов s_r^v , удовлетворяющих условию (8) и условию $s_r^v = 0$, если $r \notin R_v$, буквой C , а множество таких наборов – символом $\mathbf{C}$. Множество $\mathbf{C}$ можно отождествить с подмножеством в $\mathbb{R}^N$, где $N = \sum_{v \in V_r} \sum_{r \in R_v} 1$. Это множество выпуклое. Последнее означает, что наряду с $C_1 \in \mathbf{C}$ и $C_2 \in \mathbf{C}$ имеет место $m_1 C_1 + m_2 C_2 \in \mathbf{C}$, где $m_1 \geq 0$, $m_2 \geq 0$, $m_1 + m_2 = 1$.

Введем следующие обозначения:

$$C_v := \sum_{r \in R_v} s_r^v, \quad |C| := \sum_{v \in V} C_v = \frac{d}{2}, \quad C_A := \sum_{v \in A} C_v.$$

Предположим, что удалось подобрать такие C^k , $k = 1, 2, \dots, n$, что $C_v^k > 1$, если $k \neq v$.

Рассмотрим C_1^1 . Если $C_1^1 > 1$, то утверждение доказано. Если $C_1^1 \leq 1$, то для любого произвольно малого ε рассмотрим выпуклую линейную комбинацию $m_1 C^1 + m_2 C^2$ такую, что

$$\begin{aligned} |m_1 C^1 + m_2 C^2|_{\{l\}} &> 1, \quad l \neq 2, \\ |m_1 C^1 + m_2 C^2|_{V \setminus \{1\}} &> \frac{d}{2}|R| - 1 - \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким же образом для любого $k = 2, 3, \dots, n$ можно найти элемент $\tilde{C}^k$ такой, что

$$\begin{aligned} |\tilde{C}^k|_{V \setminus \{1\}} &> \frac{d}{2}|R| - 1 - \varepsilon, \\ \tilde{C}_l^k &> 1, \quad \text{если} \quad k \neq l. \end{aligned}$$

Если найдется k такое, что $\tilde{C}_k^k > 1$, утверждение доказано. В противном случае можно построить наборы $\tilde{\tilde{C}}^k$, $k = 3, 4, \dots, n$, такие, что $\tilde{\tilde{C}}_l^k > 1$, если $k \neq l$ и

$$|\tilde{\tilde{C}}^k|_{V \setminus \{1, 2\}} > \frac{d}{2}|R| - 2 - \varepsilon.$$

Эта индуктивная процедура либо благополучно прервется, либо мы построим набор $\hat{C}$ такой, что

$$\hat{C}_k > 1, \quad k \neq n,$$

$$\widehat{C}_n > \frac{d}{2}|R| - V + 1 - \varepsilon > 1,$$

если ε достаточно мало.

Итак, необходимо построить наборы C^k . Тем же способом, что и выше, найдем, что достаточно построить наборы $C^{k,l}$ такие, что $C_v^{k,l} > 1$, если $v \neq k, l$, $|C^{k,l}| \geq (d/2)|R|$ (автоматически выполнено) и $|C^{k,l}|_{V \setminus \{k\}} > (d/2)|R|_{V \setminus \{k\}}$. Кроме того, так же, как выше, найдем, что для построения $C^{k,l}$ достаточно построить наборы $C^{k,l,m}$ такие, что $C_v^{k,l,m} > 1$, если $v \neq k, l, m$ и $|C^{k,l,m}|_{V \setminus \{k\}} > (d/2)|R|_{V \setminus \{k\}}$, $|C^{k,l,m}|_{V \setminus \{k,l\}} > (d/2)|R|_{V \setminus \{k,l\}}$.

Легко видеть, что для завершения доказательства достаточно для каждой перестановки P множества $\{1, 2, \dots, n\}$ построить наборы $C^P \in \mathbf{C}$ такие, что

$$|C^P|_{\{P(1), \dots, P(k)\}} = \frac{d}{2}|R|_{\{P(1), \dots, P(k)\}}.$$

Легко видеть, что это можно сделать по индукции, переходя от фактор-графа $\Phi_{\{P(1), \dots, P(k)\}}$ к $\Phi_{\{P(1), \dots, P(k+1)\}}$. В самом деле, $\Phi_{\{P(1), \dots, P(k)\}}$ есть фактор-граф графа $\Phi_{\{P(1), \dots, P(k+1)\}}$. Пусть для $\Phi_{\{P(1), \dots, P(k)\}}$ такой набор коэффициентов уже построен. Построим $s_r^{P(k+1)}$ следующим образом:

- 1) если $r \notin R_{P(k+1)}$, то $s_r^{P(k+1)} = 0$;
- 2) если $r \in R_{P(k+1)}$ и $r \in R_{\{P(1), \dots, P(k)\}}$, то $s_r^{P(k+1)} = 0$;
- 3) если $r \in R_{P(k+1)}$ и $r \notin R_{\{P(1), \dots, P(k)\}}$, то $s_r^{P(k+1)} = d/2$.

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{v \in \{P(1), \dots, P(k+1)\}} \sum_{r \in R_v} s_r^v &= \sum_{v \in \{P(1), \dots, P(k)\}} \sum_{r \in R_v} s_r^v + \sum_{r \in R_{P(k+1)}} s_r^{P(k+1)} = \\ &= \frac{d}{2}|R|_{\{P(1), \dots, P(k)\}} + \left(\frac{d}{2}|R|_{\{P(1), \dots, P(k+1)\}} - \frac{d}{2}|R|_{\{P(1), \dots, P(k)\}} \right) = \\ &= \frac{d}{2}|R|_{\{P(1), \dots, P(k+1)\}}. \end{aligned}$$

Итак, доказано, что для сходимости интеграла I по области $O_\emptyset$ достаточно, чтобы индекс расходимости Φ и всех его фактор-графов был отрицательным. Анализ сходимости I по другим областям O_A , $A \neq \emptyset$, аналогичен только что проведенному. Он сводится к анализу сходимости интеграла J для $\Phi_{V \setminus A}$. Итак, доказана

ТЕОРЕМА 2. *Для абсолютной сходимости интеграла I (5) достаточно, чтобы индекс расходимости графа и всех его фактор-графов был отрицательным.*

ТЕОРЕМА 3. *Если $d \geq 3$, то выполнены все условия теоремы 2 и интеграл I (5) сходится абсолютно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что для произвольного связного графа Фридрихса $|R| \geq |V|$. Для вершины с номером 0 найдутся вершина с номером i_1 и ребро, их соединяющее, в противном случае вершина с номером 0 есть нетривиальная компонента связности графа Φ . Для вершин с номерами 0, i_1 найдутся вершина с

номером i_2 и ребро, которое соединяет ее с вершиной с номером 0 или i_1 , в противном случае вершины 0, i_1 и ребра, их соединяющие, образуют нетривиальную компоненту связности, и т.д. Итак, ребер, по крайней мере, не меньше, чем число вершин минус 1.

ТЕОРЕМА 4. *Интеграл I (4) сходится для произвольной функции $f(p)$ из пространства Шварца.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интеграл (4) мы, как и в доказательстве теоремы 2, представим в виде $I = \sum_{V \subset A} I_A$, где I_A имеет ту же подынтегральную функцию, что и I , но берется по области $\mathcal{O}_A$. Оценим подынтегральную функцию в $\mathcal{O}_A$. Пусть F означает преобразование Фурье по переменным p_r , $r \in R_B$, $B = V \setminus A$ (о преобразовании Фурье для обобщенных функций см. [22]). Тогда имеем

$$\begin{aligned} & \left| \int \prod_r dp_r \exp\left(\frac{i}{2} \sum_{r \in R} p_r^2 \sum_{v \in V_r} \tau_v\right) F(F^{-1}(f))(\dots p_r \dots) \right| = \\ & = \left| \int \prod_r dp_r F\left(\exp\left(\frac{i}{2} \sum_{r \in R_B} p_r^2 \sum_{v \in V_r} \tau_v\right)\right) \times \right. \\ & \quad \left. \times \exp\left(\frac{i}{2} \sum_{r \notin R_B} p_r^2 \sum_{v \in V_r} \tau_v\right) (F^{-1}(f(\dots p_r \dots))) \right| = \\ & = \left| \prod_{r \in R_B} (2\pi)^{d/2} \left(\sum_{v \in V_r} \tau_v\right)^{-1} \times \right. \\ & \quad \times \int \prod_r dp_r \left(\exp\left(-\frac{i}{2} \frac{\sum_{r \in R_B} p_r^2}{\sum_{v \in V_r} \tau_v}\right)\right) \times \\ & \quad \times \exp\left(-\frac{i}{2} \sum_{r \notin R_B} p_r^2 \sum_{v \in V_r} \tau_v\right) (F^{-1}(f(\dots p_r \dots))) \left| \leq \right. \\ & \leq \text{const} \cdot \prod_{r \in R_B} \left(\sum_{v \in V_r^B} \tau_v\right)^{-1}, \end{aligned}$$

где $V_r^B := V_r \cap B$. Именно эта оценка использовалась для доказательства теоремы 2.

4. КОЭФФИЦИЕНТ B

Фиксируем некоторый граф Фридрихса Φ . Тогда

$$\begin{aligned} L &:= B_n^\Phi = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^t dt_0 \int_{t_0}^T dt_n \dots \int_0^{t_2} dt_1 \int e^{i(E_n t_n + \dots + E_1 t_1)} f(p) dp = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\tau_1 + \dots + \tau_n < T; \tau_i > 0} \prod_{i=1}^n d\tau^i \min(t, \tau_1 + \dots + \tau_n) \times \\ & \quad \times \exp\left(i\omega_0 \sum_{r \in R} \sum_{v \in V_r} \tau_v\right) \int \prod_r dp_r \exp\left(\frac{i}{2} \sum_{r \in R} p_r^2 \sum_{v \in V_r} \tau_v\right) f(\dots p_r \dots). \quad (9) \end{aligned}$$

Наша задача состоит в том, чтобы доказать, что при выполнении условий теоремы 2 этот интеграл сходится. Представим его в виде суммы $L = \sum_{A \subset V} L_A$, где L_A имеет ту же подынтегральную функцию, что и L , но берется по области $\mathcal{O}_A$. Для простоты проведем анализ только для $L_\emptyset$. Сначала в формуле для $L_\emptyset$ поменяем порядок вычисления пределов, докажем сходимостъ полученного выражения, а затем обоснуем законность такой процедуры. Поменяв порядок вычисления пределов, получим интеграл

$$K_\emptyset(T) = \int_{\tau_1 + \dots + \tau_n < T; \tau_i > 1} \prod_{i=1}^n d\tau^i (\tau_1 + \dots + \tau_n) \times \\ \times \exp\left(i\omega_0 \sum_{r \in R} \sum_{v \in V_r} \tau_v\right) \int \prod_r dp_r \exp\left(\frac{i}{2} \sum_{r \in R} p_r^2 \sum_{v \in V_r} \tau_v\right) f(\dots p_r \dots), \quad (10)$$

или

$$K_\emptyset(T) = \int_{\tau_1 + \dots + \tau_n < T; \tau_i > 1} \prod_{i=1}^n d\tau^i (\tau_1 + \dots + \tau_n) \exp\left(i\omega_0 \sum_{r \in R} \sum_{v \in V_r} \tau_v\right) \times \\ \times \prod_r \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \left(\sum_{v \in V_r} \tau_v\right)^{-d/2} f(\tau_1, \dots, \tau_n),$$

где

$$f(\tau_1, \dots, \tau_n) = (-i)^{d|R|/2} \int \prod_{r \in R} dx_r F^{-1}(f)(x_r) \exp\left(-\frac{i}{2} \sum_{r \in R} x_r^2 \left(\sum_{v \in V_r} \tau_v\right)^{-1}\right).$$

ЛЕММА 1. *Справедлива следующая оценка:*

$$\left| \frac{d}{d\tau} f(\tau, \dots, \tau, \tau_{k+1}, \dots, \tau_n) \right| \leq \frac{\text{const}}{\tau}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\frac{d}{d\tau} f(\tau, \dots, \tau, \tau_{k+1}, \dots, \tau_n) = \frac{1}{2} \prod_{r \in R} \int dx_r F^{-1}(f)(x_r) \exp\left(-\frac{i}{2} \sum_{r \in R} x_r^2 \left(\sum_{v \in V_r} \tau_v\right)^{-1}\right) \times \\ \times \sum_{v \in \{1, \dots, k\}} \sum_{r \in R_v} x_r^2 \left(\sum_{v \in V_r} \tau_v\right)^{-2} \Big|_{\tau_1 = \dots = \tau_k = \tau}. \quad (11)$$

Но $\forall v \in \{1, 2, \dots, k\}$ справедливо неравенство

$$\sum_{r \in R_v} \left(\sum_{v \in V_r} \tau_v\right)^{-2} \Big|_{\tau_1 = \dots = \tau_k = \tau} \leq \frac{\text{const}}{\tau}.$$

Мы можем оценить интеграл в (11) сверху константой. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. В условиях теоремы 2 сходится интеграл

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} K_{\emptyset}(T)^k &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{D_{k,n}} \prod_{i=k}^n d\tau_i (\tau_1 + \dots + \tau_n) \exp\left(i\omega_0 \sum_{r \in R} \sum_{v \in V_r} \tau_v\right) \times \\ &\times \prod_{r \in R} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \left(\sum_{v \in V_r} \tau_v\right)^{-d/2} f(\tau_1, \dots, \tau_n) \Big|_{\tau_1 = \dots = \tau_k}, \end{aligned} \quad (12)$$

где $D_{k,n} = \{k\tau_k + \dots + \tau_n < T; \tau_i > 1; \tau_k > \dots > \tau_n\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала рассмотрим случай $k = n$. Интеграл в (12) равен

$$\begin{aligned} K_{\emptyset}^n(T) &= n \int_1^{T/n} d\tau \tau \exp\left(i\omega_0 \sum_{r \in R} |V_r| \tau\right) \prod_{r \in R} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \left(\sum_{v \in V_r} \tau\right)^{-d/2} f(\tau, \dots, \tau) = \\ &= \frac{n}{i\omega_0 N} \left\{ \frac{T}{n} \exp\left(i\omega_0 \sum_{r \in R} |V_r| \frac{T}{n}\right) \prod_{r \in R} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \left(\sum_{v \in V_r} \tau\right)^{-d/2} f(\tau, \dots, \tau) \Big|_{\tau=T/n} - \right. \\ &\quad - \exp\left(i\omega_0 \sum_{r \in R} |V_r|\right) \prod_{r \in R} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \frac{1}{(|V_r|)^{d/2}} f(1, \dots, 1) + \\ &\quad + \left(\frac{d}{2}|R| - 1\right) \int_1^{T/n} d\tau \frac{1}{\tau^{(d/2)|R|}} \prod_{r \in R} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \frac{1}{(|V_r|)^{d/2}} \times \\ &\quad \times \exp\left(i\omega_0 \sum_{r \in R} |V_r| \tau\right) f(\tau, \dots, \tau) - \\ &\quad - \prod_{r \in R} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \frac{1}{(|V_r|)^{d/2}} \int_1^{T/n} d\tau \frac{\tau}{\tau^{(d/2)|R|}} \frac{d}{d\tau} f(\tau, \dots, \tau) \times \\ &\quad \times \exp\left(i\omega_0 \sum_{r \in R} |V_r| \tau\right) \Big\}. \end{aligned}$$

Напомним, что $(d/2)|R| > |V| \geq 1$. Следовательно, первое слагаемое стремится к нулю, второе постоянно, интеграл в третьем слагаемом сходится, а интеграл в четвертом слагаемом сходится в силу того, что

$$\left| \frac{d}{d\tau} f(\tau, \dots, \tau) \right| \leq \frac{\text{const}}{\tau}.$$

Допустим, что предположение индукции справедливо при $k + 1$, докажем его справедливость при k . Интегрируя по частям по $d\tau_k$, получаем

$$\begin{aligned} K_{\emptyset}(T)^k &= \int_{D_{k,n}} (\tau_1 + \dots + \tau_n) \exp\left(i\omega_0 \sum_{r \in R} \sum_{v \in V_r} \tau_v\right) \times \\ &\times \prod_r \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \left(\sum_{v \in V_r} \tau_v\right)^{-d/2} f(\tau_1, \dots, \tau_n) \Big|_{\tau_1 = \dots = \tau_k} \prod_{i=k}^n d\tau_i = \\ &= \frac{1}{i\omega_0 N} \left\{ T \int_{\substack{(k+1)\tau_{k+1} + \dots + \tau_n < T \\ \tau_i > 1; \tau_{k+1} > \dots > \tau_n}} \prod_{i=k+1}^n d\tau_i \prod_{r \in R} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \left(\sum_{v \in V_r} \tau_v\right)^{-d/2} \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \exp\left(i\omega_0 \sum_{r \in R} \sum_{v \in V_r} \tau_v\right) f(\tau_1, \dots, \tau_n) \Big|_{\tau_1 = \dots = \tau_k = (T - \tau_{k+1} - \dots - \tau_n)/k} - \\
& - \int_{\substack{(k+1)\tau_{k+1} + \dots + \tau_n < T; \\ \tau_i > 1; \tau_{k+1} > \dots > \tau_n}} \prod_{i=k+1}^n d\tau_i \prod_{r \in R} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \left(\sum_{v \in V_r} \tau_v \right)^{-d/2} \times \\
& \times \exp\left(i\omega_0 \sum_{r \in R} \sum_{v \in V_r} \tau_v\right) (\tau_1 + \dots + \tau_n) f(\tau_1, \dots, \tau_n) \Big|_{\tau_1 = \dots = \tau_k = \tau_{k+1}} - \\
& - \int_{D_{k,n}} \prod_{i=k}^n d\tau_i \frac{d}{d\tau_k} \left\{ (k\tau_k + \dots + \tau_n) f(\tau_1, \dots, \tau_n) \times \right. \\
& \times \left. \prod_r \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \left(\sum_{v \in V_r} \tau_v \right)^{-d/2} \right\} \Big|_{\tau_1 = \dots = \tau_k} \times \exp\left(i\omega_0 \sum_{r \in R} \sum_{v \in V_r} \tau_v\right), \quad (13)
\end{aligned}$$

где $N = \sum_{l=1}^k \sum_{r \in R_l} 1$. Второе слагаемое есть $K_{\emptyset}^{k+1}(T)$ и потому сходится при $T \rightarrow \infty$. Первое слагаемое будем оценивать с помощью неравенства Гельдера с коэффициентами, выбранными при доказательстве теоремы 2. Заметим, что $\tau_1 = \dots = \tau_k > T/n$. Обозначим первое слагаемое через Q . Тогда

$$|Q| \leq T \cdot \text{const} \prod_{r \in R_{\{1, \dots, k\}}} T^{-[\frac{d}{2} - \sum_{v=k+1}^n (q_r^k)^{-1}]}.$$

Но в силу выбора (q_r^k) имеем

$$\frac{d}{2} - \sum_{v=k+1}^n (q_r^k)^{-1} \geq (q_r^1)^{-1} - \varepsilon \quad (14)$$

для некоторого ε . Поэтому

$$|Q| \leq \frac{1}{T^\varepsilon} \frac{T}{T \sum_r (q_r^1)^{-1}} = \frac{1}{T^\varepsilon} \rightarrow 0, \quad (15)$$

так первое слагаемое стремится к нулю. Третье слагаемое раскроем по правилу Лейбница. Получим сумму трех слагаемых:

$$\begin{aligned}
& k \int_{D_{k,n}} \prod_{i=k}^n d\tau_i \exp\left(i\omega_0 \sum_{r \in R} \sum_{v \in V_r} \tau_v\right) \prod_{r \in R} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \left(\sum_{v \in V_r} \tau_v \right)^{-d/2} f(\tau_1, \dots, \tau_n) \Big|_{\tau_1 = \dots = \tau_k} - \\
& - \frac{d}{2} \int_{D_{k,n}} \prod_{i=k}^n d\tau_i \left\{ \sum_{v \in \{1, \dots, k\}} \sum_{r \in R_v} \left(\sum_{v \in V_r} \tau_v \right)^{-1} \right\} \times \\
& \times (k\tau_k + \dots + \tau_n) \exp\left(i\omega_0 \sum_{r \in R} \sum_{v \in V_r} \tau_v\right) \times \\
& \times \prod_{r \in R} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \left(\sum_{v \in V_r} \tau_v \right)^{-d/2} f(\tau_1 + \dots + \tau_n) \Big|_{\tau_1 = \dots = \tau_k} + \\
& + \int_{D_{k,n}} \prod_{i=k}^n d\tau_i (\tau_1 + \dots + \tau_n) \exp\left(i\omega_0 \sum_{r \in R} \sum_{v \in V_r} \tau_v\right) \times
\end{aligned}$$

$$\times \prod_{r \in R} \left(\sum_{v \in V_r} \tau_v \right)^{-d/2} \frac{d}{d\tau_k} f(\tau_k, \dots, \tau_k, \dots, \tau_n) \Big|_{\tau_1 = \dots = \tau_k}.$$

В силу того, что $k\tau_k + \dots + \tau_n < \tau_k n$ и

$$\prod_r \left(\sum_{v \in V_r} \tau_v \right)^{-d/2} \leq \prod_{r \in R_{\{k, \dots, n\}}} \left(\sum_{v \in V_r \cap \{k, \dots, n\}} \tau_v \right)^{-d/2},$$

разность Коши для члена в последней формуле оценивается сверху разностью Коши для J , построенного по фактор-графу $\Phi_{\{k, \dots, n\}}$, и, следовательно, третье слагаемое в (13) также сходится. Итак, из справедливости леммы при $k+1$ вытекает ее справедливость при k . Лемма доказана.

Заметим, что интеграл $K_\emptyset$ разбиением области интегрирования разбивается в сумму слагаемых, подобных $K_\emptyset(T)^k$. Следовательно доказана

ЛЕММА 3. *Интеграл $K_\emptyset(T)$ сходится при $T \rightarrow \infty$.*

ЛЕММА 4. *В формуле (9) можно менять местами операции перехода к пределу.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перейдя к пределу в (9) по $T \rightarrow \infty$ и вычитая из полученного выражения $K_\emptyset(T)$, получим

$$\begin{aligned} L_\emptyset(t) - K_\emptyset(t) &= t \int_{\tau_1 + \dots + \tau_n > t; \tau_i > 1} (\tau_1 + \dots + \tau_n) \exp \left(i\omega_0 \sum_{r \in R} \sum_{v \in V_r} \tau_v \right) \times \\ &\times \prod_r \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \left(\sum_{v \in V_r} \tau_v \right)^{-1} f(\tau_1, \dots, \tau_n). \end{aligned}$$

Разобьем область интегрирования на секторы

$$\mathcal{O}_\sigma = \{(\tau_1, \dots, \tau_n) \mid \tau_i > 1; \tau_{\sigma(1)} > \dots > \tau_{\sigma(n)}\},$$

где σ – перестановка элементов множества $\{1, 2, \dots, n\}$. Ограничимся рассмотрением интеграла по $\mathcal{O}_{\text{id}}$. Остальные интегралы рассматриваются аналогично. Проведем интегрирование по частям по τ_1 . Получим

$$\begin{aligned} L_\emptyset(T) - K_\emptyset(T) &= \frac{T}{i\omega_0 N} \left\{ \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \int_{\substack{T < 2\tau_2 + \dots + \tau_n < T_1; \\ \tau_i > 1; \tau_2 > \dots > \tau_n}} \prod_{i=2}^n d\tau_i \exp \left(i\omega_0 \sum_{r \in R} \sum_{v \in V_r} \tau_v \right) \times \right. \\ &\times \prod_{r \in R} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \left(\sum_{v \in V_r} \tau_v \right)^{-d/2} f(\tau_1, \dots, \tau_n) \Big|_{\tau_1 = T_1 - \tau_2 - \dots - \tau_n} - \\ &- \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \int_{\substack{T < 2\tau_2 + \dots + \tau_n < T_1; \\ \tau_i > 1; \tau_2 > \dots > \tau_n}} \prod_{i=2}^n d\tau_i \exp \left(i\omega_0 \sum_{r \in R} \sum_{v \in V_r} \tau_v \right) \times \\ &\times \prod_{r \in R} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \left(\sum_{v \in V_r} \tau_v \right)^{-d/2} f(\tau_1, \dots, \tau_n) \Big|_{\tau_1 = \tau_2} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \int_{\substack{2\tau_2 + \dots + \tau_n < T; \\ \tau_i > 1; \tau_2 > \dots > \tau_n}} \prod_{i=2}^n d\tau_i \exp\left(i\omega_0 \sum_{r \in R} \sum_{v \in V_r} \tau_v\right) \times \\
& \times \prod_{r \in R} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \left(\sum_{v \in V_r} \tau_v \right)^{-d/2} f(\tau_1, \dots, \tau_n) \Big|_{\tau_1 = T - \tau_2 - \dots - \tau_n} - \\
& - \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \int_{\substack{T < \tau_1 + \dots + \tau_n < T_1; \\ \tau_i > 1; \tau_1 > \dots > \tau_n}} \prod_{i=1}^n d\tau_i \exp\left(i\omega_0 \sum_{r \in R} \sum_{v \in V_r} \tau_v\right) \times \\
& \times \frac{d}{d\tau_1} \left\{ \prod_{r \in R} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \left(\sum_{v \in V_r} \tau_v \right)^{-d/2} f(\tau_1, \dots, \tau_n) \right\},
\end{aligned}$$

где $N = \sum_{r \in R_1} 1$. Первое слагаемое равно нулю. Третье слагаемое стремится к нулю при $T \rightarrow \infty$ (доказательство этого факта такое же, как и для первого слагаемого в (13)). Четвертый член стремится к нулю при $T \rightarrow \infty$ (доказательство аналогично доказательству для четвертого члена в (13)). Что же касается второго члена, то он оценивается так же, как $L_{\mathcal{O}}(t) - K_{\mathcal{O}}(t)$, но в нем уже интегрирований на одно меньше (для оценки $L_{\mathcal{O}}(t) - K_{\mathcal{O}}(t)$ надо выполнить такую же индуктивную процедуру, как и для оценки $K_{\mathcal{O}}(t)$). Лемма доказана.

Объединяя предыдущие четыре леммы, получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 5. Если выполнены условия теоремы 2, то выражение для B_n корректно и представляет собой сумму членов вида

$$\begin{aligned}
& \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\tau_1 + \dots + \tau_n < T; \tau_i > 0} (\tau_1 + \dots + \tau_n) \exp\left(i\omega_0 \sum_{r \in R} \sum_{v \in V_r} \tau_v\right) \times \\
& \times \int \prod_r dp_r \exp\left(-\frac{i}{2} \sum_{r \in R} p_r^2 \sum_{v \in V_r} \tau_v\right) f(\dots p_r \dots),
\end{aligned}$$

где $f(\dots p_r \dots)$ есть произведение ядер мономов.

Таким образом, мы завершили доказательство теоремы 1.

Заметим, что теорема 2 аналогична теореме о сходимости фейнмановских интегралов в квантовой теории поля.

5. ПРИМЕРЫ

5.1. Пример к теореме 1. В качестве примера к теореме 1 приведем вычисления во втором порядке по константе связи для гамильтониана взаимодействия

$$V = \int v(p_1, \dots, p_n) a^+(p_1) \dots a^+(p_n) + \text{c.c.}, \quad d \geq 3. \quad (16)$$

Справедливо равенство

$$\langle 0|U(t)|0\rangle = e^{\langle 0|U(t)_c|0\rangle}, \quad (17)$$

где во втором порядке по λ имеем

$$\begin{aligned}\langle 0|U(t)_c|0\rangle &= (-i\lambda)^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_0 \int dp |v(p_1, \dots, p_n)|^2 \exp\left(i \sum_{i=1}^n \omega(p_i)(t_1 - t_0)\right) = \\ &= (-i\lambda)^2 \int_0^t dt_0 \int_0^{t_0} dt_1 \int dp |v(p_1, \dots, p_n)|^2 \exp\left(i \sum_{i=1}^n \omega(p_i)(t_1)\right). \quad (18)\end{aligned}$$

Однако согласно методу стационарной фазы

$$\int dp |v(p_1, \dots, p_n)|^2 \exp\left(\sum_{i=1}^n \omega(p_i)(t)\right) = O\left(\frac{1}{t^{nd/2}}\right),$$

поэтому интеграл

$$\int_0^{+\infty} dt \int dp |v(p_1, \dots, p_n)|^2 \exp\left(\sum_{i=1}^n \omega(p_i)(t)\right)$$

при всех n абсолютно сходится и мы можем положить

$$\langle 0|U_c(t)|0\rangle = At + B(t),$$

где

$$A = (-i\lambda)^2 \int_0^{+\infty} dt \int dp |v(p_1, \dots, p_n)|^2 \exp\left(\sum_{i=1}^n \omega(p_i)(t)\right)$$

и

$$B(t) = \lambda^2 \int_0^{+\infty} dt' \min(t', t) \int dp |v(p_1, \dots, p_n)|^2 \exp\left(\sum_{i=1}^n \omega(p_i)(t')\right). \quad (19)$$

Теперь покажем, что существует предел $\lim_{t \rightarrow +\infty} B(t)$. Перейдем формально к пределу $t \rightarrow +\infty$ под знаком интеграла в (19) и положим

$$B := \lambda^2 \int_0^{+\infty} dt' \int dp |v(p_1, \dots, p_n)|^2 \exp\left(\sum_{i=1}^n \omega(p_i)(t')\right). \quad (20)$$

Чтобы доказать, что этот интеграл сходится в несобственном смысле при $n = 1, 2, \dots$, покажем, что

$$\left| \frac{d^k}{dt^k} \int dp |v(p_1, \dots, p_n)|^2 \exp\left(i \sum_{i=1}^n \frac{p_i^2}{2} t\right) \right| \leq \frac{C}{t^{nd/2+k}} \quad (21)$$

для некоторой константы C . Действительно,

$$\begin{aligned}& \int dp |v(p_1, \dots, p_n)|^2 \exp\left(\frac{i}{2} \sum_{i=1}^n p_i^2 t\right)(x) = \\ &= \int dx F(v(p_1, \dots, p_n))^2(x) F^{-1}\left(\exp\left(i \sum_{i=1}^n \frac{p_i^2}{2} t\right)\right)(x) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{nd/2} t^{nd/2}} \int F(|v(p_1, \dots, p_n)|^2)(x) \exp\left(-\frac{i}{2t} \sum_{i=1}^n x_i^2\right).\end{aligned}$$

Из этого выражения и следует нужная нам оценка. Теперь сходимость интеграла (20) при $\omega \neq 0$ легко показать интегрированием по частям, как это делается при доказательстве критериев Дирихле и Абеля сходимости интегралов.

Рассмотрим разность $B - B(t)$ и покажем, что она стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$. Имеем

$$B - B(t) = \lambda^2 t \int_t^{+\infty} dt' e^{-i\omega nt} \int dp |v(p_1, \dots, p_n)|^2 \exp\left(i \sum_{i=1}^n \frac{p_i^2}{2} t'\right). \quad (22)$$

Снова воспользуемся интегрированием по частям:

$$\begin{aligned} B - B(t) &= \lambda^2 t \frac{e^{-i\omega nt}}{i\omega n} \int dp |v(p_1, \dots, p_n)|^2 \exp\left(i \sum_{i=1}^n \frac{p_i^2}{2} t\right) - \\ &- \lambda^2 t \int_t^{+\infty} dt' \frac{e^{-i\omega nt'}}{i\omega n} \frac{d}{dt} \int dp |v(p_1, \dots, p_n)|^2 \exp\left(i \sum_{i=1}^n \frac{p_i^2}{2} t'\right). \end{aligned} \quad (23)$$

Пользуясь неравенством (21) для оценки второго интеграла, найдем

$$|B - B(t)| \leq \frac{\text{const}}{t^{nd/2-1}}$$

и $B - B(t) \rightarrow 0$, что и утверждалось.

5.2. Пример к теореме 2. Рассмотрим граф Фридрихса Φ , множество вершин которого состоит из трех элементов $\{v_0, v_1, v_2\}$, множество ребер которого есть $\{r_0, r_1, r_2\}$, а функции $l^\pm$ определены следующими соотношениями: $l^+(r_0) = v_2$, $l^-(r_0) = v_0$, $l^+(r_1) = v_1$, $l^-(r_1) = v_0$, $l^+(r_2) = v_2$, $l^-(r_2) = v_1$. В обозначениях раздела 3 имеем

$$J = \int_1^\infty d\tau_1 \int_1^\infty d\tau_2 \frac{1}{\tau_1^{d/2} \tau_2^{d/2} (\tau_1 + \tau_2)^{d/2}}. \quad (24)$$

Воспользуемся неравенством

$$(\tau_1 + \tau_2)^{d/2} \geq 2^{d/2} \tau_1^{d/4} \tau_2^{d/4} \quad (25)$$

и получим

$$J \leq \text{const} \int_1^\infty \frac{1}{\tau_1^{3d/4}} d\tau_1 \int_1^\infty \frac{1}{\tau_1^{3d/4}} d\tau_2. \quad (26)$$

Следовательно, интеграл J сходится, если $d > 4/3$.

С другой стороны, степень расходимости графа Φ есть $2 - 3(d/2)$, а каждой из его поддиаграмм — $1 - 2(d/2)$. Таким образом, теорема 2 дает, что интеграл J сходится, если $d > 4/3$, что совпадает с полученным выше результатом.

5.3. Выражение коэффициентов A и B через Γ -операцию Фридрихса.
Пусть

$$V = \int \prod v(p_1, \dots, p_n \mid q_1, \dots, q_m) \prod_{i=0}^m a^+(p_i) dp_i \prod_{j=0}^m a(q_j) dq_j \quad (27)$$

– моном Вика. Γ -операция Фридрихса определяется следующим образом:

$$\Gamma(V) = i \int_{-\infty}^0 dt e^{itH} V e^{-itH}. \quad (28)$$

Легко видеть, что

$$\Gamma(V) = \int \frac{v(p_1, \dots, p_n \mid q_1, \dots, q_m)}{\sum_{i=0}^n \omega(p_i) - \sum_{j=0}^m \omega(q_j) - i0} \prod_{i=0}^n a^+(p_i) dp_i \prod_{j=0}^m a(q_j) dq_j. \quad (29)$$

Можно показать, что коэффициенты A и B выражаются через Γ -операцию Фридрихса следующим образом:

$$\begin{aligned} A &= i \sum_{n=2}^{\infty} (-\lambda)^n \langle 0 | \underbrace{V(\Gamma(V \dots \Gamma(V) \dots))}_{n \text{ операторов } V} | 0 \rangle, \\ B &= - \sum_{n=2}^{\infty} (-\lambda)^n \sum_{i=1}^n \langle 0 | \underbrace{V(\Gamma(V \dots \Gamma^2(V \dots \Gamma(V) \dots)))}_{i \text{ операторов } V, n \text{ операторов } V} | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (30)$$

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы вывели общую формулу (см. теорему 1), которая описывает поведение на больших временах оператора эволюции. Это формула справедлива для широкого класса гамильтонианов, используемых в квантовой теории поля и статистической механике.

Благодарности. Автор благодарен своему научному руководителю И. В. Воловичу за многочисленные и полезные обсуждения. Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 05-01-008884), грантом Президента Российской Федерации (NSh-6705.2006.1) и программой “Современные проблемы теоретической математики” Отделения математических наук РАН.

Список литературы

- [1] Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *Введение в теорию квантованных полей*, Наука, М., 1976.
- [2] Р. Йост, *Общая теория квантованных полей*, Мир, М., 1967.
- [3] М. О. Скалли, М. С. Зубайри, *Квантовая оптика*, Физматлит, М., 2003.
- [4] А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике*, Физматгиз, М., 1962.
- [5] А. И. Базь, Я. Б. Зельдович, А. М. Переломов, *Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике*, Наука, М., 1966.

- [6] Л. Б. Окунь, *Физика элементарных частиц*, Наука, М., 1988.
- [7] L. Accardy, Yu. G. Lu, I. V. Volovich, *Quantum Theory and Its Stochastic Limit*, Springer, Berlin, 2002.
- [8] A. N. Pechen, I. V. Volovich, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, **5**:4 (2002), 441–464; [math-ph/0202046](#).
- [9] I. Ya. Aref'eva, I. V. Volovich, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, **3**:4 (2000), 453–482; *Quantum decoherence and higher order corrections to the large time exponential behaviour*, [quant-ph/9906022](#).
- [10] К. Хепп, *Теория перенормировок*, Наука, М., 1974.
- [11] О. И. Завьялов, *Перенормированные диаграммы Фейнмана*, Наука, М., 1979; В. А. Смирнов, *Перенормировка и асимптотические разложения фейнмановских амплитуд*, Изд-во МГУ, М., 1990; A. N. Kuznetsov, F. V. Tkachov, V. V. Vlasov, *Techniques of Distributions in Perturbative Quantum Field Theory, (I) Euclidean asymptotic operation for products of singular functions*, [hep-th/9612037](#).
- [12] П. П. Кулиш, Л. Д. Фаддеев, *ТМФ*, **4** (1970), 153–170.
- [13] Л. Д. Фаддеев, *ДАН СССР*, **152** (1963), 573–576.
- [14] I. Ya. Aref'eva, *ТМФ*, **14** (1973), 3–17.
- [15] J. R. Dorfman, E. G. D. Cohen, *J. Math. Phys.*, **8**:2 (1967), 282–297; J. R. Dorfman, *Physica A*, **106** (1981), 77–101.
- [16] H. Saller, *The Hilbert spaces for stable and unstable particles*, [hep-th/0501074](#).
- [17] Yong Zhou, *A new wave-function renormalization prescription for unstable particle*, [hep-ph/0510244](#).
- [18] L. Maiani, M. Testa, *Ann. Phys.*, **263** (1998), 353–367; [hep-th/9709110](#).
- [19] P. Caban, J. Rembieliński, K. A. Smoliński, Z. Walczak, *Phys. Rev. A*, **72** (2005), 032106; [quant-ph/0506183](#).
- [20] К. Фридрихс, *Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве*, Мир, М., 1969.
- [21] Ф. П. Васильев, А. Ю. Иваницкий, *Линейное программирование*, Факториал, М., 1998.
- [22] В. С. Владимиров, *Уравнения математической физики*, Наука, М., 1981.

Поступила в редакцию 16.06.2006