Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. М. Лавров, О. В. Радченко, Супермногообразия Федосова, *ТМФ*, 2006, том 149, номер 2, 202–227

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf4227>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 14:47:59

© 2006 г.

П. М. Лавров*, О. В. Радченко*

СУПЕРМНОГООБРАЗИЯ ФЕДОСОВА

Изучаются свойства симплектического тензора кривизны на супермногообразиях. С помощью метода нормальных координат устанавливаются соотношения высших порядков между аффинными расширениями тензора кривизны и тензора симплектической структуры. Найдена производящая функция для соотношений высших порядков.

Ключевые слова: супермногообразия, тензорные поля, ковариантная производная, симплектический тензор кривизны.

1. ВВЕДЕНИЕ

Методы дифференциальной геометрии давно стали универсальным средством теоретической физики. В первую очередь отметим их решающую роль в общей теории относительности, где основными объектами являются римановы многообразия, оснащенные симметричной связностью, которая согласована с метрическим тензором. В классической механике рассматриваются симплектические многообразия, т.е. многообразия, оснащенные невырожденной замкнутой 2-формой, используемой для построения скобки Пуассона. Деформационное квантование [1] формулируется в терминах симплектических многообразий, оснащенных симметричной связностью, согласованной с заданной симплектической структурой. Для таких многообразий в работе [2], основная часть которой посвящена изучению свойств симплектического тензора кривизны, предложен термин “многообразия Федосова”, которым мы (применительно к супермногообразиям) и будем пользоваться.

Открытие суперсимметричных теорий поля (в том числе и теорий супергравитации) ввело в современную квантовую теорию поля ряд применений дифференциальной геометрии, которые основаны на понятии супермногообразия, введенного и изученного Березиным [3] (см. также [4]). В этих случаях необходимо оснастить супермногообразия подходящей симплектической структурой или (и) симметричной связностью. Так, изучение геометрического содержания хорошо известной схемы

*Томский государственный педагогический университет, Томск, Россия.
E-mail: lavrov@tspu.edu.ru, radchenko@tspu.edu.ru

квантования Баталина–Вилковыского [5] основано на использовании нечетных симплектических супермногообразий [6]. В некоторых специальных исследованиях современной теории калибровочных полей [7] использовались (в принятой в данной работе терминологии) четные плоские супермногообразия Федосова.

Целью настоящей работы является изучение свойств тензора кривизны на произвольных четных и нечетных супермногообразиях Федосова. Следует отметить, что четные супермногообразия Федосова можно рассматривать как естественное обобщение многообразий Федосова на суперсимметричный случай. В свою очередь нечетные супермногообразия Федосова не имеют аналога в обычной дифференциальной геометрии, и их следует рассматривать как новые объекты дифференциальной геометрии на супермногообразиях. Тем не менее оказывается, что алгебраические свойства симплектического тензора кривизны, тензора Риччи и скалярной кривизны на супермногообразиях Федосова, а также различные тождества для них имеют формально один и тот же вид.

Работа организована следующим образом. В разделе 2 мы напоминаем определение тензорных полей на супермногообразиях, обсуждаем основные операции над ними и симметричные свойства тензорных полей. В разделе 3 мы рассматриваем аффинные связности (ковариантные производные) на супермногообразии и их тензоры кривизны. Свойства симплектического тензора кривизны обсуждаются в разделе 4. В разделе 5 изучаются свойства тензора Риччи и скалярной кривизны на супермногообразиях Федосова. В разделе 6 мы обсуждаем аффинные расширения тензоров и связности и изучаем их свойства, используя метод нормальных координат на симплектических супермногообразиях, оснащенных аффинной связностью. В разделе 7 выводятся соотношения высших порядков (до третьего порядка включительно) между аффинными расширениями тензора симплектической структуры, симплектического тензора кривизны и связности; порядок соотношения определяется порядком аффинных расширений связности. Соотношения высших порядков в произвольных координатах обсуждаются в разделе 8, где, в частности, вводится производящая функция для этих соотношений. Заключительные замечания сделаны в разделе 9.

В работе используются конденсированные обозначения, предложенные Девиттом [8]. Производные по переменным x^i понимаются как правые, и для них используется обозначение $A_{,i} = \partial_r A / \partial x^i$, а для левых производных используется обычное обозначение $\partial A / \partial x^i$. Ковариантные производные понимаются как действующие справа и обозначаются символом $A_{;i} = A \nabla_i$. Грассманова четность любой величины A обозначается как $\epsilon(A)$.

2. ТЕНЗОРНЫЕ ПОЛЯ НА СУПЕРМНОГООБРАЗИЯХ

В этом разделе даны основные определения и соотношения тензорного анализа на супермногообразиях, которые используются при проведении вычислений.

Пусть M – супермногообразие, $\dim M = N$. Рассмотрим касательное $T_p M$ и кокасательное $T_p^* M$ пространства, построенные для точки $p \in M$. Мы предполагаем, что каждый элемент $X \in T_p M$ обладает определенной грассмановой четностью $\epsilon(X)$, а

каждый элемент $\omega \in T_p^*M$ – грассмановой четностью $\epsilon(\omega)$. Введем пространство Π_m^n как декартово произведение пространств T_pM и T_p^*M :

$$\Pi_m^n = \overbrace{T_p^* \times \cdots \times T_p^*}^n \times \underbrace{T_p \times \cdots \times T_p}_m. \quad (1)$$

Предположим, что $\mathbf{T}$ – отображение, $\mathbf{T}: \Pi_m^n \rightarrow \Lambda$, которое каждому элементу $(\omega^1, \dots, \omega^n, X_1, \dots, X_m) \in \Pi_m^n$ ставит в соответствие определенное суперчисло $\mathbf{T}(\omega^1, \dots, \omega^n, X_1, \dots, X_m) \in \Lambda$, где Λ – алгебра Березина. При этом $\epsilon(\mathbf{T}(\omega^1, \dots, \omega^n, X_1, \dots, X_m)) = \epsilon(\mathbf{T}) + \epsilon(\omega^1) + \cdots + \epsilon(\omega^n) + \epsilon(X_1) + \cdots + \epsilon(X_m)$. Если $\epsilon(\mathbf{T}) = 0$, то говорят о четном отображении, а если $\epsilon(\mathbf{T}) = 1$, то – о нечетном отображении. Отображение $\mathbf{T}$ является *тензором ранга (n, m) в точке p* , если для всех $\omega, \sigma \in T_p^*M$, всех $X, Y \in T_pM$ и всех $\alpha \in \Lambda$ оно удовлетворяет следующим мультилинейным законам:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\dots \omega + \sigma \dots) &= \mathbf{T}(\dots \omega \dots) + \mathbf{T}(\dots \sigma \dots), \\ \mathbf{T}(\dots X + Y \dots) &= \mathbf{T}(\dots X \dots) + \mathbf{T}(\dots Y \dots), \\ \mathbf{T}(\dots \omega \alpha, \sigma \dots) &= \mathbf{T}(\dots \omega, \alpha \sigma \dots), \\ \mathbf{T}(\dots \omega \alpha, X \dots) &= \mathbf{T}(\dots \omega, \alpha X \dots), \\ \mathbf{T}(\dots X \alpha, Y \dots) &= \mathbf{T}(\dots X, \alpha Y \dots), \\ \mathbf{T}(\dots X \alpha) &= \mathbf{T}(\dots X) \alpha. \end{aligned} \quad (2)$$

Введем теперь локальные координаты x^i , $\epsilon(x^i) = \epsilon_i$, на M в окрестности точки p . Пусть наборы $\{e_i\}$ и $\{e^i\}$ ($\epsilon(e^i) = \epsilon(e_i) = \epsilon_i$) представляют собой базисы в касательном T_pM и кокасательном T_p^*M пространствах, соответственно. Мы полагаем, что грассмановы четности векторов X из касательного пространства и 1-форм ω из кокасательного пространства согласованы с грассмановыми четностями соответствующих базисов, т.е., например, для координат X^i вектора X имеет место соотношение $\epsilon(X^i) = \epsilon(X) + \epsilon_i$. При переходе к другому набору $\bar{x}^i = \bar{x}^i(x)$ локальных координат базисные векторы в T_pM и T_p^*M преобразуются по следующим правилам:

$$\bar{e}_i = e_j \frac{\partial_r x^j}{\partial \bar{x}^i}, \quad \bar{e}^i = e^j \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}. \quad (3)$$

Матрицы преобразования удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\frac{\partial_r \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial_r x^k}{\partial \bar{x}^j} = \delta_j^i, \quad \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} = \delta_j^i, \quad \frac{\partial_r x^i}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial_r \bar{x}^k}{\partial x^j} = \delta_j^i, \quad \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^j} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k} = \delta_j^i. \quad (4)$$

Тензорное поле $\mathbf{T}$ можно описывать в компонентах относительно выбранных базисов $\{e^i\}$, $\{e_i\}$:

$$\begin{aligned} T^{i_1 \dots i_n}_{j_1 \dots j_m} &= \mathbf{T}(e^{i_1}, \dots, e^{i_n}, e_{j_1}, \dots, e_{j_m}), \\ \epsilon(T^{i_1 \dots i_n}_{j_1 \dots j_m}) &= \epsilon(\mathbf{T}) + \epsilon_{i_1} + \cdots + \epsilon_{i_n} + \epsilon_{j_1} + \cdots + \epsilon_{j_m}. \end{aligned} \quad (5)$$

Тогда тензорное поле типа (n, m) и ранга $n + m$ определяется как геометрический объект, который в каждой локальной системе координат $(x) = (x^1, \dots, x^N)$ задается набором функций с n верхними и m нижними индексами, удовлетворяющими

определенным законам преобразования при переходе от одной локальной системы координат к другой: при переходе $(x) \rightarrow (\bar{x})$

$$\begin{aligned} \bar{T}^{i_1 \dots i_n}_{j_1 \dots j_m} &= T^{l_1 \dots l_n}_{k_1 \dots k_m} \frac{\partial_r x^{k_m}}{\partial \bar{x}^{j_m}} \cdots \frac{\partial_r x^{k_1}}{\partial \bar{x}^{j_1}} \frac{\partial \bar{x}^{i_n}}{\partial x^{l_n}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{i_1}}{\partial x^{l_1}} \times \\ &\times (-1)^{\left(\sum_{s=1}^{m-1} \sum_{p=s+1}^m \epsilon_{j_p} (\epsilon_{j_s} + \epsilon_{k_s}) + \sum_{s=1}^n \sum_{p=1}^m \epsilon_{j_p} (\epsilon_{i_s} + \epsilon_{l_s}) + \sum_{s=1}^{n-1} \sum_{p=s+1}^n \epsilon_{i_p} (\epsilon_{i_s} + \epsilon_{l_s}) \right)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Эти соотношения в простейших случаях для векторных полей T^i и ковекторных полей T_i имеют вид

$$\bar{T}^i = T^n \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^n}, \quad \bar{T}_i = T_n \frac{\partial_r x^n}{\partial \bar{x}^i}, \quad (7)$$

а для тензорных полей второго ранга различных типов равенства (6) записываются как

$$\bar{T}^{ij} = T^{mn} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^n} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^m} (-1)^{\epsilon_j (\epsilon_i + \epsilon_m)}, \quad (8)$$

$$\bar{T}_{ij} = T_{mn} \frac{\partial_r x^n}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial_r x^m}{\partial \bar{x}^i} (-1)^{\epsilon_j (\epsilon_i + \epsilon_m)}, \quad (9)$$

$$\bar{T}^i_j = T^m_n \frac{\partial_r x^n}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^m} (-1)^{\epsilon_j (\epsilon_i + \epsilon_m)}. \quad (10)$$

Заметим, что единичная матрица δ^i_j связана с единичным тензорным полем E^i_j , преобразующимся согласно (10) следующим образом:

$$E^i_j = \delta^i_j. \quad (11)$$

Из тензорного поля типа (n, m) ранга $n + m$, где $n \neq 0$, $m \neq 0$, можно построить тензорное поле типа $(n-1, m-1)$ ранга $n + m - 2$ сверткой одного верхнего и одного нижнего индекса по правилу, определяемому знаковым множителем в следующем выражении:

$$T^{i_1 \dots i_{s-1} i_{s+1} \dots i_n}_{j_1 \dots j_{q-1} j_{q+1} \dots j_m} (-1)^{\epsilon_i (\epsilon_{i_{s+1}} + \dots + \epsilon_{i_n} + \epsilon_{j_1} + \dots + \epsilon_{j_{q-1}} + 1)}. \quad (12)$$

В частности, для тензорных полей типа $(1, 1)$ свертка дает суперслед $T^i_i (-1)^{\epsilon_i}$. Из двух тензорных полей $U^{i_1 \dots i_n k}$ и $V_{j_1 \dots j_m}$ с помощью операции умножения можно построить новые тензорные поля по правилам

$$(-1)^{\epsilon(\mathbf{V})(\epsilon_{i_1} + \dots + \epsilon_{i_n} + \epsilon_k) + \epsilon_k} U^{i_1 \dots i_n k} V_{kj_1 \dots j_m} \equiv T^{i_1 \dots i_n}_{j_1 \dots j_m}, \quad (13)$$

которые действительно преобразуются согласно (6). В частности, из векторного и ковекторного полей можно построить скалярное поле,

$$(-1)^{\epsilon_i (\epsilon(\mathbf{V}) + 1)} U^i V_i = (-1)^{\epsilon(\mathbf{U}) \epsilon(\mathbf{V}) + \epsilon_i \epsilon(\mathbf{U})} V_i U^i, \quad (14)$$

являющееся инвариантом относительно выбора локальных координат, а из двух тензорных полей второго ранга U^{ij} и V_{ij} мы получаем тензорные поля

$$(-1)^{(\epsilon_i + \epsilon_k) \epsilon(\mathbf{V}) + \epsilon_k} U^{ik} V_{kj}, \quad (15)$$

$$(-1)^{(\epsilon_i + \epsilon_k) \epsilon(\mathbf{V}) + \epsilon_k (\epsilon_i + \epsilon_j + 1)} U^{ki} V_{jk} = (-1)^{\epsilon(\mathbf{U}) \epsilon(\mathbf{V}) + (\epsilon_j + \epsilon_k) \epsilon(\mathbf{U}) + \epsilon_i \epsilon_j} V_{jk} U^{ki}, \quad (16)$$

преобразующиеся согласно (10), а после дальнейшей свертки индексов получается скаляр:

$$(-1)^{(\epsilon_i + \epsilon_k)(\epsilon(\mathbf{V}) + 1)} U^{ik} V_{ki} = (-1)^{\epsilon(\mathbf{U})\epsilon(\mathbf{V}) + (\epsilon_i + \epsilon_k)\epsilon(\mathbf{U})} V_{ik} U^{ki}. \quad (17)$$

Более того, учитывая (11), (15) и (13), обратное тензорное поле T_{ij} для невырожденного тензорного поля T^{ij} второго ранга типа (2,0) мы определим с помощью следующих соотношений:

$$(-1)^{(\epsilon_i + \epsilon_k)\epsilon(\mathbf{T}) + \epsilon_k} T^{ik} T_{kj} = \delta_j^i, \quad (18)$$

$$(-1)^{(\epsilon_j + \epsilon_k + 1)\epsilon(\mathbf{T}) + \epsilon_i \epsilon_j} T_{jk} T^{ki} = \delta_j^i, \quad (19)$$

$$\epsilon(T_{ij}) = \epsilon(T^{ij}) = \epsilon(\mathbf{T}) + \epsilon_i + \epsilon_j$$

и аналогично для тензорных полей типа (0,2).

Хорошо известно, что при построении тензорного анализа на многообразиях большую роль играют тензорные поля, являющиеся симметричными или антисимметричными. В суперсимметричном случае возможных свойств симметрии у суперматриц больше (восемь типов [9]), и возникает естественный вопрос: как эти свойства согласованы с тензорными законами преобразования? Нетрудно проверить, что в рамках данного определения тензорных полей на супермногообразиях среди суперматриц с возможными свойствами симметрии только суперматрицы, обладающие свойствами обобщенной симметрии или антисимметрии, удовлетворяют тензорным законам преобразования. Рассмотрим, например, суперматрицу второго ранга типа (2,0) и потребуем, чтобы она обладала свойством обобщенной симметрии (антисимметрии):

$$T^{ij} = \pm T^{ji} (-1)^{\epsilon_i \epsilon_j} \quad (20)$$

(знак “+” отвечает обобщенной симметрии, знак “−” – обобщенной антисимметрии). Это свойство согласовано с законом преобразования (8). Действительно,

$$\bar{T}^{ij} = T^{mn} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^n} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^m} (-1)^{\epsilon_j(\epsilon_i + \epsilon_m)} = \pm T^{nm} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^m} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^n} (-1)^{\epsilon_i \epsilon_n} = \pm \bar{T}^{ji} (-1)^{\epsilon_i \epsilon_j},$$

в то время как другие возможные типы симметрий суперматриц не выдерживают проверки на согласование с преобразованием (6). Заметим, что для невырожденных симметричного и антисимметричного тензорных полей обратные к ним тензорные поля также обладают необходимыми свойствами симметрии. Рассматривая, например, тензорное поле второго ранга T^{ij} со свойствами симметрии (20), из определений (18) и (19) мы можем получить, что обратное тензорное поле

$$T_{ij} = \pm T_{ji} (-1)^{\epsilon_i \epsilon_j} \quad (21)$$

также обладает свойством обобщенной симметрии (антисимметрии).

В терминах тензорного поля ω^{ij} , $\omega^{ij} = -\omega^{ji} (-1)^{\epsilon_i \epsilon_j}$, $\epsilon(\omega^{ij}) = \epsilon(\omega) + \epsilon_i + \epsilon_j$, (супер)скобка Пуассона определяется соотношением

$$(A, B) = \frac{\partial_r A}{\partial x^i} (-1)^{\epsilon(\omega)(\epsilon_i + 1)} \omega^{ij} \frac{\partial B}{\partial x^j}. \quad (22)$$

Это определение ведет к инвариантности (супер)скобки Пуассона относительно локальных преобразований координат $x \rightarrow \bar{x}$, $(\bar{A}, \bar{B}) = (A, B)$ и к выполнению ряда свойств, среди которых отметим лишь свойство обобщенной антисимметрии

$$(A, B) = -(-1)^{(\epsilon(A)+\epsilon(\omega))(\epsilon(B)+\epsilon(\omega))}(B, A) \quad (23)$$

и тождество Якоби

$$(A, (B, C))(-1)^{(\epsilon(A)+\epsilon(\omega))(\epsilon(C)+\epsilon(\omega))} + \text{cycle}(A, B, C) \equiv 0.$$

В литературе часто используется определение (супер)скобки Пуассона в виде

$$(A, B) = \frac{\partial_r A}{\partial x^i} \Omega^{ij} \frac{\partial B}{\partial x^j}, \quad (24)$$

где свойства симметрии $\Omega^{ij}(\epsilon(\Omega^{ij}) = \epsilon(\Omega) + \epsilon_i + \epsilon_j)$,

$$\Omega^{ij} = -\Omega^{ji}(-1)^{(\epsilon(\Omega)+\epsilon_i)(\epsilon(\Omega)+\epsilon_j)}, \quad (25)$$

обеспечивают выполнение равенства (23), а сама (супер)скобка Пуассона (24) инвариантна относительно локальных замен переменных, если закон преобразования для Ω^{ij} имеет вид

$$\bar{\Omega}^{ij} = \frac{\partial_r \bar{x}^i}{\partial x^m} \Omega^{mn} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^n}. \quad (26)$$

Преобразования (26) для нечетных тензорных полей ($\epsilon(\Omega) = 1$) существенно отличаются от введенных ранее, что и приводит к различиям в явной реализации (супер)скобок Пуассона (22), (24).

3. КОВАРИАНТНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ

Как и в случае тензорного анализа на многообразиях (см., например, [10]), на супермногообразиях M можно ввести ковариантное дифференцирование (или аффинную связность) как отображение ∇ с компонентами ∇_i , $\epsilon(\nabla_i) = \epsilon_i$, набора тензорных полей на M самого в себя, удовлетворяющее двум требованиям: во-первых, оно должно быть тензорной операцией, действующей справа и добавляющей один нижний индекс, во-вторых, в случае, когда возможно введение локальных декартовых координат, оно должно сводиться к обычной (правой) производной.

Обсудим сначала случай, когда (x) является декартовой системой координат, а $(\bar{x})$ – произвольной системой координат. Рассмотрим векторное поле T^i . Тогда в системе (x) мы имеем

$$T^i \nabla_j = T^i_{,j},$$

а в системе координат $(\bar{x})$ с учетом (10) и (7) мы получим

$$\bar{T}^i \bar{\nabla}_j = (T^m_{,n}) \frac{\partial_r x^n}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^m} (-1)^{\epsilon_j(\epsilon_i + \epsilon_m)} = \bar{T}^i_{,j} + \bar{T}^k \Gamma^i_{kj} (-1)^{\epsilon_k(\epsilon_i + 1)},$$

где Γ^i_{jk} – компоненты аффинной связности:

$$\Gamma^i_{kj} = \frac{\partial_r \bar{x}^i}{\partial x^m} \frac{\partial_r^2 x^m}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^j}. \quad (27)$$

По определению они обладают свойством обобщенной симметрии по нижним индексам:

$$\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}(-1)^{\epsilon_j \epsilon_k}. \quad (28)$$

Аналогично действие ковариантной производной на ковекторные поля T_i задается соотношением

$$\bar{T}_i \bar{\nabla}_j = \bar{T}_{i,j} + \bar{T}_k \tilde{\Gamma}^k_{ij}, \quad \tilde{\Gamma}^k_{ij} = (-1)^{\epsilon_j(\epsilon_i + \epsilon_l)} \frac{\partial_r^2 \bar{x}^k}{\partial x^l \partial x^m} \frac{\partial_r x^m}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial_r x^l}{\partial \bar{x}^i}.$$

Используя первое из соотношений (4), мы можем непосредственно установить, что

$$\tilde{\Gamma}^k_{ij} = -\Gamma^k_{ij},$$

и, следовательно,

$$\bar{T}_i \bar{\nabla}_j = \bar{T}_{i,j} - \bar{T}_k \Gamma^k_{ij}.$$

В общем случае на произвольном супермногообразии M аффинные связности не определяются частными производными по координатам. Взятие ковариантной производной ∇ (или определение связности Γ) определяется как правое дифференцирование и последовательная свертка верхних и нижних индексов с компонентами связности аналогично случаю векторных и ковекторных полей. Мы не будем приводить здесь формулы действия ковариантной производной на произвольные тензорные поля и ограничимся случаем скалярных, векторных и ковекторных полей:

$$T \nabla_i = T_{,i}, \quad (29)$$

$$T^i \nabla_j = T^i_{,j} + T^k \Gamma^i_{kj}(-1)^{\epsilon_k(\epsilon_i + 1)}, \quad (30)$$

$$T_i \nabla_j = T_{i,j} - T_k \Gamma^k_{ij}, \quad (31)$$

а также тензорных полей второго ранга типа $(2, 0)$, $(0, 2)$ и $(1, 1)$:

$$T^{ij} \nabla_k = T^{ij}_{,k} + T^{il} \Gamma^j_{lk}(-1)^{\epsilon_l(\epsilon_j + 1)} + T^{lj} \Gamma^i_{lk}(-1)^{\epsilon_i \epsilon_j + \epsilon_l(\epsilon_i + \epsilon_j + 1)}, \quad (32)$$

$$T_{ij} \nabla_k = T_{ij,k} - T_{il} \Gamma^l_{jk} - T_{lj} \Gamma^l_{ik}(-1)^{\epsilon_i \epsilon_j + \epsilon_l \epsilon_j}, \quad (33)$$

$$T^i_j \nabla_k = T^i_{j,k} - T^i_l \Gamma^l_{jk} + T^l_j \Gamma^i_{lk}(-1)^{\epsilon_i \epsilon_j + \epsilon_l(\epsilon_i + \epsilon_j + 1)}. \quad (34)$$

Компоненты аффинной связности не преобразуются как компоненты смешанного тензорного поля:

$$\bar{\Gamma}^i_{jk} = (-1)^{\epsilon_n(\epsilon_m + \epsilon_j)} \frac{\partial_r \bar{x}^i}{\partial x^l} \Gamma^l_{mn} \frac{\partial_r x^m}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial_r x^n}{\partial \bar{x}^k} + \frac{\partial_r \bar{x}^i}{\partial x^m} \frac{\partial_r^2 x^m}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k}. \quad (35)$$

В общем случае компоненты связности не обладают свойством (обобщенной) симметрии по нижним индексам, а их антисимметричная часть является тензором кручения,

$$T^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - (-1)^{\epsilon_j \epsilon_k} \Gamma^i_{kj}.$$

Если Γ^i_{jk} обладают свойством (28), то говорят, что на M задана симметричная связность.

Тензор Римана R^i_{mjk} в координатном базисе определяется действием коммутатора ковариантных производных $[\nabla_i, \nabla_j] = \nabla_i \nabla_j - (-1)^{\epsilon_i \epsilon_j} \nabla_j \nabla_i$ на векторное поле:

$$T^i[\nabla_j, \nabla_k] = -(-1)^{\epsilon_l(\epsilon_i+1)} T^l R^i_{ljk}, \quad (36)$$

где знаковый фактор выбран по общим правилам построения тензорных полей из произведений тензорных полей. Непосредственное вычисление приводит к следующему виду тензора R^i_{ljk} :

$$R^i_{ljk} = -\Gamma^i_{lj,k} + \Gamma^i_{lk,j}(-1)^{\epsilon_j \epsilon_k} + \Gamma^i_{jn} \Gamma^n_{lk}(-1)^{\epsilon_j \epsilon_l} - \Gamma^i_{kn} \Gamma^n_{lj}(-1)^{\epsilon_k(\epsilon_l + \epsilon_j)}. \quad (37)$$

Тензор Римана обладает свойством обобщенной антисимметрии,

$$R^i_{ljk} = -(-1)^{\epsilon_j \epsilon_k} R^i_{lkj}, \quad (38)$$

и удовлетворяет супертождеству Якоби

$$(-1)^{\epsilon_l \epsilon_k} R^i_{ljk} + (-1)^{\epsilon_j \epsilon_l} R^i_{jkl} + (-1)^{\epsilon_k \epsilon_j} R^i_{klj} \equiv 0. \quad (39)$$

С помощью супертождества Якоби для ковариантных производных,

$$[\nabla_i, [\nabla_j, \nabla_k]](-1)^{\epsilon_i \epsilon_k} + [\nabla_k, [\nabla_i, \nabla_j]](-1)^{\epsilon_k \epsilon_j} + [\nabla_j, [\nabla_k, \nabla_i]](-1)^{\epsilon_i \epsilon_j} \equiv 0,$$

можно вывести супертождество Бианки

$$(-1)^{\epsilon_i \epsilon_j} R^n_{mjk;i} + (-1)^{\epsilon_i \epsilon_k} R^n_{mij;k} + (-1)^{\epsilon_k \epsilon_j} R^n_{mki;j} \equiv 0, \quad (40)$$

где использовано обозначение $R^n_{mjk;i} := R^n_{mjk} \nabla_i$.

4. СИМПЛЕКТИЧЕСКИЙ ТЕНЗОР КРИВИЗНЫ

Рассмотрим четное (нечетное) симплектическое супермногообразие (M, ω) , т.е. супермногообразие M , оснащенное невырожденной четной (нечетной) замкнутой дифференциальной 2-формой ω , $\epsilon(\omega) = 0$ ($\epsilon(\omega) = 1$), или, другими словами, симплектической структурой. В локальных координатах x^i

$$\omega = \omega_{ij} dx^j \wedge dx^i, \quad dx^i \wedge dx^j = -(-1)^{\epsilon_i \epsilon_j} dx^j \wedge dx^i, \quad (41)$$

2-форма ω определяется антисимметричным тензорным полем типа $(0, 2)$:

$$\omega_{ij} = -(-1)^{\epsilon_i \epsilon_j} \omega_{ji}, \quad \epsilon(\omega^{ij}) = \epsilon(\omega) + \epsilon_i + \epsilon_j, \quad (42)$$

а условие ее замкнутости $d\omega = 0$ записывается как

$$\omega_{ij,k}(-1)^{\epsilon_i \epsilon_k} + \omega_{jk,i}(-1)^{\epsilon_i \epsilon_j} + \omega_{ki,j}(-1)^{\epsilon_j \epsilon_k} \equiv 0. \quad (43)$$

Пусть ∇ (Γ) является ковариантной производной (связностью) на M , согласованной с 2-формой ω , $\omega \nabla = 0$. В координатном базисе это требование означает, что

$$\omega_{ij,k} - \Gamma_{ijk} + \Gamma_{jik}(-1)^{\epsilon_i \epsilon_j} = 0, \quad (44)$$

где введено обозначение

$$\Gamma_{ijk} = \omega_{in} \Gamma^n_{jk}, \quad \epsilon(\Gamma_{ijk}) = \epsilon(\omega) + \epsilon_i + \epsilon_j + \epsilon_k. \quad (45)$$

Заметим, что в общем случае замкнутость 2-формы ω и ее согласованность со связностью (44) не ведут к ограничениям на свойства симметрии Γ_{ijk} . Действительно, наряду с (44) рассмотрим соотношения, получающиеся циклической перестановкой индексов,

$$\omega_{jk,i} - \Gamma_{jki} + \Gamma_{kji}(-1)^{\epsilon_k \epsilon_j} = 0, \quad (46)$$

$$\omega_{ki,j} - \Gamma_{kij} + \Gamma_{ikj}(-1)^{\epsilon_i \epsilon_k} = 0. \quad (47)$$

Умножим затем соотношение (44) на $(-1)^{(\epsilon_i + \epsilon_j) \epsilon_k}$ и вычтем из него выражение в левой части равенства (47) и выражение в левой части соотношения (46), умноженное на $(-1)^{(\epsilon_i + \epsilon_k) \epsilon_j}$. В результате мы получим следующее представление для Γ_{ijk} :

$$\begin{aligned} \Gamma_{kij} = & \frac{1}{2} (\omega_{ki,j} + \omega_{jk,i}(-1)^{(\epsilon_i + \epsilon_k) \epsilon_j} - \omega_{ij,k}(-1)^{(\epsilon_i + \epsilon_j) \epsilon_k}) + \\ & + (\Pi_{kij} + \Pi_{ikj}(-1)^{\epsilon_i \epsilon_k} - \Pi_{jki}(-1)^{(\epsilon_i + \epsilon_k) \epsilon_j}), \end{aligned} \quad (48)$$

где через Π_{kij} обозначена симметричная часть связности Γ_{ijk} ,

$$\Pi_{kij} = \frac{1}{2} (\Gamma_{kij} + \Gamma_{kji}(-1)^{\epsilon_i \epsilon_j}). \quad (49)$$

С учетом тождества (43) соотношение (48) можно переписать в виде

$$\Gamma_{kij} = \Pi_{kij} - \omega_{ij,k}(-1)^{(\epsilon_i + \epsilon_j) \epsilon_k} + (\Pi_{ikj}(-1)^{\epsilon_i \epsilon_k} - \Pi_{jki}(-1)^{(\epsilon_i + \epsilon_k) \epsilon_j}), \quad (50)$$

т.е. представить как сумму симметричной (первое слагаемое в правой части) и антисимметричной частей связности. Действительно, учитывая соотношения для симплектической связности

$$\begin{aligned} & \Gamma_{ijk}(-1)^{\epsilon_i \epsilon_k} - \Gamma_{jik}(-1)^{(\epsilon_k + \epsilon_j) \epsilon_i} + \Gamma_{jki}(-1)^{\epsilon_i \epsilon_j} - \\ & - \Gamma_{kji}(-1)^{(\epsilon_i + \epsilon_k) \epsilon_j} + \Gamma_{kij}(-1)^{\epsilon_j \epsilon_k} - \Gamma_{ikj}(-1)^{(\epsilon_i + \epsilon_j) \epsilon_k} = 0, \end{aligned} \quad (51)$$

которые следуют из тождеств (43) и уравнений (44), антисимметричную часть в (50) можно переписать как

$$- \omega_{ij,k}(-1)^{(\epsilon_i + \epsilon_j) \epsilon_k} + (\Pi_{ikj}(-1)^{\epsilon_i \epsilon_k} - \Pi_{jki}(-1)^{(\epsilon_i + \epsilon_k) \epsilon_j}) = \frac{1}{2} (\Gamma_{kij} - \Gamma_{kji}(-1)^{\epsilon_i \epsilon_j}), \quad (52)$$

т.е. как антисимметричную часть симплектической связности. Следовательно, уравнения (44) не накладывают ограничений на свойства симметрии симплектической связности.

Предположим теперь, что Γ является симметричной связностью на M . Тогда четное (нечетное) супермногообразие Федосова (M, ω, Γ) определяется как четное (нечетное) симплектическое супермногообразие M , оснащенное заданной четной (нечетной) связностью Γ , которая согласована с симплектической структурой ω .

Введем симплектический тензор кривизны

$$R_{ijkl} = \omega_{in} R^n_{jkl}, \quad \epsilon(R_{ijkl}) = \epsilon(\omega) + \epsilon_i + \epsilon_j + \epsilon_k + \epsilon_l, \quad (53)$$

где R^n_{jkl} определен в (37). Это определение приводит к следующему представлению:

$$\begin{aligned} R_{imjk} = & -\Gamma_{imj,k} + \Gamma_{imk,j}(-1)^{\epsilon_j \epsilon_k} + \\ & + \Gamma_{nij} \Gamma^n_{mk}(-1)^{\epsilon_i \epsilon_n + \epsilon_j(\epsilon_m + \epsilon_n)} - \Gamma_{nik} \Gamma^n_{mj}(-1)^{\epsilon_i \epsilon_n + \epsilon_k(\epsilon_m + \epsilon_n + \epsilon_j)}. \end{aligned} \quad (54)$$

Очевидно, что тензор R_{ijkl} обладает свойством обобщенной антисимметрии по двум последним индексам,

$$R_{ijkl} = -R_{ijlk}(-1)^{\epsilon_k \epsilon_l}, \quad (55)$$

и с учетом (53) и (39) нетрудно вывести супертождество Якоби для R_{ijkl} :

$$R_{ijkl}(-1)^{\epsilon_j \epsilon_l} + R_{iljk}(-1)^{\epsilon_l \epsilon_k} + R_{iklj}(-1)^{\epsilon_k \epsilon_j} = 0. \quad (56)$$

Дополнительно тензор кривизны R_{ijkl} обладает свойством обобщенной симметрии по двум первым индексам:

$$R_{ijkl} = R_{jilk}(-1)^{\epsilon_i \epsilon_j}. \quad (57)$$

Для доказательства этого утверждения рассмотрим соотношение

$$\omega_{ij,k} = \Gamma_{ijk,l} - \Gamma_{jik,l}(-1)^{\epsilon_i \epsilon_j}, \quad (58)$$

которое является следствием (44). Затем, используя соотношение

$$\Gamma_{ijk,l} = \omega_{in} \Gamma^n_{jk,l} + \omega_{in,l} \Gamma^n_{jk}(-1)^{(\epsilon_n + \epsilon_j + \epsilon_k) \epsilon_l}, \quad (59)$$

представление (54) и уравнение (58), мы получаем

$$\begin{aligned} 0 = & \omega_{ij,kl} - (-1)^{\epsilon_k \epsilon_l} \omega_{ij,lk} = \\ = & \Gamma_{ijk,l} - \Gamma_{jik,l}(-1)^{\epsilon_i \epsilon_j} - \Gamma_{ijl,k}(-1)^{\epsilon_k \epsilon_l} + \Gamma_{jil,k}(-1)^{\epsilon_i \epsilon_j + \epsilon_k \epsilon_l} = \\ = & -R_{ijkl} + (-1)^{\epsilon_i \epsilon_j} R_{jikl}, \end{aligned}$$

что доказывает свойство (57).

Для любой четной или нечетной симплектической связности имеет место тождество

$$R_{ijkl} + R_{ljik}(-1)^{\epsilon_l(\epsilon_i + \epsilon_k + \epsilon_j)} + R_{klij}(-1)^{(\epsilon_k + \epsilon_l)(\epsilon_i + \epsilon_j)} + R_{jkli}(-1)^{\epsilon_i(\epsilon_j + \epsilon_k + \epsilon_l)} \equiv 0, \quad (60)$$

в которое компоненты симплектического тензора кривизны входят с циклической перестановкой всех индексов, однако знаковые факторы, зависящие от грассмановых четностей индексов, не получают циклической перестановкой как, например, в случае супертождества Якоби, а определяются перестановкой индексов от данного набора к исходному.

Доказательство тождества (60) основано на использовании супертождества Якоби (56) и следствий из него, получаемых циклической перестановкой индексов:

$$(-1)^{\epsilon_j \epsilon_l} R_{ijkl} + (-1)^{\epsilon_l \epsilon_k} R_{iljk} + (-1)^{\epsilon_k \epsilon_j} R_{iklj} = 0, \quad (61)$$

$$(-1)^{\epsilon_i \epsilon_k} R_{lij k} + (-1)^{\epsilon_j \epsilon_k} R_{lkij} + (-1)^{\epsilon_i \epsilon_j} R_{ljk i} = 0, \quad (62)$$

$$(-1)^{\epsilon_j \epsilon_l} R_{kl ij} + (-1)^{\epsilon_i \epsilon_j} R_{kj li} + (-1)^{\epsilon_i \epsilon_l} R_{kij l} = 0, \quad (63)$$

$$(-1)^{\epsilon_i \epsilon_k} R_{jkl i} + (-1)^{\epsilon_i \epsilon_l} R_{jik l} + (-1)^{\epsilon_l \epsilon_k} R_{jli k} = 0. \quad (64)$$

Теперь, умножая соотношение (61) на $(-1)^{\epsilon_i \epsilon_l + \epsilon_j \epsilon_l}$, а (63) – на $(-1)^{\epsilon_i \epsilon_k + \epsilon_j \epsilon_k}$ и суммируя полученные результаты, мы выводим тождество (60).

В силу (44) тождества Бианки (40) для симплектического тензора кривизны переписываются в виде

$$R_{nmjk;i}(-1)^{\epsilon_i \epsilon_j} + R_{nmij;k}(-1)^{\epsilon_i \epsilon_k} + R_{nmki;j}(-1)^{\epsilon_k \epsilon_j} \equiv 0. \quad (65)$$

5. ТЕНЗОР РИЧЧИ И СКАЛЯРНАЯ КРИВИЗНА

С учетом правил умножения тензорных полей на супермногообразиях (13) из симплектического тензора кривизны R_{ijkl} и тензорного поля ω^{ij} , обратного тензору симплектической структуры ω_{ij} , на основании свойств симметрии этих тензоров можно построить три следующих различных тензорных поля типа $(0, 2)$:

$$R_{ij} = \omega^{kn} R_{nkij} (-1)^{(\epsilon(\omega)+1)(\epsilon_k + \epsilon_n)} = R^k_{kij} (-1)^{\epsilon_k}, \quad (66)$$

$$K_{ij} = \omega^{kn} R_{nikj} (-1)^{\epsilon_i \epsilon_k + (\epsilon(\omega)+1)(\epsilon_k + \epsilon_n)} = R^k_{ikj} (-1)^{\epsilon_k(\epsilon_i + 1)}, \quad (67)$$

$$Q_{ij} = \omega^{kn} R_{ijnk} (-1)^{(\epsilon_i + \epsilon_j)(\epsilon_k + \epsilon_n) + (\epsilon(\omega)+1)(\epsilon_k + \epsilon_n)}, \quad (68)$$

где

$$\epsilon(R_{ij}) = \epsilon(K_{ij}) = \epsilon(Q_{ij}) = \epsilon_i + \epsilon_j.$$

Напомним, что тензор ω^{ij} удовлетворяет соотношениям

$$\omega^{ik} \omega_{kj} (-1)^{\epsilon_k + \epsilon(\omega)(\epsilon_i + \epsilon_k)} = \delta^i_j, \quad \omega_{ik} \omega^{kj} (-1)^{\epsilon_i \epsilon_j + \epsilon(\omega)(\epsilon_i + \epsilon_k + 1)} = \delta^j_i \quad (69)$$

и обладает свойством обобщенной симметрии

$$\omega^{ij} = -\omega^{ji} (-1)^{\epsilon_i \epsilon_j}. \quad (70)$$

Из определений (66), (68) и свойств симметрии R_{ijkl} и ω^{ij} немедленно следует, что для любой симплектической связности $R_{ij} = 0$ и $Q_{ij} = Q_{ji} (-1)^{\epsilon_i \epsilon_j}$.

Кроме того, для тензоров (67), (68) существует соотношение, которое следует из тождества (60). Действительно, умножая тождество (60) на знаковый фактор $(-1)^{(\epsilon(\omega)+1)(\epsilon_i + \epsilon_j)}$ и тензор ω^{ji} и суммируя по индексам i, j , мы получаем

$$Q_{ij} + (-1)^{\epsilon_i \epsilon_j} K_{ji} + K_{ij} = 0. \quad (71)$$

Второе независимое соотношение может быть выведено из (60) умножением на тензор ω^{ki} и на фактор $(-1)^{\epsilon_j \epsilon_k (\epsilon(\omega)+1)(\epsilon_i+\epsilon_k)}$. Тогда после соответствующего суммирования по индексам приходим к следующему результату:

$$K_{ij} - (-1)^{\epsilon_i \epsilon_j} K_{ji} = 0. \quad (72)$$

Из соотношений (71) и (72) можно сделать вывод, что для любой симплектической связности

$$K_{ij} = (-1)^{\epsilon_i \epsilon_j} K_{ji}, \quad Q_{ij} = -2K_{ij}. \quad (73)$$

Следовательно, тензорное поле K_{ij} следует рассматривать как единственный независимый тензор второго ранга, который можно построить из симплектического тензора кривизны. Тензор K_{ij} называется тензором Риччи.

Учитывая (15), из тензорных полей K_{ij} и ω^{ij} мы можем построить скаляр

$$K = \omega^{ji} K_{ij} (-1)^{\epsilon_i + \epsilon_j}, \quad (74)$$

который называется скалярной кривизной. Из свойств симметрии K_{ij} и ω^{ij} следует, что на любом супермногообразии Федосова имеет место соотношение

$$K = 0. \quad (75)$$

Следовательно, как и в случае обычных многообразий Федосова [2], для любой симплектической связности скалярная кривизна равна нулю.

6. АФФИННЫЕ РАСШИРЕНИЯ ТЕНЗОРОВ

Рассмотрим симплектическое супермногообразие (M, ω) , оснащенное симметричной аффинной связностью Γ , не обязательно сохраняющей ω . Пусть $p \in M$ – произвольная точка, в окрестности которой $\{x^i\}$ являются локальными координатами на M . Тогда геодезическая линия $x(t)$, проходящая через p , определяется уравнениями

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{dx^k}{dt} \frac{dx^j}{dt} = 0, \quad x(0) = p, \quad (76)$$

где t – натуральный параметр вдоль геодезической.

Координатная система называется геодезической в точке p , если $\Gamma^i_{jk}(p) = 0$. Это означает, что для любых геодезических координат $\{x'^j\}$ имеют место соотношения $x^i = x'^i + \phi^i(x')$, где функции $\phi^i(x')$ вместе со своими первыми двумя производными в точке p обращаются в нуль. Рассмотрим далее касательную к геодезической в точке p : $v^i = \frac{dx^i}{dt} \big|_{t=0} \in T_p M$, которая совместно с условием $x(0) = p$ однозначно определяет геодезическую кривую. Тогда в окрестности точки p координатная система $\{y^i = v^i t\}$ определяет специальный класс геодезических координат, называемых нормальными.

В нормальных координатах первое из уравнений (76) сводится к

$$\Gamma^i_{jk}(y) y^k y^j = 0, \quad (77)$$

где $\Gamma_{jk}^i(y)$ вычислены в точке p в терминах нормальных координат y^i . И обратно, для любой координатной системы $\{y^i\}$, удовлетворяющей (77), всякая геодезическая вследствие (76) удовлетворяет уравнению $d^2 y^i / dt^2 = 0$ и, следовательно, $y^i = v^i t$ при некоторых v^i . Заметим, что при произвольных преобразованиях координат $x^i \rightarrow x'^i$ соответствующие нормальные координаты претерпевают линейные однородные преобразования с постоянными коэффициентами a^i_j : $y'^i = a^i_j y^j$. В нормальных координатах многие геометрические свойства многообразий и супермногообразий могут быть установлены более просто, чем в произвольных координатах.

Нормальные координаты определяются связностью и не зависят от ω . Однако определяющие уравнения (77) могут быть переписаны в эквивалентной форме с помощью ω :

$$\Gamma_{ijk}(y)y^k y^j \equiv 0. \quad (78)$$

Из этого равенства и свойств симметрии Γ_{ijk} по индексам (j, k) следует, что

$$\Gamma_{ijk}(0) = 0. \quad (79)$$

В нормальных координатах существуют дополнительные соотношения в точке p , содержащие частные производные Γ_{ijk} . Действительно, рассмотрим разложение в ряд Тейлора для $\Gamma_{ijk}(y)$ в точке $y = 0$:

$$\Gamma_{ijk}(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} A_{ijkj_1 \dots j_n} y^{j_n} \dots y^{j_1}, \quad (80)$$

где коэффициент

$$A_{ijkj_1 \dots j_n} = A_{ijkj_1 \dots j_n}(p) = \left. \frac{\partial_r^n \Gamma_{ijk}}{\partial y^{j_1} \dots \partial y^{j_n}} \right|_{y=0} \quad (81)$$

носит название аффинного расширения Γ_{ijk} порядка $n = 1, 2, \dots$. Свойства симметрии $A_{ijkj_1 \dots j_n}$ очевидны и следуют из определения, а именно, имеет место обобщенная симметрия по индексам (jk) , а также по набору индексов $(j_1 \dots j_n)$. Набор всех аффинных расширений Γ_{ijk} определяет единственным образом симметричную связность согласно формуле (80). В терминах $A_{ijkj_1 \dots j_n}$ определяющее свойство (78) может быть представлено следующей последовательностью тождеств [11]: для $n = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} & A_{ijl i_1 \dots i_n} + \sum_{k=1}^n A_{ijl i_k l i_1 \dots i_{k-1} i_{k+1} \dots i_n} (-1)^{\epsilon_{i_k} (\epsilon_l + \epsilon_{i_1} + \dots + \epsilon_{i_{k-1}})} + \\ & + \sum_{k=1}^n A_{il i_k j i_1 \dots i_{k-1} i_{k+1} \dots i_n} (-1)^{\epsilon_j (\epsilon_l + \epsilon_{i_k}) + \epsilon_{i_k} (\epsilon_l + \epsilon_{i_1} + \dots + \epsilon_{i_{k-1}})} + \\ & + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{m=k+1}^n A_{ii_k i_m j l i_1 \dots i_{k-1} i_{k+1} \dots i_{m-1} i_{m+1} \dots i_n} \times \\ & \times (-1)^{(\epsilon_{i_k} + \epsilon_{i_m}) (\epsilon_j + \epsilon_l + \epsilon_{i_1} + \dots + \epsilon_{i_{k-1}}) + \epsilon_{i_m} (\epsilon_{i_{k+1}} + \dots + \epsilon_{i_{m+1}})} = 0. \end{aligned} \quad (82)$$

Для заданного n эти тождества содержат $P = 1 + 2n + n(n-1)/2 = (n+2)(n+1)/2$ членов. В частности, для $n = 1$

$$A_{ijkl} + A_{ijlk}(-1)^{\epsilon_k \epsilon_l} + A_{iklj}(-1)^{\epsilon_j(\epsilon_l + \epsilon_k)} = 0, \quad (83)$$

для $n = 2$

$$A_{ijklm} + A_{ijlkm}(-1)^{\epsilon_k \epsilon_l} + A_{ikljm}(-1)^{\epsilon_j(\epsilon_l + \epsilon_k)} + A_{ijmkl}(-1)^{\epsilon_m(\epsilon_l + \epsilon_k)} + \\ + A_{ilmjk}(-1)^{(\epsilon_j + \epsilon_k)(\epsilon_m + \epsilon_l)} + A_{ikmj l}(-1)^{\epsilon_j(\epsilon_m + \epsilon_k) + \epsilon_m \epsilon_l} = 0 \quad (84)$$

и для $n = 3$

$$A_{ijklmn} + A_{ijlkmn}(-1)^{\epsilon_k \epsilon_l} + A_{ikljmn}(-1)^{\epsilon_j(\epsilon_l + \epsilon_k)} + A_{ijmkl n}(-1)^{\epsilon_m(\epsilon_l + \epsilon_k)} + \\ + A_{ilmjkn}(-1)^{(\epsilon_j + \epsilon_k)(\epsilon_m + \epsilon_l)} + A_{ikmjln}(-1)^{\epsilon_j(\epsilon_m + \epsilon_k) + \epsilon_m \epsilon_l} + \\ + A_{ijnklm}(-1)^{\epsilon_n(\epsilon_l + \epsilon_k + \epsilon_m)} + A_{iknjl m}(-1)^{\epsilon_j(\epsilon_n + \epsilon_k) + \epsilon_n(\epsilon_l + \epsilon_m)} + \\ + A_{iln jkm}(-1)^{(\epsilon_j + \epsilon_k)(\epsilon_n + \epsilon_l) + \epsilon_m \epsilon_n} + A_{imn jkl}(-1)^{(\epsilon_j + \epsilon_k + \epsilon_l)(\epsilon_m + \epsilon_n)} = 0. \quad (85)$$

Аффинные расширения произвольного тензора $T = (T^{i_1 \dots i_k}_{m_1 \dots m_l})$ на M определяются аналогично как тензоры на M , компоненты которых в точке $p \in M$ в локальных координатах $\{x^i\}$ задаются формулой

$$T^{i_1 \dots i_k}_{m_1 \dots m_l, j_1 \dots j_n} \equiv T^{i_1 \dots i_k}_{m_1 \dots m_l, j_1 \dots j_n}(0) = \left. \frac{\partial_r^n T^{i_1 \dots i_k}_{m_1 \dots m_l}}{\partial y^{j_1} \dots \partial y^{j_n}} \right|_{y=0}, \quad (86)$$

где $\{y^i\}$ являются нормальными координатами, ассоциированными с $\{x^i\}$, в точке p . Аффинное расширение первого порядка для любого тензора совпадает с его ковариантной производной в силу равенства $\Gamma^i_{jk}(0) = 0$, имеющего место в нормальных координатах.

Далее любое соотношение, содержащее аффинные расширения, следует понимать как соотношение, имеющее место в окрестности U произвольной точки $p \in M$, причем порядок соотношения определяется старшим порядком аффинного расширения симплектической связности. Будем придерживаться также соглашения, что если соотношение справедливо в произвольной системе координат, то аргументы величин, входящих в него, будут опускаться.

7. СООТНОШЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

В силу (58) для аффинных расширений ω_{ij} и Γ_{ijk} должны существовать определенные соотношения. Чтобы их вывести, рассмотрим разложение ω_{ij} в ряд Тейлора в нормальных координатах $(y^1, \dots, y^{2N})$ в точке $p \in M$:

$$\omega_{ij}(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \omega_{ij, j_1 \dots j_n}(0) y^{j_n} \dots y^{j_1}. \quad (87)$$

Используя свойства симметрии $\omega_{ij, j_1 \dots j_n}(0)$, мы без труда получим следующее разложение в ряд Тейлора для $\omega_{ij, k}$:

$$\omega_{ij, k}(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \omega_{ij, k j_1 \dots j_n}(0) y^{j_n} \dots y^{j_1}. \quad (88)$$

Далее, учитывая (58) и сравнивая (80) и (88), мы получим последовательность соотношений между аффинными расширениями тензора симплектической структуры ω_{ij} и симплектической связности Γ_{ijk} :

$$\omega_{ij,kj_1\dots j_n}(0) = A_{ijkj_1\dots j_n} - A_{jikj_1\dots j_n}(-1)^{\epsilon_i\epsilon_j}. \quad (89)$$

7.1. Соотношения первого порядка. В низшем (первом) порядке из (89) мы получаем

$$\omega_{ij,kl}(0) = A_{ijkl} - A_{jikl}(-1)^{\epsilon_i\epsilon_j}. \quad (90)$$

Рассмотрим теперь тензор кривизны R_{ijkl} (37) в точке $p \in M$ в нормальных координатах. Тогда в силу $\Gamma_{ijk}(p) = 0$ мы имеем следующее представление R_{ijkl} в терминах аффинного расширения первого порядка симплектической связности:

$$R_{ijkl}(0) = -A_{ijkl} + A_{ijlk}(-1)^{\epsilon_k\epsilon_l}. \quad (91)$$

В силу (90), (91) и (83) следует ожидать, что существует соотношение между тензором кривизны и аффинным расширением второго порядка тензора симплектической структуры. Действительно, во-первых, мы получаем формулу

$$\begin{aligned} R_{iklj}(0) &= A_{ikjl}(-1)^{\epsilon_l\epsilon_j} - A_{iklj} = A_{ijkl}(-1)^{(\epsilon_l+\epsilon_k)\epsilon_j} - A_{iklj} = \\ &= A_{ijkl}(-1)^{(\epsilon_l+\epsilon_k)\epsilon_j} + A_{ikjl}(-1)^{\epsilon_l\epsilon_j} + A_{iljk}(-1)^{(\epsilon_l+\epsilon_j)\epsilon_k} = \\ &= 2A_{ijkl}(-1)^{(\epsilon_l+\epsilon_k)\epsilon_j} + A_{iljk}(-1)^{(\epsilon_l+\epsilon_j)\epsilon_k} = \\ &= 2A_{ijkl}(-1)^{(\epsilon_l+\epsilon_k)\epsilon_j} + A_{ijlk}(-1)^{(\epsilon_l+\epsilon_j)\epsilon_k+\epsilon_j\epsilon_l} = \\ &= 2A_{ijkl}(-1)^{(\epsilon_l+\epsilon_k)\epsilon_j} + [R_{ijkl}(0) + A_{ijkl}](-1)^{(\epsilon_l+\epsilon_k)\epsilon_j} = \\ &= 3A_{ijkl}(-1)^{(\epsilon_l+\epsilon_k)\epsilon_j} + R_{ijkl}(0)(-1)^{(\epsilon_l+\epsilon_k)\epsilon_j}, \end{aligned} \quad (92)$$

с помощью которой можно выразить аффинное расширение первого порядка симплектической связности через тензор кривизны:

$$A_{ijkl} \equiv \Gamma_{ijk,l}(0) = -\frac{1}{3}[R_{ijkl}(0) + R_{ikjl}(0)(-1)^{\epsilon_k\epsilon_j}]. \quad (93)$$

При получении этого равенства были учтены свойства симметрии (55) тензора кривизны. Во-вторых, используя (90) и (93), мы находим, что

$$\begin{aligned} \omega_{ij,kl}(0) &= A_{ijkl} - A_{jikl}(-1)^{\epsilon_i\epsilon_j} = -\frac{1}{3}[(R_{ijkl}(0) + R_{ikjl}(0)(-1)^{\epsilon_k\epsilon_j}) - \\ &\quad - (R_{jikl}(0)(-1)^{\epsilon_i\epsilon_j} + R_{jkil}(0)(-1)^{\epsilon_i(\epsilon_j+\epsilon_k)})] = \\ &= -\frac{1}{3}[R_{ikjl}(0)(-1)^{\epsilon_k\epsilon_j} - R_{jkil}(0)(-1)^{\epsilon_i(\epsilon_j+\epsilon_k)}] = \\ &= -\frac{1}{3}[R_{kilj}(0)(-1)^{\epsilon_i\epsilon_j} + R_{kjil}(0)(-1)^{\epsilon_l\epsilon_j}](-1)^{(\epsilon_i+\epsilon_j)\epsilon_k+(\epsilon_i+\epsilon_l)\epsilon_j}, \end{aligned}$$

откуда с учетом тождества Якоби (56) следует искомое соотношение:

$$\omega_{ij,kl}(0) = \frac{1}{3}R_{klij}(0)(-1)^{(\epsilon_i+\epsilon_j)(\epsilon_k+\epsilon_l)}. \quad (94)$$

Нетрудно убедиться, что свойства симметрии правой и левой частей (94) согласованы с симметриями $\omega_{ij,kl}$ и R_{ijkl} .

7.2. Соотношения второго порядка. Во втором порядке из (89) следует равенство

$$\omega_{ij,klm}(0) = A_{ijklm} - A_{jiklm}(-1)^{\epsilon_i \epsilon_j}. \quad (95)$$

В свою очередь, переписывая R_{ijkl} в терминах Γ_{ijk} и их первых производных,

$$\begin{aligned} R_{ijkl} = & -\Gamma_{ijk,l} + \Gamma_{ijl,k}(-1)^{\epsilon_k \epsilon_l} + \\ & + (\Gamma_{ikr}\omega^{rs}\Gamma_{sjl}(-1)^{\epsilon_j \epsilon_k} - \Gamma_{ilr}\omega^{rs}\Gamma_{sjk}(-1)^{\epsilon_l(\epsilon_j + \epsilon_k)})(-1)^{\epsilon_r + \epsilon(\omega)(\epsilon_r + \epsilon_s)} - \\ & - (\omega_{ir}\omega^{rs}{}_{,l}\Gamma_{sjk}(-1)^{\epsilon_l(\epsilon_j + \epsilon_k + \epsilon_s)} - \omega_{ir}\omega^{rs}{}_{,j}\Gamma_{sjl}(-1)^{\epsilon_k(\epsilon_j + \epsilon_s)})(-1)^{\epsilon_s + \epsilon(\omega)(\epsilon_r + \epsilon_s)}, \end{aligned} \quad (96)$$

дифференцируя правые и левые части по y^m и вычисляя предел при $y \rightarrow 0$ с учетом соотношений $\Gamma_{ijk}(0) = 0$ и $\omega_{ij,k}(0) = 0$, мы получим

$$R_{ijkl,m}(0) = -A_{ijklm} + A_{ijlkm}(-1)^{\epsilon_l \epsilon_k}. \quad (97)$$

С учетом (84) это соотношение позволяет выразить аффинные расширения симплектической связности второго порядка в терминах аффинных расширений первого порядка тензора кривизны. Действительно,

$$\begin{aligned} A_{ijlkm}(-1)^{\epsilon_l \epsilon_k} &= R_{ijkl,m}(0) + A_{ijklm}, \\ A_{ijmkl}(-1)^{\epsilon_m \epsilon_k} &= R_{ijkm,l}(0) + A_{ijkml} = R_{ijkm,l}(0) + A_{ijklm}(-1)^{\epsilon_l \epsilon_m}, \\ A_{ikljm}(-1)^{\epsilon_j \epsilon_l} &= R_{ikjl,m}(0) + A_{ikjlm} = R_{ikjl,m}(0) + A_{ijklm}(-1)^{\epsilon_j \epsilon_k}, \\ A_{ikmjl}(-1)^{\epsilon_j \epsilon_m} &= R_{ikjm,l}(0) + A_{ikjml} = R_{ikjm,l}(0) + A_{ijklm}(-1)^{\epsilon_j \epsilon_k + \epsilon_m \epsilon_l}, \\ A_{ilmjk}(-1)^{\epsilon_j \epsilon_m} &= R_{iljm,k}(0) + A_{iljmk} = R_{iljm,k}(0) + A_{ijlkm}(-1)^{\epsilon_j \epsilon_l + \epsilon_m \epsilon_k} = \\ &= R_{iljm,k}(0) + R_{ijkl,m}(0)(-1)^{\epsilon_j \epsilon_l + \epsilon_m \epsilon_k + \epsilon_l \epsilon_k} + A_{ijklm}(-1)^{\epsilon_j \epsilon_l + \epsilon_m \epsilon_k + \epsilon_l \epsilon_k}. \end{aligned}$$

Подставляя затем эти соотношения в тождество (84), мы имеем

$$\begin{aligned} 6A_{ijklm} + 2R_{ijkl,m}(0) + R_{ijkm,l}(0)(-1)^{\epsilon_m \epsilon_l} + R_{ikjl,m}(0)(-1)^{\epsilon_j \epsilon_k} + \\ + R_{ikjm,l}(0)(-1)^{\epsilon_j \epsilon_k + \epsilon_m \epsilon_l} + R_{iljm,k}(0)(-1)^{\epsilon_j \epsilon_l + \epsilon_k(\epsilon_m + \epsilon_l)} = 0 \end{aligned} \quad (98)$$

и, следовательно, находим искомое соотношение:

$$\begin{aligned} A_{ijklm} = & -\frac{1}{6} [2R_{ijkl,m}(0) + R_{ijkm,l}(0)(-1)^{\epsilon_m \epsilon_l} + R_{ikjl,m}(0)(-1)^{\epsilon_j \epsilon_k} + \\ & + R_{ikjm,l}(0)(-1)^{\epsilon_j \epsilon_k + \epsilon_m \epsilon_l} + R_{iljm,k}(0)(-1)^{\epsilon_j \epsilon_l + \epsilon_k(\epsilon_m + \epsilon_l)}]. \end{aligned} \quad (99)$$

В свою очередь из (89) следует, что

$$\omega_{ik,jlm}(0) = A_{ikjlm} - A_{kijlm}(-1)^{\epsilon_i \epsilon_k}, \quad (100)$$

и мы немедленно находим представление аффинных расширений третьего порядка тензора симплектической структуры в терминах аффинных расширений первого порядка симплектического тензора кривизны:

$$\begin{aligned} \omega_{ij,klm}(0) = & -\frac{1}{6} [R_{ikjl,m}(0)(-1)^{\epsilon_j \epsilon_k} + R_{ikjm,l}(0)(-1)^{\epsilon_j \epsilon_k + \epsilon_m \epsilon_l} + \\ & + R_{iljm,k}(0)(-1)^{\epsilon_j \epsilon_l + \epsilon_k(\epsilon_l + \epsilon_m)} - R_{jkim,l}(0)(-1)^{\epsilon_i(\epsilon_k + \epsilon_j)} - \\ & - R_{jkim,l}(0)(-1)^{\epsilon_m \epsilon_l + \epsilon_i(\epsilon_j + \epsilon_k)} - R_{jlim,k}(0)(-1)^{\epsilon_k(\epsilon_m + \epsilon_l) + \epsilon_i(\epsilon_j + \epsilon_l)}]. \end{aligned} \quad (101)$$

Рассмотрим следствия, которые вытекают из свойств симметрии $\omega_{ik,jlm}$,

$$\omega_{ik,jlm} = \omega_{ik,ljm}(-1)^{\epsilon_l \epsilon_j}, \quad (102)$$

а также из того, что мы можем выразить A_{ijklm} в терминах первых производных симплектического тензора кривизны. Имеем

$$\begin{aligned} 0 &= \omega_{ik,jlm} - \omega_{ik,ljm}(-1)^{\epsilon_l \epsilon_j} = \\ &= A_{ikjlm} - A_{kijlm}(-1)^{\epsilon_i \epsilon_k} - (-1)^{\epsilon_l \epsilon_j} (A_{ikljm} - A_{kiljm}(-1)^{\epsilon_i \epsilon_k}) = \\ &= A_{ijklm}(-1)^{\epsilon_j \epsilon_k} - A_{kjilm}(-1)^{\epsilon_i(\epsilon_k + \epsilon_j)} - \\ &\quad - A_{ilkjm}(-1)^{\epsilon_l(\epsilon_k + \epsilon_j)} + A_{klijm}(-1)^{\epsilon_i \epsilon_k + \epsilon_l(\epsilon_i + \epsilon_j)}. \end{aligned} \quad (103)$$

Далее, используя (100) и свойства симметрии тензора кривизны, последнее соотношение мы можем переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} 0 &= 2R_{ijkl,m}(0)(-1)^{\epsilon_j \epsilon_k} - 2R_{kijl,m}(0)(-1)^{\epsilon_i(\epsilon_j + \epsilon_k)} - 2R_{ilkj,m}(0)(-1)^{\epsilon_l(\epsilon_j + \epsilon_k)} + \\ &\quad + 2R_{klij,m}(0)(-1)^{\epsilon_i(\epsilon_l + \epsilon_k) + \epsilon_l \epsilon_j} + R_{ijkml}(0)(-1)^{\epsilon_k \epsilon_j + \epsilon_m \epsilon_l} - \\ &\quad - R_{kijml}(0)(-1)^{\epsilon_i(\epsilon_k + \epsilon_j) + \epsilon_m \epsilon_l} - R_{ilkm,j}(0)(-1)^{\epsilon_j(\epsilon_m + \epsilon_l) + \epsilon_k \epsilon_l} + \\ &\quad + R_{klim,j}(0)(-1)^{\epsilon_j(\epsilon_m + \epsilon_l) + \epsilon_i(\epsilon_k + \epsilon_l)} + R_{iljm,k}(0)(-1)^{\epsilon_j(\epsilon_k + \epsilon_l) + \epsilon_k(\epsilon_m + \epsilon_l)} - \\ &\quad - R_{kljm,i}(0)(-1)^{\epsilon_j(\epsilon_i + \epsilon_l) + \epsilon_i(\epsilon_k + \epsilon_l + \epsilon_m)} - R_{ijlm,k}(0)(-1)^{\epsilon_k(\epsilon_j + \epsilon_m + \epsilon_k)} + \\ &\quad + R_{kijlm,i}(0)(-1)^{\epsilon_i(\epsilon_j + \epsilon_m + \epsilon_k + \epsilon_l)}. \end{aligned} \quad (104)$$

Благодаря тождествам (60) первые четыре члена в (104) исчезают:

$$\begin{aligned} R_{ijkl,m}(-1)^{\epsilon_j \epsilon_k} - R_{kijl,m}(-1)^{\epsilon_i(\epsilon_j + \epsilon_k)} - R_{ilkj,m}(-1)^{\epsilon_l(\epsilon_j + \epsilon_k)} + \\ + R_{klij,m}(-1)^{\epsilon_i(\epsilon_l + \epsilon_k) + \epsilon_l \epsilon_j} = (-1)^{\epsilon_i \epsilon_l + \epsilon_j \epsilon_k} [R_{ijkl}(-1)^{\epsilon_i \epsilon_l} + R_{jkli}(-1)^{\epsilon_i(\epsilon_j + \epsilon_k)} + \\ + R_{lijl}(-1)^{\epsilon_l(\epsilon_j + \epsilon_k)} + R_{klij}(-1)^{\epsilon_j(\epsilon_k + \epsilon_l) + \epsilon_i \epsilon_k}]_{,m} = 0. \end{aligned}$$

Равенство (104), содержащее оставшиеся члены, может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} [R_{jikm,l}(0)(-1)^{\epsilon_m \epsilon_i} + R_{jkim,l}(0)(-1)^{\epsilon_i \epsilon_k}](-1)^{\epsilon_j(\epsilon_i + \epsilon_k) + \epsilon_m(\epsilon_i + \epsilon_l)} + \\ + [R_{limk,j}(0)(-1)^{\epsilon_i \epsilon_k} + R_{lkim,j}(0)(-1)^{\epsilon_k \epsilon_m}](-1)^{\epsilon_i(\epsilon_k + \epsilon_l) + \epsilon_j(\epsilon_m + \epsilon_l) + \epsilon_k(\epsilon_i + \epsilon_l)} + \\ + [R_{iljm,k}(0)(-1)^{\epsilon_m \epsilon_l} + R_{ijml,k}(0)(-1)^{\epsilon_j \epsilon_l}](-1)^{\epsilon_l(\epsilon_k + \epsilon_j) + \epsilon_k(\epsilon_m + \epsilon_j) + \epsilon_m \epsilon_l} + \\ + [R_{klmj,i}(0)(-1)^{\epsilon_l \epsilon_j} + R_{kijlm,i}(0)(-1)^{\epsilon_j \epsilon_m}](-1)^{\epsilon_i(\epsilon_l + \epsilon_m) + \epsilon_i(\epsilon_k + \epsilon_j) + \epsilon_m \epsilon_j} = 0. \end{aligned} \quad (105)$$

Учитывая тождество Якоби (56), это соотношение мы можем переписать как

$$\begin{aligned} 0 &= R_{jmik,l}(0)(-1)^{\epsilon_m \epsilon_k + \epsilon_j(\epsilon_i + \epsilon_k) + \epsilon_m(\epsilon_i + \epsilon_l)} + R_{lmki,j}(0)(-1)^{\epsilon_i \epsilon_m + \epsilon_l(\epsilon_i + \epsilon_k) + \epsilon_j(\epsilon_m + \epsilon_l)} + \\ &\quad + R_{imlj,k}(0)(-1)^{\epsilon_m \epsilon_j + \epsilon_l(\epsilon_k + \epsilon_j + \epsilon_m) + \epsilon_k(\epsilon_m + \epsilon_j)} + \\ &\quad + R_{kmjl,i}(0)(-1)^{\epsilon_l \epsilon_m + \epsilon_i(\epsilon_l + \epsilon_m) + \epsilon_i(\epsilon_k + \epsilon_j) + \epsilon_m \epsilon_j}. \end{aligned} \quad (106)$$

Окончательно получаем следующие тождества для аффинных расширений первого порядка симплектического тензора кривизны:

$$\begin{aligned} R_{mjik,l}(0)(-1)^{\epsilon_j(\epsilon_i + \epsilon_k)} - R_{mijl,k}(0)(-1)^{\epsilon_k(\epsilon_l + \epsilon_j)} + \\ + R_{mkjl,i}(0)(-1)^{\epsilon_i(\epsilon_j + \epsilon_k + \epsilon_l)} - R_{mlik,j}(0)(-1)^{\epsilon_l(\epsilon_i + \epsilon_j + \epsilon_k)} = 0. \end{aligned} \quad (107)$$

В произвольных локальных координатах (x) частные производные нужно заменить на ковариантные, и эти тождества, очевидно, принимают вид

$$R_{mjik;l}(-1)^{\epsilon_j(\epsilon_i+\epsilon_k)} - R_{mijl;k}(-1)^{\epsilon_k(\epsilon_l+\epsilon_j)} + \\ + R_{mkjl;i}(-1)^{\epsilon_i(\epsilon_j+\epsilon_k+\epsilon_l)} - R_{mlik;j}(-1)^{\epsilon_l(\epsilon_i+\epsilon_j+\epsilon_k)} = 0. \quad (108)$$

7.3. Соотношения третьего порядка. Начиная с соотношений третьего порядка, мы сталкиваемся с новой особенностью в представлении аффинных расширений симплектического тензора кривизны и тензора симплектической структуры в терминах аффинных расширений симплектической связности. Эта особенность связана с нелинейной зависимостью аффинных расширений симплектической связности от тензора кривизны, что отличает данный случай от соотношений первого и второго порядков. Действительно, из (96) нетрудно вывести следующее представление для аффинного расширения второго порядка симплектического тензора кривизны:

$$R_{ijkl,mn}(0) = -A_{ijklmn} + A_{ijlkmn}(-1)^{\epsilon_k\epsilon_l} + N_{ijklmn}, \quad (109)$$

где величины

$$N_{ijklmn} = T_{ijklmn} + T_{ijklnm}(-1)^{\epsilon_n\epsilon_m} - T_{ijlkmn}(-1)^{\epsilon_k\epsilon_l} - T_{ijlknm}(-1)^{\epsilon_k\epsilon_l+\epsilon_n\epsilon_m}, \quad (110)$$

$$T_{ijklmn} = A_{sikm}A^s_{jln}(-1)^{\epsilon_s\epsilon_i+\epsilon_k(\epsilon_s+\epsilon_j)+\epsilon_m(\epsilon_l+\epsilon_j+\epsilon_s)} \quad (111)$$

являются квадратичными по аффинным расширениям первого порядка симплектической связности. В (110) мы использовали обозначение

$$A^i_{jkl} = \omega^{ip}A_{pjkl}(-1)^{\epsilon_p+\epsilon(\omega)(\epsilon_p+\epsilon_i)} = -\frac{1}{3}[R^i_{jkl}(0) + R^i_{kjl}(0)(-1)^{\epsilon_k\epsilon_j}]. \quad (112)$$

Из (111) можно вывести следующие свойства симметрии:

$$T_{ijklmn} = T_{ilkjmn}(-1)^{\epsilon_l(\epsilon_k+\epsilon_j)+\epsilon_j\epsilon_k}, \quad (113)$$

$$T_{ijklmn} = T_{kijlmn}(-1)^{\epsilon_k(\epsilon_i+\epsilon_j)+\epsilon_i\epsilon_j}, \quad (114)$$

$$T_{ijklmn} = -T_{jilknm}(-1)^{\epsilon_i\epsilon_j+\epsilon_k\epsilon_l+\epsilon_m\epsilon_n}. \quad (115)$$

С учетом свойств симметрии A_{ijklmn} из (109) мы получаем соотношения

$$\begin{aligned} A_{ijklmn}(-1)^{\epsilon_k\epsilon_l} &= R_{ijkl,mn}(0) + A_{ijklmn} - N_{ijklmn}, \\ A_{ijmkl n}(-1)^{\epsilon_k\epsilon_m} &= R_{ijkm,ln}(0) + A_{ijkmnl} - N_{ijkmnl} = \\ &= R_{ijkm,ln}(0) + A_{ijklmn}(-1)^{\epsilon_m\epsilon_l} - N_{ijkmnl}, \\ A_{ijnklm}(-1)^{\epsilon_k\epsilon_n} &= R_{ijkn,lm}(0) + A_{ijnklm} - N_{ijnklm} = \\ &= R_{ijkn,lm}(0) + A_{ijklmn}(-1)^{\epsilon_l\epsilon_n+\epsilon_m\epsilon_n} - N_{ijnklm}, \\ A_{ikljmn}(-1)^{\epsilon_l\epsilon_j} &= R_{ikjl,mn}(0) + A_{ikljmn} - N_{ikljmn} = \\ &= R_{ikjl,mn}(0) + A_{ijklmn}(-1)^{\epsilon_j\epsilon_k} - N_{ikljmn}, \\ A_{ikmjln}(-1)^{\epsilon_m\epsilon_j} &= R_{ikjm,ln}(0) + A_{ikmjln} - N_{ikmjln} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= R_{ikjm,ln}(0) + A_{ijklmn}(-1)^{\epsilon_k \epsilon_j + \epsilon_m \epsilon_l} - N_{ikjmln}, \\
A_{iknjl m}(-1)^{\epsilon_j \epsilon_n} &= R_{ikjn,lm}(0) + A_{ikjn l m} - N_{ikjn l m} = \\
&= R_{ikjn,lm}(0) + A_{ijklmn}(-1)^{\epsilon_j \epsilon_k + \epsilon_n(\epsilon_m + \epsilon_l)} - N_{ikjn l m}, \\
A_{ilmjkn}(-1)^{\epsilon_j \epsilon_m} &= R_{iljm,kn}(0) + A_{iljmkn} - N_{iljmkn} = \\
&= R_{iljm,kn}(0) + A_{ijlkmn}(-1)^{\epsilon_j \epsilon_l + \epsilon_k \epsilon_m} - N_{iljmkn} = \\
&= R_{iljm,kn}(0) + (R_{ijkl,mn} + A_{ijklmn} - N_{ijklmn}) \times \\
&\quad \times (-1)^{\epsilon_j \epsilon_l + \epsilon_k \epsilon_l + \epsilon_k \epsilon_m} - N_{iljmkn}, \\
A_{ilnjk m}(-1)^{\epsilon_j \epsilon_n} &= R_{iljn,km}(0) + A_{iljnkm} - N_{iljnkm} = \\
&= R_{iljn,km}(0) + A_{ijlkmn}(-1)^{\epsilon_j \epsilon_l + \epsilon_k \epsilon_n + \epsilon_m \epsilon_n} - N_{iljnkm} = \\
&= R_{iljn,km}(0) + (R_{ijkl,mn} + A_{ijklmn} - N_{ijklmn}) \times \\
&\quad \times (-1)^{\epsilon_j \epsilon_l + \epsilon_k \epsilon_l + \epsilon_k \epsilon_n + \epsilon_m \epsilon_n} - N_{iljnkm}, \\
A_{imnjkl}(-1)^{\epsilon_j \epsilon_n} &= R_{imjn,kl}(0) + A_{imjnkl} - N_{imjnkl} = \\
&= R_{imjn,kl}(0) + A_{ijmkn l}(-1)^{\epsilon_j \epsilon_m + \epsilon_k \epsilon_n} - N_{imjnkl} = \\
&= R_{iljn,km}(0) + (R_{ijkl,mn} + A_{ijklmn} - N_{ijklmn}) \times \\
&\quad \times (-1)^{\epsilon_j \epsilon_m + \epsilon_k \epsilon_m + \epsilon_k \epsilon_n} - N_{imjnkl}.
\end{aligned}$$

Подставляя затем их в тождество (85), мы выводим равенство

$$\begin{aligned}
&10A_{ijklmn} + 3R_{ijkl,mn} + 2R_{ijkm,ln}(-1)^{\epsilon_m \epsilon_l} + R_{ikjl,mn}(-1)^{\epsilon_j \epsilon_k} + \\
&\quad + R_{ijkn,lm}(-1)^{\epsilon_n(\epsilon_m + \epsilon_l)} + R_{ikjn,lm}(-1)^{\epsilon_j \epsilon_k + \epsilon_n(\epsilon_m + \epsilon_l)} + \\
&\quad + R_{ikjm,ln}(-1)^{\epsilon_j \epsilon_k + \epsilon_m \epsilon_l} + R_{iljm,kn}(-1)^{\epsilon_j \epsilon_l + \epsilon_k \epsilon_l + \epsilon_m \epsilon_k} + \\
&\quad + R_{iljn,km}(-1)^{\epsilon_l(\epsilon_k + \epsilon_j) + \epsilon_n(\epsilon_k + \epsilon_m)} + R_{imjn,kl}(-1)^{\epsilon_j \epsilon_m + (\epsilon_l + \epsilon_k)(\epsilon_n + \epsilon_m)} - \\
&\quad - 3N_{ijklmn} - N_{ijkmln}(-1)^{\epsilon_m \epsilon_l} - N_{ijknlm}(-1)^{\epsilon_n(\epsilon_m + \epsilon_l)} - N_{ikjlmn}(-1)^{\epsilon_j \epsilon_k} - \\
&\quad - N_{ikjmln}(-1)^{\epsilon_j \epsilon_k + \epsilon_m \epsilon_l} - N_{ikjn l m}(-1)^{\epsilon_j \epsilon_k + \epsilon_n(\epsilon_m + \epsilon_l)} - \\
&\quad - N_{iljmkn}(-1)^{\epsilon_j \epsilon_l + \epsilon_k \epsilon_l + \epsilon_m \epsilon_k} - N_{iljnkm}(-1)^{\epsilon_l(\epsilon_k + \epsilon_j) + \epsilon_n(\epsilon_k + \epsilon_m)} - \\
&\quad - N_{ijkmnl}(-1)^{\epsilon_l(\epsilon_m + \epsilon_n)} - N_{imjnkl}(-1)^{\epsilon_j \epsilon_m + (\epsilon_l + \epsilon_k)(\epsilon_n + \epsilon_m)} = 0.
\end{aligned}$$

Следовательно, у нас есть нелинейное представление аффинных расширений третьего порядка симплектической связности в терминах симплектического тензора кривизны и его производных до второго порядка:

$$\begin{aligned}
A_{ijklmn} &= -\frac{1}{10} [3R_{ijkl,mn} + 2R_{ijkm,ln}(-1)^{\epsilon_m \epsilon_l} + R_{ikjl,mn}(-1)^{\epsilon_j \epsilon_k} + \\
&\quad + R_{ijkn,lm}(-1)^{\epsilon_n(\epsilon_m + \epsilon_l)} + R_{ikjn,lm}(-1)^{\epsilon_j \epsilon_k + \epsilon_n(\epsilon_m + \epsilon_l)} + \\
&\quad + R_{ikjm,ln}(-1)^{\epsilon_j \epsilon_k + \epsilon_m \epsilon_l} + R_{iljm,kn}(-1)^{\epsilon_j \epsilon_l + \epsilon_k \epsilon_l + \epsilon_m \epsilon_k} + \\
&\quad + R_{iljn,km}(-1)^{\epsilon_l(\epsilon_k + \epsilon_j) + \epsilon_n(\epsilon_k + \epsilon_m)} + R_{imjn,kl}(-1)^{\epsilon_j \epsilon_m + (\epsilon_l + \epsilon_k)(\epsilon_n + \epsilon_m)} - \\
&\quad - 3N_{ijklmn} - N_{ijkmln}(-1)^{\epsilon_m \epsilon_l} - N_{ijknlm}(-1)^{\epsilon_n(\epsilon_m + \epsilon_l)} - \\
&\quad - N_{ikjlmn}(-1)^{\epsilon_j \epsilon_k} - N_{ikjmln}(-1)^{\epsilon_j \epsilon_k + \epsilon_m \epsilon_l} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - N_{ikjnlm}(-1)^{\epsilon_j \epsilon_k + \epsilon_n(\epsilon_m + \epsilon_l)} - N_{iljmk n}(-1)^{\epsilon_j \epsilon_l + \epsilon_k \epsilon_l + \epsilon_m \epsilon_k} - \\
& - N_{iljnk m}(-1)^{\epsilon_l(\epsilon_k + \epsilon_j) + \epsilon_n(\epsilon_k + \epsilon_m)} - N_{ijk mnl}(-1)^{\epsilon_l(\epsilon_m + \epsilon_n)} - \\
& - N_{imj nkl}(-1)^{\epsilon_j \epsilon_m + (\epsilon_l + \epsilon_k)(\epsilon_n + \epsilon_m)}]. \quad (116)
\end{aligned}$$

Учитывая соотношение между аффинными расширениями тензора симплектической структуры и симплектической связности,

$$\omega_{ij,klmn} = A_{ijklmn} - A_{jiklmn}(-1)^{\epsilon_i \epsilon_j},$$

мы выводим следующую формулу для аффинных расширений четвертого порядка тензора симплектической структуры в терминах симплектического тензора кривизны и его производных:

$$\begin{aligned}
\omega_{ij,klmn} = & -\frac{1}{10} [R_{ikjl,mn}(-1)^{\epsilon_j \epsilon_k} - R_{jkil,mn}(-1)^{\epsilon_i(\epsilon_k + \epsilon_j)} + \\
& + R_{imjn,kl}(-1)^{\epsilon_j \epsilon_m + (\epsilon_l + \epsilon_k)(\epsilon_n + \epsilon_m)} - R_{jmin,kl}(-1)^{\epsilon_i(\epsilon_m + \epsilon_j) + (\epsilon_l + \epsilon_k)(\epsilon_n + \epsilon_m)} + \\
& + R_{ikjn,lm}(-1)^{\epsilon_j \epsilon_k + \epsilon_n(\epsilon_m + \epsilon_l)} - R_{jkin,lm}(-1)^{\epsilon_i(\epsilon_k + \epsilon_j) + \epsilon_n(\epsilon_m + \epsilon_l)} + \\
& + R_{ikjm,ln}(-1)^{\epsilon_j \epsilon_k + \epsilon_m \epsilon_l} - R_{jkim,ln}(-1)^{\epsilon_i(\epsilon_k + \epsilon_j) + \epsilon_m \epsilon_l} + \\
& + R_{iljm,kn}(-1)^{\epsilon_j \epsilon_l + \epsilon_k(\epsilon_l + \epsilon_m)} - R_{jlim,kn}(-1)^{\epsilon_i(\epsilon_l + \epsilon_j) + \epsilon_k(\epsilon_l + \epsilon_m)} + \\
& + R_{iljn,km}(-1)^{\epsilon_l(\epsilon_k + \epsilon_j) + \epsilon_n(\epsilon_k + \epsilon_m)} - R_{jlin,km}(-1)^{\epsilon_i \epsilon_j + \epsilon_l(\epsilon_k + \epsilon_i) + \epsilon_n(\epsilon_k + \epsilon_m)} + \\
& + R_{imjn,kl}(-1)^{\epsilon_j \epsilon_m + (\epsilon_l + \epsilon_k)(\epsilon_n + \epsilon_m)} - R_{jmin,kl}(-1)^{\epsilon_i(\epsilon_m + \epsilon_j) + (\epsilon_l + \epsilon_k)(\epsilon_n + \epsilon_m)} - \\
& - N_{ikjlmn}(-1)^{\epsilon_j \epsilon_k} + N_{jkilmn}(-1)^{\epsilon_i(\epsilon_k + \epsilon_j)} - \\
& - N_{ikjmln}(-1)^{\epsilon_j \epsilon_k + \epsilon_m \epsilon_l} + N_{jkimln}(-1)^{\epsilon_i(\epsilon_k + \epsilon_j) + \epsilon_m \epsilon_l} - \\
& - N_{ikjnlm}(-1)^{\epsilon_j \epsilon_k + \epsilon_n(\epsilon_m + \epsilon_l)} + N_{jkinlm}(-1)^{\epsilon_i(\epsilon_k + \epsilon_j) + \epsilon_n(\epsilon_m + \epsilon_l)} - \\
& - N_{iljmk n}(-1)^{\epsilon_j \epsilon_l + \epsilon_k(\epsilon_l + \epsilon_m)} + N_{jlimk n}(-1)^{\epsilon_i(\epsilon_l + \epsilon_j) + \epsilon_k(\epsilon_l + \epsilon_m)} - \\
& - N_{iljnk m}(-1)^{\epsilon_l(\epsilon_k + \epsilon_j) + \epsilon_n(\epsilon_k + \epsilon_m)} + N_{jlink m}(-1)^{\epsilon_i \epsilon_j + \epsilon_l(\epsilon_k + \epsilon_i) + \epsilon_n(\epsilon_k + \epsilon_m)} - \\
& - N_{imj nkl}(-1)^{\epsilon_j \epsilon_m + (\epsilon_l + \epsilon_k)(\epsilon_n + \epsilon_m)} + N_{jminkl}(-1)^{\epsilon_i(\epsilon_j + \epsilon_m) + (\epsilon_l + \epsilon_k)(\epsilon_n + \epsilon_m)}]. \quad (117)
\end{aligned}$$

При изучении свойств симметрии аффинных расширений третьего порядка для симплектической структуры (100), выраженных в терминах симплектического тензора кривизны, были получены новые тождества (107) для тензора R_{ijkl} . В связи с этим возникает естественный вопрос: не существуют ли некоторые новые тождества, содержащие аффинные расширения второго порядка для симплектического тензора кривизны, как следствия представления (117) и свойств симметрии

$$\omega_{ij,klmn} - \omega_{ij,lkmn}(-1)^{\epsilon_k \epsilon_l} = 0$$

аффинных расширений четвертого порядка для симплектической структуры? Мы докажем, что ответ на этот вопрос отрицателен. Действительно, используя свойства симметрии R_{ijkl} (53) и T_{ijklmn} (113)–(115), мы имеем

$$\begin{aligned}
0 = \omega_{ij,klmn} - \omega_{ij,lkmn}(-1)^{\epsilon_k \epsilon_l} = & [R_{ikjl,mn} + R_{likj,mn}(-1)^{\epsilon_l(\epsilon_i + \epsilon_j + \epsilon_k)} + \\
& + R_{kjli,mn}(-1)^{\epsilon_i(\epsilon_j + \epsilon_k + \epsilon_l)} + R_{jlik,mn}(-1)^{\epsilon_i + \epsilon_k)(\epsilon_j + \epsilon_l)}](-1)^{\epsilon_j \epsilon_k} =
\end{aligned}$$

$$= [R_{ikjl} + R_{likj}(-1)^{\epsilon_l(\epsilon_i + \epsilon_j + \epsilon_k)} + \\ + R_{kjl i}(-1)^{\epsilon_i(\epsilon_j + \epsilon_k + \epsilon_l)} + R_{jlik}(-1)^{(\epsilon_i + \epsilon_k)(\epsilon_j + \epsilon_l)}]_{,mn}(-1)^{\epsilon_j \epsilon_k}. \quad (118)$$

Благодаря тождеству (60) соотношения (118) удовлетворяются тождественно, при этом новых соотношений, содержащих аффинные расширения второго порядка для симплектического тензора кривизны, не возникает.

Аналогично можно найти соотношения более высоких порядков, содержащие аффинные расширения симплектической структуры, связности и симплектического тензора кривизны.

8. СООТНОШЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ В ПРОИЗВОЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ

Заметим, что соотношения (93), (94), (101), (99), (116), (117) были получены в нормальной системе координат. Представляется интересным обсудить эти соотношения в произвольных координатах (x) , поскольку сами по себе связности Γ_{ijk} тензорами не являются. В частности, рассматривая соотношение (93), мы должны заключить, что левая часть этого равенства должна быть некоторым тензором G_{ijkl} , принимающим форму $\Gamma_{ijk,l}(0)$ в точке $p \in M$ в нормальных координатах. В нормальных координатах ковариантные производные имеют форму частных производных, но идентифицировать G_{ijkl} как ковариантную производную $\Gamma_{ijk;l}$ нельзя, потому что она не преобразуется согласно тензорным правилам. Действительно, при преобразовании координат $(x) \rightarrow (y)$ связности Γ_{ijk} преобразуются по следующему правилу:

$$\Gamma_{ijk}(y) = \left(\Gamma_{pqr}(x) \frac{\partial_r x^r}{\partial y^k} \frac{\partial_r x^q}{\partial y^j} (-1)^{\epsilon_k(\epsilon_j + \epsilon_q)} + \omega_{pq}(x) \frac{\partial_r^2 x^q}{\partial y^j \partial y^k} \right) \frac{\partial_r x^p}{\partial y^i} (-1)^{(\epsilon_k + \epsilon_j)(\epsilon_i + \epsilon_p)},$$

и, следовательно, закон преобразования для частных производных связности, вычисленных в нормальных координатах (y) через ковариантные производные связности в произвольных координатах (x) , имеет вид

$$\begin{aligned} \Gamma_{ijk,l}(y) = & (\Gamma_{pqr;s}(x) - \Gamma_{pst}(x)\Gamma_{qr}^t(x)(-1)^{\epsilon_s(\epsilon_q + \epsilon_r)}) \frac{\partial_r x^s}{\partial y^l} \frac{\partial_r x^r}{\partial y^k} \frac{\partial_r x^q}{\partial y^j} \frac{\partial_r x^p}{\partial y^i} \times \\ & \times (-1)^{\epsilon_l(\epsilon_i + \epsilon_j + \epsilon_k + \epsilon_p + \epsilon_q + \epsilon_r) + \epsilon_k(\epsilon_j + \epsilon_q) + (\epsilon_k + \epsilon_j)(\epsilon_i + \epsilon_p)} + \\ & + \Gamma_{pqt}(x) \frac{\partial_r x^t}{\partial y^s} \Gamma_{kl}^s(y) \frac{\partial_r x^q}{\partial y^j} \frac{\partial_r x^p}{\partial y^i} \times \\ & \times (-1)^{\epsilon_l(\epsilon_i + \epsilon_j + \epsilon_k + \epsilon_p + \epsilon_q) + \epsilon_k(\epsilon_j + \epsilon_q) + (\epsilon_k + \epsilon_j)(\epsilon_i + \epsilon_p)} + \\ & + \Gamma_{ptr}(x) \frac{\partial_r x^t}{\partial y^s} \Gamma_{jl}^s(y) \frac{\partial_r x^r}{\partial y^k} \frac{\partial_r x^p}{\partial y^i} \times \\ & \times (-1)^{(\epsilon_i + \epsilon_j + \epsilon_l)(\epsilon_r + \epsilon_k) + \epsilon_l(\epsilon_p + \epsilon_i) + \epsilon_k(\epsilon_j + \epsilon_l) + (\epsilon_k + \epsilon_j)(\epsilon_i + \epsilon_p)} + \\ & + \Gamma_{pqs}(x) \frac{\partial_r x^s}{\partial y^l} \frac{\partial_r x^q}{\partial y^t} \Gamma_{jk}^t(y) \frac{\partial_r x^p}{\partial y^i} (-1)^{\epsilon_l(\epsilon_i + \epsilon_j + \epsilon_k + \epsilon_p + \epsilon_q)(\epsilon_k + \epsilon_j)(\epsilon_p + \epsilon_i)} + \\ & + \Gamma_{sjk}(y) \Gamma_{il}^s(y) (-1)^{(\epsilon_k + \epsilon_j)(\epsilon_s + \epsilon_i)} + \end{aligned}$$

$$+ \omega_{pq}(x) \frac{\partial_r^3 x^q}{\partial y^i \partial y^k \partial y^l} \frac{\partial_r x^p}{\partial y^i} (-1)^{\epsilon_l(\epsilon_i + \epsilon_p) + (\epsilon_k + \epsilon_j)(\epsilon_i + \epsilon_p)}, \quad (119)$$

который отличается от тензорных законов преобразования (6). В (119) были использованы обозначение

$$\Gamma_{pqr;s} = \Gamma_{pqr,s} - \Gamma_{pqn} \Gamma_{rs}^n - \Gamma_{pnr} \Gamma_{qs}^n (-1)^{\epsilon_k(\epsilon_j + \epsilon_l)} - \Gamma_{nqr} \Gamma_{ps}^n (-1)^{(\epsilon_r + \epsilon_q)(\epsilon_n + \epsilon_p)} \quad (120)$$

и выражение для матрицы вторых производных

$$\frac{\partial_r^2 x^q}{\partial y^j \partial y^k} = \frac{\partial_r x^q}{\partial y^l} \Gamma_{jk}^l(y) - \Gamma_{lm}^q(x) \frac{\partial_r x^m}{\partial y^k} \frac{\partial_r x^l}{\partial y^j} (-1)^{\epsilon_k(\epsilon_j + \epsilon_l)}.$$

Далее, используя (119) и переходя к точке $p \in M$, т.е. полагая $y = 0$, $x = x_0$, мы получим

$$\Gamma_{ijk;l}(0) = (\Gamma_{ijk;l}(x_0) - \Gamma_{iln}(x_0) \Gamma_{jk}^n(x_0) (-1)^{\epsilon_l(\epsilon_j + \epsilon_k)}) + \omega_{iq}(x_0) \left(\frac{\partial_r^3 x^q}{\partial y^j \partial y^k \partial y^l} \right)_0. \quad (121)$$

В силу (121) и тождества (83) матрица третьих производных в точке p удовлетворяет следующему соотношению:

$$\begin{aligned} \omega_{iq}(x_0) \left(\frac{\partial_r^3 x^q}{\partial y^j \partial y^k \partial y^l} \right)_0 &= \frac{1}{3} [-\Gamma_{ijk;l} - \Gamma_{ijl;k} (-1)^{\epsilon_k \epsilon_l} - \Gamma_{ikl;j} (-1)^{\epsilon_j(\epsilon_k + \epsilon_l)} + \\ &\quad + \Gamma_{iln} \Gamma_{jk}^n (-1)^{(\epsilon_j + \epsilon_k) \epsilon_l} + \Gamma_{ijn} \Gamma_{kl}^n + \Gamma_{ikn} \Gamma_{jl}^n (-1)^{\epsilon_k \epsilon_j}] (x_0) = \\ &= -\frac{1}{3} [Z_{ijkl} - 3\Gamma_{iln} \Gamma_{jk}^n (-1)^{(\epsilon_k + \epsilon_j) \epsilon_l}] (x_0), \end{aligned} \quad (122)$$

где

$$\begin{aligned} Z_{ijkl} &= \Gamma_{ijk;l} + \Gamma_{ijl;k} (-1)^{\epsilon_k \epsilon_l} + \Gamma_{ikl;j} (-1)^{(\epsilon_k + \epsilon_l) \epsilon_j} + \\ &\quad + 2\Gamma_{iln} \Gamma_{jk}^n (-1)^{(\epsilon_k + \epsilon_j) \epsilon_l} - \Gamma_{ikn} \Gamma_{jl}^n (-1)^{\epsilon_j \epsilon_k} - \Gamma_{ijn} \Gamma_{kl}^n. \end{aligned} \quad (123)$$

С учетом (122) мы получаем следующее представление для тензора G_{ijkl} в произвольных координатах (x) :

$$G_{ijkl}(x) = \left[\Gamma_{ijk;l} - \frac{1}{3} Z_{ijkl} \right] (x). \quad (124)$$

Заметим, что тензор G_{ijkl} можно также выразить в терминах частных производных от связности:

$$G_{ijkl}(x) = \left[\Gamma_{ijk,l} - \frac{1}{3} X_{ijkl} \right] (x), \quad (125)$$

где

$$\begin{aligned} X_{ijkl} &= \Gamma_{ijk,l} + \Gamma_{ijl,k} (-1)^{\epsilon_k \epsilon_l} + \Gamma_{ikl,j} (-1)^{(\epsilon_k + \epsilon_l) \epsilon_j} + \\ &\quad + 2\Gamma_{njk} \Gamma_{il}^n (-1)^{(\epsilon_k + \epsilon_j)(\epsilon_i + \epsilon_n)} - \Gamma_{njl} \Gamma_{ik}^n (-1)^{(\epsilon_j + \epsilon_l)(\epsilon_i + \epsilon_n) + \epsilon_k \epsilon_l} - \\ &\quad - \Gamma_{nkl} \Gamma_{ij}^n (-1)^{(\epsilon_k + \epsilon_l)(\epsilon_i + \epsilon_n + \epsilon_j)}. \end{aligned} \quad (126)$$

Теперь нетрудно найти соотношения первого порядка (93), (94) в произвольных координатах:

$$\Gamma_{ijk,l} - \frac{1}{3}X_{ijkl} = -\frac{1}{3}[R_{ijkl} + R_{ikjl}(-1)^{\epsilon_k\epsilon_j}], \quad (127)$$

$$\omega_{ij,kl} - \frac{1}{3}(X_{ijkl} - X_{jikl}(-1)^{\epsilon_i\epsilon_j}) = \frac{1}{3}R_{klij}(-1)^{(\epsilon_i+\epsilon_j)(\epsilon_k+\epsilon_l)}. \quad (128)$$

Отметим, что разность $X_{ijkl} - X_{jikl}(-1)^{\epsilon_i\epsilon_j}$ является симметричной по двум последним индексам в силу соотношения

$$\begin{aligned} X_{ijlk} - X_{ijkl}(-1)^{\epsilon_k\epsilon_l} &= 3[\Gamma_{njl}\Gamma_{ik}^n(-1)^{(\epsilon_j+\epsilon_l)(\epsilon_i+\epsilon_n)} - \Gamma_{njk}\Gamma_{il}^n(-1)^{(\epsilon_k+\epsilon_j)(\epsilon_i+\epsilon_n)+\epsilon_k\epsilon_l}] = \\ &= -3[\Gamma_{nik}\Gamma_{jl}^n(-1)^{\epsilon_n(\epsilon_i+\epsilon_k)+\epsilon_k(\epsilon_j+\epsilon_l)} + \\ &\quad + \Gamma_{njk}\Gamma_{il}^n(-1)^{\epsilon_n(\epsilon_k+\epsilon_j)+\epsilon_k(\epsilon_i+\epsilon_l)+\epsilon_i\epsilon_j}], \end{aligned} \quad (129)$$

так что свойства симметрии правой и левой частей (128) согласованы со свойствами симметрии $\omega_{ij,kl}$ и R_{ijkl} .

Очевидно, что тождество (107) в общих координатах принимает форму

$$\begin{aligned} R_{mjk;l}(-1)^{\epsilon_j(\epsilon_i+\epsilon_k)} - R_{mijl;k}(-1)^{\epsilon_k(\epsilon_l+\epsilon_j)} + \\ + R_{mkjl;i}(-1)^{\epsilon_i(\epsilon_j+\epsilon_k+\epsilon_l)} - R_{mlik;j}(-1)^{\epsilon_l(\epsilon_i+\epsilon_j+\epsilon_k)} = 0. \end{aligned} \quad (130)$$

Соотношения (127) и (128) следует рассматривать как производящие для бесконечной цепочки соотношений, выражающих связь аффинных расширений симплектической связности и симплектической структуры через симплектический тензор кривизны и его аффинные расширения. Эти соотношения определяют производящие функции Φ_{ijkl} и F_{ijkl} :

$$\Phi_{ijkl} = \Gamma_{ijk,l} - \frac{1}{3}X_{ijkl} + \frac{1}{3}[R_{ijkl} + R_{ikjl}(-1)^{\epsilon_k\epsilon_j}] = 0, \quad (131)$$

$$F_{ijkl} = \omega_{ij,kl} - \frac{1}{3}(X_{ijkl} - X_{jikl}(-1)^{\epsilon_i\epsilon_j}) - \frac{1}{3}R_{klij}(-1)^{(\epsilon_i+\epsilon_j)(\epsilon_k+\epsilon_l)} = 0, \quad (132)$$

а сами соотношения высших порядков возникают как коэффициенты разложения этой функции в ряд Тейлора. Действительно, соотношения первого порядка (см. (93), (94)) следуют непосредственно из равенств (131) и (132), записанных в нормальных координатах, если положить в них $y = 0$ и учесть, что $X_{ijkl}(0) = 0$. Для вывода соотношений второго порядка (см. (99), (101)) следует продифференцировать по y соотношения (128) и (127) (или, что то же самое, рассмотреть коэффициенты ряда Тейлора для функций (131) и (132) при второй степени y) и положить затем $y = 0$. Имеем

$$\Gamma_{ijk,lm}(0) - \frac{1}{3}X_{ijkl,m}(0) = -\frac{1}{3}[R_{ijkl,m}(0) + R_{ikjl,m}(0)(-1)^{\epsilon_k\epsilon_j}], \quad (133)$$

$$\omega_{ij,klm}(0) - \frac{1}{3}(X_{ijkl,m}(0) - X_{jikl,m}(0)(-1)^{\epsilon_i\epsilon_j}) = \frac{1}{3}R_{klij,m}(0)(-1)^{(\epsilon_i+\epsilon_j)(\epsilon_k+\epsilon_l)}. \quad (134)$$

В полученные соотношения входят величины вида $X_{ijkl,m}(0)$, которые можно выразить из (133) через аффинные расширения второго порядка симплектической

связности $A_{ijklm} = \Gamma_{ijk,l}(0)$. В свою очередь A_{ijklm} могут быть выражены через аффинные расширения первого порядка симплектического тензора кривизны $R_{ijkl,m}(0)$ в силу определения (54) и следствий из него. Подставляя найденные выражения для $X_{ijkl,m}(0)$ в терминах $R_{ijkl,m}(0)$ в (133) и (134), получим в точности соотношения второго порядка (99) и (101). Продолжая эти рассуждения, мы можем воспроизвести всю последовательность соотношений высших порядков.

9. ОБСУЖДЕНИЯ

В данной работе мы рассмотрели свойства тензора симплектической кривизны, тензора Риччи и скалярной кривизны на супермногообразиях Федосова. Используя нормальные координаты на супермногообразии, мы нашли соотношения до третьего порядка включительно между аффинными расширениями симплектической связности, симплектической структуры и симплектическим тензором кривизны, а также тождества для симплектического тензора кривизны. Рассматривая соотношения третьего порядка, мы показали, что независимых тождеств, содержащих вторые ковариантные производные тензора симплектической кривизны, не возникает. Было показано принципиальное значение тензора $G_{ijkl} = \Gamma_{ijk,l} - (1/3)X_{ijkl}$ для получения соотношений в произвольных локальных координатах. Это, в свою очередь, позволило построить производящие функции Φ_{ijkl} и F_{ijkl} , с помощью которых соотношения высших порядков записываются как соответствующие коэффициенты ряда Тейлора для этих функций.

Заметим, что тензор указанного вида не является специфическим только для симплектической геометрии, но может быть введен также и в аффинной, и в римановой геометриях. Действительно, введем величину

$$G^i_{jkl} = \Gamma^i_{jk;l} - \frac{1}{3}Z^i_{jkl} = \Gamma^i_{jk,l} - \frac{1}{3}Y^i_{jkl}, \quad (135)$$

где Γ^i_{jk} – аффинная связность на супермногообразии и введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} Z^i_{jkl} = & \Gamma^i_{jk;l} + \Gamma^i_{jl;k}(-1)^{\epsilon_k\epsilon_l} + \Gamma^i_{kl;j}(-1)^{(\epsilon_k+\epsilon_l)\epsilon_j} + \\ & + 2\Gamma^i_{ln}\Gamma^n_{jk}(-1)^{(\epsilon_k+\epsilon_j)\epsilon_l} - \Gamma^i_{kn}\Gamma^n_{jl}(-1)^{\epsilon_j\epsilon_k} - \Gamma^i_{jn}\Gamma^n_{kl}, \end{aligned} \quad (136)$$

$$\begin{aligned} Y^i_{jkl} = & \Gamma^i_{jk,l} + \Gamma^i_{jl;k}(-1)^{\epsilon_k\epsilon_l} + \Gamma^i_{kl;j}(-1)^{(\epsilon_k+\epsilon_l)\epsilon_j} - 2\Gamma^i_{ln}\Gamma^n_{jk}(-1)^{\epsilon_l(\epsilon_j+\epsilon_k)} + \\ & + \Gamma^i_{kn}\Gamma^n_{jl}(-1)^{\epsilon_k\epsilon_j} + \Gamma^i_{jn}\Gamma^n_{kl}, \end{aligned} \quad (137)$$

$$\Gamma^i_{jk;l} = \Gamma^i_{jk,l} - \Gamma^i_{jn}\Gamma^n_{kl} - \Gamma^i_{kn}\Gamma^n_{jl}(-1)^{\epsilon_k\epsilon_j} + \Gamma^i_{ln}\Gamma^n_{jk}(-1)^{\epsilon_l(\epsilon_j+\epsilon_k)}. \quad (138)$$

Тогда мы имеем представление тензора кривизны в терминах G^i_{jkl} :

$$R^i_{jkl} = -G^i_{jkl} + G^i_{jlk}(-1)^{\epsilon_l\epsilon_k} \quad (139)$$

и представление G^i_{jkl} в терминах тензора кривизны:

$$G^i_{jkl} = -\frac{1}{3}[R^i_{jkl} + R^i_{kjl}(-1)^{\epsilon_j\epsilon_k}], \quad (140)$$

которое доказывает тензорный характер G^i_{jkl} . В римановой геометрии дополнительно вводится метрический тензор g_{ij} на супермногообразии M . Этот тензор является симметричным,

$$g_{ij} = g_{ji}(-1)^{\epsilon_i \epsilon_j}, \quad (141)$$

и ковариантно постоянным,

$$g_{ij,k} = g_{im}\Gamma^m_{jk} + g_{jm}\Gamma^m_{ik}(-1)^{\epsilon_i \epsilon_j}. \quad (142)$$

С помощью g_{ij} можно опустить верхний индекс у R^i_{jkl} и получить тензор $R_{ijkl} = g_{im}R^m_{jkl}$, обладающий следующими свойствами симметрии:

$$R_{ijkl} = -R_{jikl}(-1)^{\epsilon_i \epsilon_j}, \quad R_{ijkl} = R_{klij}(-1)^{(\epsilon_i + \epsilon_j)(\epsilon_k + \epsilon_l)}. \quad (143)$$

Далее мы имеем

$$G_{ijkl} = g_{im}G^m_{jkl} = \Gamma_{ijk;l} - \frac{1}{3}Z_{ijkl} = \Gamma_{ijk,l} - \frac{1}{3}X_{ijkl}, \quad (144)$$

где $\Gamma_{ijk} = g_{im}\Gamma^m_{jk}$, $Z_{ijkl} = g_{im}Z^m_{jkl}$, и выражение для X_{ijkl} формально совпадает с (126). Из (139), (140), (142) следует, что

$$R_{ijkl} = -G_{ijkl} + G_{ijlk}(-1)^{\epsilon_l \epsilon_k}, \quad (145)$$

$$G_{ijkl} = -\frac{1}{3}[R_{ijkl} + R_{ikjl}(-1)^{\epsilon_j \epsilon_k}], \quad (146)$$

$$g_{ij,k} = \Gamma_{ijk} + \Gamma_{jik}(-1)^{\epsilon_i \epsilon_j}. \quad (147)$$

Мы можем ввести нормальные координаты на супермногообразии M подобно тому, как это было сделано в разделе 6, и получить следующее соотношение:

$$g_{ij,kl}(0) = -\frac{1}{3}[R_{ikjl}(0)(-1)^{\epsilon_j(\epsilon_i + \epsilon_k)} + R_{jkil}(0)(-1)^{\epsilon_i \epsilon_k}], \quad (148)$$

которое можно рассматривать как аналог формулы (94) в римановой геометрии. Нетрудно проверить, что благодаря (143) свойства симметрии $g_{ij,kl}(0)$ согласуются с этим соотношением. В произвольных локальных координатах это соотношение имеет вид

$$g_{ij,kl} - \frac{1}{3}[X_{ijkl} + X_{jikl}(-1)^{\epsilon_i \epsilon_j}] = -\frac{1}{3}[R_{ikjl}(-1)^{\epsilon_j(\epsilon_i + \epsilon_k)} + R_{jkil}(-1)^{\epsilon_i \epsilon_k}]. \quad (149)$$

Из (149) соотношения высших порядков могут быть получены точно так же, как в разделе 8.

Благодарности. Авторы благодарят И.Л. Бухбиндера, Д.В. Василевича, И.В. Воловича, Б. Гейера, А.П. Нерсисяна, В.В. Обухова за полезные обсуждения работы. Особую благодарность авторы выражают И.В. Тютину, критические замечания которого позволили устранить ряд неточностей в определениях. Авторы благодарны рецензенту за критику и комментарии некоторых работ по суперматематике. Работа частично поддержана Программой поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-1252.2003.2). Работа П. М. Лаврова поддержана РФФИ (гранты № 03-02-16193, 04-02-04002) и ИНТАС (грант 03-51-6346).

Список литературы

- [1] B. V. Fedosov, *J. Diff. Geom.*, **40** (1994), 213; *Deformation Quantization and Index Theory*, Akademie Verlag, Berlin, 1996.
- [2] I. Gelfand, V. Retakh, M. Shubin, *Advan. Math.*, **136** (1998), 104.
- [3] Ф. А. Березин, *ЯФ*, **29** (1979), 1670; **30** (1979), 1168; *Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными*, МГУ, М., 1983.
- [4] Д. А. Лейтес, *УМН*, **35** (1980), 3; B. DeWitt, *Supermanifolds*, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [5] I. A. Batalin, G. A. Vilkovisky, *Phys. Lett. B*, **102** (1981), 27; *Phys. Rev. D*, **28** (1983), 2567.
- [6] E. Witten, *Mod. Phys. Lett. A*, **5** (1990), 487; O. M. Khudaverdian, *J. Math. Phys.*, **32** (1991), 1934.
- [7] I. A. Batalin, I. V. Tyutin, *Nucl. Phys. B*, **345** (1990), 645; B. Geyer, P. Lavrov, *Int. J. Mod. Phys. A*, **19** (2004), 1639.
- [8] Б. С. Девитт, *Динамическая теория групп и полей*, Наука, М., 1987.
- [9] Д. М. Гитман, И. В. Тютин, *Каноническое квантование полей со связями*, Наука, М., 1986.
- [10] А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко, *Курс дифференциальной геометрии и топологии*, Изд-во МГУ, М., 1980.
- [11] B. Geyer, P. Lavrov, *Int. J. Mod. Phys. A*, **20** (2005), 2179.

Поступила в редакцию 8.09.2005,
после доработки 7.03.2006