Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Нерсисян, Лагранжева модель безмассовой частицы на пространственно-подобных кривых, *ТМФ*, 2001, том 126, номер 2, 179–195

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf423>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 14:04:09

ЛАГРАНЖЕВА МОДЕЛЬ БЕЗМАССОВОЙ ЧАСТИЦЫ НА ПРОСТРАНСТВЕННОПОДОБНЫХ КРИВЫХ

Рассмотрена модель D -мерной безмассовой частицы, описываемая лагранжианом, пропорциональным N -й внешней кривизне мировой линии. Дана гамильтонова формулировка системы, показано, что ее траекториями являются пространственноподобные кривые, удовлетворяющие условиям $k_{N+a} = k_{N-a}$, $k_{2N} = 0$, $a = 1, \dots, N-1$, где $N \leq [(D-2)/2]$. Первые N кривизн принимают произвольные значения, так что система имеет $N+1$ калибровочных степеней свободы; соответствующая калибровочная симметрия образует алгебру W -типа. Такая модель описывает D -мерные безмассовые частицы с N совпадающими значениями характеристических чисел матрицы спиральности и $[(D-2)/2] - N$ нулевыми значениями остальных спиральностей. Показано, что рассмотренная модель допускает формулировку на пространствах постоянной ненулевой кривизны. Она является единственной системой с лагранжианом, зависящим от внешних кривизн мировой линии, которая порождает неприводимые представления группы Пуанкаре.

1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно, лагранжево описание спиновых частиц требует введения дополнительных степеней свободы. Как правило, это достигается расширением исходного пространства грассмановыми переменными, что составляет основу “псевдоклассического” подхода Березина–Маринова [1] и генетически связанного с ним подхода, основанного на введении суперсимметрий [2], [3] (ссылки на более поздние работы можно найти в [4], [5]). Можно также расширить пространство коммутирующими переменными, что, по существу, является лагранжевой формулировкой подхода Сурье к гамильтонову описанию спиновых частиц и связано с так называемым методом орбит Кириллова–Костанта–Сурье [6]. Фактически он приводит к замене исходного пространства-времени $M^{1,D-1}$ прямым произведением $M^{1,D-1} \times K$, где K есть коорбита группы Пуанкаре (наиболее полно этот подход описан в работах [7]). Заметим, что отмеченные выше подходы не являются удовлетворительными с точки зрения интуитивного восприятия спиновых

*Объединенный институт ядерных исследований, Лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова, Дубна, Московская обл., Россия; Ереванский государственный университет, Ереван, Армения. E-mail: nerses@thsun1.jinr.ru

частиц: в обоих описаниях спин выступает как величина, не зависящая от исходного пространства-времени.

Альтернативой указанным подходам может быть введение дополнительных степеней свободы посредством высших производных исходных пространственно-временных координат. В этом случае для соблюдения репараметризационной и пуанкаре-инвариантности действие должно иметь вид

$$S = \int \mathcal{L}(k_1, \dots, k_N) ds, \quad (1.1)$$

где k_I обозначают репараметризационные инварианты (внешние кривизны) мировой линии системы ($0 < I \leq D - 1$), а ds – ее натуральный параметр:

$$ds = \begin{cases} |d\mathbf{x}| & \text{для неизотропных кривых,} \\ |d^2\mathbf{x}|^{\frac{1}{2}} & \text{для изотропных кривых.} \end{cases} \quad (1.2)$$

Интерес к системам на неизотропных кривых возник в конце восьмидесятых годов благодаря работам Полякова [8] по жестким струнам и $(2 + 1)$ -мерным теориям поля с членом Черна–Саймонса. Особый интерес представляют системы массивных частиц, в которых члены с высшими производными могут рассматриваться как квантовые поправки к исходному действию свободной частицы. Наиболее полно системы на неизотропных кривых, зависящие от первой и второй кривизн мировой линии, были исследованы в работах Плющая (см. работы [9], [10] и ссылки в них). Прежде всего, следует отметить его работы по массивным $(2 + 1)$ -мерным частицам с лагранжианом, линейно зависящим от второй кривизны: эта система, полученная первоначально в работе Полякова, явилась первой и наиболее удачной лагранжевой моделью релятивистского аниона, причем ее спектр удовлетворял условию Майораны [9].

Наиболее красивой системой такого рода является модель четырехмерной безмассовой частицы (называемая далее моделью Плющая), описываемая действием

$$S = c \int k_1 ds, \quad (ds)^2 = (d\mathbf{x})^2 \neq 0, \quad k_1^2 = \left(\frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} \right)^2. \quad (1.3)$$

Эта система, как оказалось, описывает безмассовые частицы спиральности c , принимающей после квантования произвольное целое значение. Ее ковариантное квантование, основанное на твисторной технике, позволило получить также состояния произвольной полупелой спиральности [11]. Несмотря на то что модель Плющая не допускает формулировки в произвольном гравитационном фоне [12], ее можно непротиворечиво сформулировать на пространстве анти-де Ситтера [13]. Более того, она обладает калибровочной W_3 -симметрией [14], а ее классическими траекториями являются пространственно-подобные плоские кривые с произвольной первой кривизной.

Вопрос о том, как обобщить модель Плющая на пространства высших размерностей, не столь тривиален, как может показаться на первый взгляд. Дело в том, что аналогом спиральности при $D > 5$ являются веса малой группы Лоренца $SO(D - 2)$ и частицы имеют не одну, а $N_0 = [(D - 2)/2]$ спиральностей. Поэтому квантово-механически

безмассовые частицы описываются неприводимыми представлениями группы Пуанкаре, соответствующими диаграммам Юнга с N_0 строками длиной m_i , где m_i являются весами $SO(D-2)$. Максимальная размерность фазового пространства безмассовой частицы с фиксированными спиральностями определяется выражением [15]

$$\mathcal{D}_{\text{massless}}^{\text{max}} = 2(D-1) + D_{\text{helic}}^{\text{max}}, \quad D_{\text{helic}}^{\text{max}} = \begin{cases} \frac{(D-2)(D-4)}{2} & \text{для четных } D, \\ \frac{(D-3)^2}{2} & \text{для нечетных } D. \end{cases} \quad (1.4)$$

Таким образом, при $D = 4$ модель Плющая описывает все неприводимые безмассовые представления группы Пуанкаре, причем эти представления конформно-инвариантны. Для получения аналогичных представлений из суперсимметричной модели требуется введение $\mathcal{N} = 2s$ локальных суперсимметрий [3]. При $D \geq 6$ модель Плющая порождает лишь неприводимые представления, отвечающие однострочным диаграммам Юнга длиной s , в то время как суперсимметричная модель порождает представления, описываемые прямоугольными диаграммами Юнга с N_0 строками длины s , где s обозначает спиральность частицы [16].

Заметим, что неприводимые безмассовые представления группы Пуанкаре конформно-инвариантны только при $m_1 = m_2 = \dots = m_{N_0} \equiv m$, где $m = 0, 1/2$ при нечетном D и любое (полу)целое число, если D четно [17]. Таким образом, при $D \geq 6$ модель Плющая, в отличие от суперсимметричной модели, не обладает конформной инвариантностью. В поисках подходящего кандидата для описания безмассовых частиц мы должны провести общий анализ систем с действием (1.1) с целью нахождения лагранжианов, порождающих неприводимые представления. В работе [18] была развита удобная для исследования систем типа (1.1) гамильтонова формулировка, позволяющая записывать их в терминах гамильтоновой системы с $(2D - N)(N + 1)$ -мерным фазовым пространством и $\text{rank}(\partial^2 \mathcal{L} / \partial k_i \partial k_j)$ первичными связями. Причем, как оказалось, все системы такого вида с нелинейными по кривизнам лагранжианами, а также с лагранжианами, отвечающими частицам с ненулевой массой, порождают приводимые представления. Таким образом, для поиска D -мерных обобщений модели Плющая, сформулированных на неизотропных кривых, достаточно исследовать действия вида

$$\mathcal{S} = \sum_{I=1}^N c_I \int k_I ds, \quad (ds)^2 = (d\mathbf{x})^2 \neq 0, \quad (1.5)$$

где k_I являются внешними кривизнами мировой линии (результаты предварительного классического анализа таких систем можно найти в [19]).

Конечно, остаются еще экзотические модели, сформулированные на изотропных кривых. Однако, проведя анализ, аналогичный проделанному в работе [18], можно увидеть, что, во-первых, и в этом случае максимальным числом первичных связей обладают линейные лагранжианы, а во-вторых, системы с линейными лагранжианами отвечают массивным частицам, описываемым приводимыми представлениями [20].

Итак, с целью нахождения обобщений модели Плющая для пространств высших размерностей мы провели анализ систем с действием (1.5), а также рассмотрели возможность их формулировки на нетривиальном гравитационном фоне.

В разделе 2 построена первичная гамильтонова система, отвечающая модели (1.5), и проведен анализ процедуры построения вторичных связей и уравнений движения системы. В частности, показано, что:

1. Системы с действием (1.5) имеют нетривиальные решения лишь при $N \leq N_0 = [(D-2)/2]$ и описывают безмассовые частицы с N ненулевыми и $N_0 - N$ нулевыми спиральностями.

2. Классические решения системы (1.5) описываются пространственноподобными кривыми с нулевой $2N$ -й кривизной. Первые $2N$ элементов ее подвижного репера пространственноподобны, а $(2N+1)$ -й элемент является изотропным вектором, отвечающим импульсу системы.

3. Единственная система типа (1.5), порождающая только неприводимые представления, описывается действием

$$S = c \int k_N ds, \quad (ds)^2 = (dx)^2 \neq 0. \quad (1.6)$$

В разделе 3 исследованы классические и квантовые свойства модели (1.6) и возможность ее формулировки на нетривиальном гравитационном фоне. Показано, что:

1. Модель (1.6) описывает безмассовые частицы со спиральностями $m_1 = m_2 = \dots = m_N = c$, $m_{N_0-N} = m_{N_0-N+1} = \dots = m_{N_0} = 0$, так что квантово-механически они соответствуют неприводимым представлениям группы Пуанкаре с прямоугольными диаграммами Юнга размерности $N \times c$, где c принимает произвольное целое значение. Таким образом, при четном D и $N = N_0$ решения конформно-инвариантны.

2. Классическими траекториями модели являются пространственноподобные кривые, удовлетворяющие условиям $k_{N+i} = k_{N-i}$, где $i = 1, \dots, N$, $k_0 \equiv 0$. В то же время значения первых N кривизн произвольны, что является геометрической иллюстрацией наличия в системе $N+1$ калибровочных симметрий. Приведены косвенные аргументы в пользу того, что они образуют калибровочную W_{N+2} -алгебру.

3. Системы с действием (1.5) непротиворечиво формулируются на пространствах постоянной ненулевой кривизны, так что модель (1.6) допускает формулировку на пространствах анти-де Ситтера.

В разделе 4 обсуждаются полученные результаты и нерешенные проблемы.

Мы пользуемся обозначениями

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}: \quad \mathbf{a} \equiv a^A, \quad \mathbf{b} \equiv b^A, \quad \mathbf{ab} = \sum_{A=1}^D a^A b_A, \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} \equiv \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} - \mathbf{b} \otimes \mathbf{a},$$

а также полагаем, что индексы i, j принимают значения $1, \dots, N$.

2. ФОРМУЛЫ ФРЕНЕ И ГАМИЛЬТОНОВ ФОРМАЛИЗМ

Репараметризационные инварианты (внешние кривизны) $k_1, \dots, k_{D-1}$ кривых в евклидовом пространстве естественным образом определяются в терминах формул Френе для подвижного репера $\{\mathbf{e}_I\}$:

$$\dot{\mathbf{x}} = \tilde{s}\mathbf{e}_1, \quad \dot{\mathbf{e}}_I = \tilde{s}k_I\mathbf{e}_{I+1} - \tilde{s}k_{I-1}\mathbf{e}_{I-1}, \quad (2.1)$$

где

$$\mathbf{e}_I\mathbf{e}_J = \delta_{IJ}, \quad I, J = 1, \dots, D; \quad \tilde{s} = |\dot{\mathbf{x}}|, \quad \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_{D+1} \equiv 0.$$

Нетрудно проверить, что элементы базиса Френе можно выразить через пространственные координаты следующим образом:

$$\mathbf{e}_I = \frac{1}{\sqrt{\det \hat{g}_{I-1} \det \hat{g}_I}} \begin{vmatrix} g_{1.1} & \dots & g_{1.I} \\ \dots & \dots & \dots \\ g_{I-1.1} & \dots & g_{I-1.I} \\ \dot{\mathbf{x}} & \dots & \mathbf{x}_{(I)} \end{vmatrix}, \quad (2.2)$$

где $\det \hat{g}_I = \det \hat{g}_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 1, \dots, I$, $\hat{g}_{\alpha\beta} = \mathbf{x}_{(\alpha)}\mathbf{x}_{(\beta)}$, $\mathbf{x}_{(\alpha)} \equiv d^\alpha \mathbf{x} / d\tau^\alpha$. Отсюда легко получить явные выражения для внешних кривизн:

$$k_I = \frac{\sqrt{\det \hat{g}_{I+1} \det \hat{g}_{I-1}}}{\tilde{s} \det \hat{g}_I}. \quad (2.3)$$

В то время как значения k_I при $I \neq D-1$ положительны, высшая кривизна k_{D-1} (“кручение”) может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Если некоторая кривизна $k_I \neq 0$, то $k_\mu \neq 0$ при $\mu = 1, 2, \dots, I-1$. Обратно, если $k_I = 0$, то $k_\mu = 0$ при $\mu = I+1, \dots, D-1$ [21].

Формулы Френе для неизотропных кривых в пространстве Минковского имеют вид

$$\dot{\mathbf{x}} = \tilde{s}\mathbf{e}_1, \quad \dot{\mathbf{e}}_I = \tilde{s}K_I^J\mathbf{e}_J, \quad \mathbf{e}_I\mathbf{e}_J = \eta_{IJ}, \quad (2.4)$$

$$K_{IJ} + K_{JI} = 0, \quad K_{IJ} = \begin{cases} \pm k_I & \text{при } J = I \pm 1, \\ 0 & \text{при } J \neq I \pm 1, \end{cases} \quad (2.5)$$

где η_{IJ} является диагональной метрикой псевдоевклидова пространства.

Легко видеть, что для того чтобы перевести формулы Френе для неизотропных кривых в пространстве Минковского в формулы Френе для кривых в евклидовом пространстве, нужно провести для некоторого индекса $\underline{I}$ преобразование

$$(\mathbf{e}_{\underline{I}}, \tilde{s}k_{\underline{I}}, \tilde{s}k_{\underline{I}-1}, \tilde{s}) \rightarrow (i\mathbf{e}_{\underline{I}}, i\tilde{s}k_{\underline{I}}, i\tilde{s}k_{\underline{I}-1}, (-i)^{\delta_{1\underline{I}}}\tilde{s}), \quad (2.6)$$

в результате которого вектор $\mathbf{e}_{\underline{I}}$ становится времениподобным. При $\underline{I} = 1$ полученная кривая времениподобна, тогда как при $\underline{I} \neq 1$ — пространственноподобна.

Как видно из выражения (2.3), лагранжиан действия (1.5) зависит от производных $(N + 1)$ -го порядка. Однако, принимая во внимание формулы Френе (2.1), мы можем заменить его эквивалентным лагранжианом, не зависящим от высших производных [18]:

$$\begin{aligned} \tilde{s} \sum_{i=1}^N c_i k_i(\mathbf{x}_\alpha) \rightarrow \tilde{s} \sum_{i=1}^N c_{i-1} k_{i-1} + c_N \sqrt{\dot{\mathbf{e}}_N^2 - \tilde{s}^2 k_{N-1}^2} - \tilde{s} \sum_{i \leq j=1}^N d_{ij}(\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j - \delta_{ij}) + \\ + \mathbf{p}(\dot{\mathbf{x}} - \tilde{s} \mathbf{e}_1) + \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_{i-1}(\dot{\mathbf{e}}_{i-1} - \tilde{s} k_{i-1} \mathbf{e}_i + \tilde{s} k_{i-2} \mathbf{e}_{i-2}), \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $\tilde{s}$, k_{i-1} , d_{ij} , $\mathbf{p}_{i-1}$, $\mathbf{e}_i$ являются независимыми переменными, $k_0 = 0$, $\mathbf{p}_0 = 0$, $\mathbf{e}_0 = 0$. Для нового лагранжиана можно легко совершить преобразование Лежандра, в результате чего получим гамильтонову систему [18]

$$\begin{aligned} \omega_N = d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{x} + \sum_{i=1}^N d\mathbf{p}_i \wedge d\mathbf{e}_i, \\ \mathcal{H} = \tilde{s} \left[\mathbf{p} \mathbf{e}_1 + \sum_{i=1}^N k_{i-1}(\phi_{i-1.i} - c_{i-1}) + \right. \\ \left. + \frac{k_N}{2c_N}(\Phi_{N.N} - c_N^2) + \sum_{i,j=1}^N d_{ij}(\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j - \delta_{ij}) \right] \end{aligned} \quad (2.8)$$

со следующими первичными связями:

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j - \delta_{ij} \approx 0, \quad (2.9)$$

$$\mathbf{p}_N \mathbf{e}_N \approx 0, \quad \mathbf{p}_N \mathbf{e}_{i-2} \approx 0, \quad (2.10)$$

$$\mathbf{p} \mathbf{e}_1 \approx 0, \quad (2.11)$$

$$\phi_{i-1.i} \equiv \mathbf{p}_{i-1} \mathbf{e}_i - \mathbf{p}_i \mathbf{e}_{i-1} \approx c_{i-1}, \quad \Phi_{N.N} \equiv \mathbf{p}_N^2 - \sum_{i=1}^N (\mathbf{p}_N \mathbf{e}_i)^2 \approx c_N^2. \quad (2.12)$$

Заметим, что в такой формулировке лагранжевы множители $\tilde{s}$ и k_i имеют ясный геометрический смысл, так что возможные соотношения между ними, возникающие при стабилизации первичных связей, получают интерпретацию как соотношения на первые N кривизн. Соответственно выбор вторичных связей должен быть согласован с требованием $k_i \neq 0$.

Удобно ввести вместо $\mathbf{p}_i$ новые переменные

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_i^\perp \equiv \mathbf{p}_i - \sum_{j=1}^N (\mathbf{p}_i \mathbf{e}_j) \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{p}_i^\perp \mathbf{e}_j = 0, \quad \mathbf{p}_i^\perp \mathbf{p}_j^\perp \equiv \Phi_{ij}, \\ \phi_{i.j} \equiv \mathbf{p}_i \mathbf{e}_j - \mathbf{p}_j \mathbf{e}_i, \quad \chi_{ij} = \mathbf{p}_i \mathbf{e}_j, \quad i \geq j, \end{aligned} \quad (2.13)$$

так что первичные связи (2.9) окажутся сопряженными χ_{ij} и коммутирующими с $\mathbf{p}_i^\perp$ и ϕ_{ij} .

Именно по этой причине мы опустили в первичном гамильтониане (2.8) члены, пропорциональные связям (2.10). По этой же причине без ограничения общности можно ввести калибровочные условия (включающие в себя первичные связи (2.10))

$$\chi_{ij} \approx 0, \quad (2.14)$$

фиксирующие значения лагранжевых множителей d_{ij} :

$$2d_{i,j} = \delta_{ij}(k_i c_i - k_{i-1} c_{i-1}). \quad (2.15)$$

Теперь перейдем к процедуре построения вторичных связей, порождаемых первичными связями (2.11) и (2.12).

Первичная связь (2.11) порождает вторичные связи

$$\mathbf{p} \mathbf{e}_i \approx 0, \quad \mathbf{p} \mathbf{p}_i \approx 0, \quad \mathbf{p}^2 \approx 0, \quad (2.16)$$

обеспечивающие безмассовость модели и трансверсальность матрицы спиральностей [15], [22].

ЗАМЕЧАНИЕ. Как видно из (2.16), классическими решениями системы являются пространственноподобные кривые, причем лишь при условии

$$N \leq N_0 = \left\lfloor \frac{D-2}{2} \right\rfloor, \quad c_N \neq 0 \quad (2.17)$$

действие (1.5) допускает нетривиальные ($\mathbf{p} \neq 0$) классические решения. Заметим, что N_0 определяет число спиральностей системы (ранг малой группы Лоренца $SO(D-2)$).

Эволюция функций ϕ_{ij} и Φ_{ij} задается выражениями (в калибровке собственного времени $\tilde{s} = 1$)

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_{i,j} &= -k_{i-1}\phi_{i-1,j} + k_i\phi_{i+1,j} + (i \leftrightarrow j) - 2\lambda\delta_{N[i]\Phi_j].N}, \\ \dot{\Phi}_{i,j} &= -k_{i-1}\Phi_{i-1,j} + k_i\Phi_{i+1,j} + (i \leftrightarrow j) - 2\lambda\Phi_{N.\{i\phi_j\}.N}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

где мы полагаем $k_i \neq k_N$, $2c_N\lambda = k_N$, $\phi_{0,i} = \Phi_{0,i} = \phi_{N+1,i} = \Phi_{N+1,i} = 0$. Поэтому связи, порождаемые соотношениями (2.12), являются функциями ϕ_{ij} и Φ_{ij} , так что их число не превышает N^2 .

Поскольку генераторы группы вращений имеют в координатах (2.13) вид

$$\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{x} + \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \times \mathbf{e}_i = \mathbf{p} \times \mathbf{x} + \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i^\perp \times \mathbf{e}_i - \sum_{i,j=1}^N \phi_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, \quad (2.19)$$

то собственные значения матрицы $\mathbf{S}$ определяются соотношениями

$$\mathrm{tr} \mathbf{S}^{2k} = \mathrm{tr} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\hat{\Phi} & \hat{\phi} \end{pmatrix}^{2k}. \quad (2.20)$$

Следовательно, число ненулевых спиральностей системы равно N [15], [22].

Удобно представить функции ϕ_{ij} , Φ_{ij} в виде градуированных матриц:

$$\hat{R}_{ij}^p = (\phi_{ij}^p, \Phi_{ij}^p), \quad p = 1, \dots, N, \quad (2.21)$$

где

$$\begin{aligned} \phi_{ij}^p &\equiv \phi_{i,j}, & |i-j| &= p, \\ \Phi_{i,j}^p &\equiv \Phi_{i,j}, & i+j-1 &= 2N+1-p. \end{aligned}$$

Замечая, что $\hat{R}^p \sim \hat{R}^{p\pm 1}$, заключаем, что процедура стабилизации содержит не более $N+1$ шагов, причем вторичные связи $(p+1)$ -го этапа зависят от $\hat{R}^{p\pm 1}$. Как следствие вторичные связи нечетных этапов имеют вид $\hat{R}^{2\kappa} \approx 0$, а вторичные связи четных этапов определяются из системы линейных по k_i уравнений как требование совместимости этих уравнений с условиями $k_i \neq 0$. Потому значения спиральностей, определяемых выражениями (2.20), фиксируются лишь в случае, когда система имеет максимально допустимый набор связей. Безусловно, это имеет место при $N=1$, когда первичные связи (2.12) не порождают вторичных связей.

При $N=2$, $c_1 \neq 0$ имеем

$$\Phi_{1,2} \approx 0, \quad k_2 c_2 c_1 + k_1 (\Phi_{1,1} - c_2^2) = 0, \quad \Phi_{1,1} - c_2^2 \neq 0 = \mathrm{const}. \quad (2.22)$$

Так что уже в этом простом случае значения спиральностей определяются начальными условиями задачи.

При $N > 2$ вторичные связи первого этапа имеют вид

$$\Phi_{N-1,N} \approx 0, \quad \phi_{i-2,i} \approx 0, \quad (2.23)$$

после чего мы получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} k_{i-4} \phi_{i-4,i-1} - k_{i-3} c_{i-2} + k_{i-2} c_{i-3} - k_{i-1} \phi_{i-3,i} &\approx 0, \\ -k_{N-3} c_N \phi_{N-3,N} + k_{N-2} c_N c_{N-1} - k_{N-1} c_N c_{N-2} + k_N \Phi_{N,N-2} &\approx 0, \\ k_{N-2} \Phi_{N-2,N} + k_{N-1} (\Phi_{N-1,N-1} - c_N^2) + k_N c_N c_{N-1} &\approx 0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Итак, при $N > 2$ дальнейшая процедура построения вторичных связей существенно зависит от значений констант c_i . Результирующие системы могут иметь решения с фазовыми пространствами различной размерности.

Лишь в случае зависимости лагранжиана от единственной кривизны, $L = c_N k_N$, мы получим максимально допустимый набор вторичных связей третьего этапа, $\phi_{i,i+3} \approx 0$, $\Phi_{N-1,N-1} \approx c_N^2$. Продолжив процедуру построения связей, окончательно получим

$$\phi_{ij} \approx 0, \quad \Phi_{ij} - c^2 \delta_{ij} \approx 0. \quad (2.25)$$

Это единственный случай, когда связи полностью фиксируют спиральности системы и, как следствие, квантование приводит к неприводимым представлениям группы Пуанкаре. Более подробно мы рассмотрим эту систему в следующем разделе.

В остальных случаях при $N > 2$ система может допускать решения с различными наборами вторичных связей, приводящими к физически неэквивалентным системам (с фазовыми пространствами различной размерности). Продемонстрируем это явление на следующих двух примерах.

ПРИМЕР 1. При $N = 3$, $|c_1| + |c_2| \neq 0$ система уравнений (2.24) принимает вид

$$\hat{A}\hat{k} \equiv \begin{pmatrix} c_3 c_2 & -c_3 c_1 & \Phi_{1.3} \\ \Phi_{1.3} & \Phi_{2.2} - c_3^2 & c_3 c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = 0. \quad (2.26)$$

При $\text{rank } \hat{A} = 2$ процедура построения вторичных связей заканчивается на этом этапе и остается единственный нефиксированный лагранжев множитель. Если $c_2 \neq 0$, возможен альтернативный случай $\text{rank } \hat{A} = 1$, который имеет место на поверхности, фиксированной условиями

$$\Phi_{1.3} = \pm c_2 c_3, \quad \Phi_{2.2} = c_3^2 \mp c_1 c_3. \quad (2.27)$$

В этом случае из (2.26) следует единственное условие на лагранжевы множители:

$$c_2 (k_1 \pm k_3) \pm c_1 k_2 = 0. \quad (2.28)$$

Рассматривая выражения (2.27) как связи второго этапа, мы получаем вторичные связи третьего этапа:

$$\Phi_{1.2} \approx 0, \quad \left(\frac{\Phi_{1.1}}{c_3} - c_3 \pm c_1 \right) k_1 \pm c_2 k_2 = 0, \quad \Phi_{1.1} = \text{const}. \quad (2.29)$$

Как видно, рассмотренная система имеет решения двух типов, с фазовыми пространствами различной размерности. Оба решения имеют две калибровочные степени свободы.

При $c_1 = 0$, $N > 2$ система может иметь решения с большим числом калибровочных степеней свободы.

ПРИМЕР 2. При $L = c_1 k_{N-1} + c_2 k_N$, $N > 2$, система уравнений (2.24) принимает вид

$$\phi_{i-3.i} \approx 0, \quad \hat{A}\hat{k} \equiv \begin{pmatrix} c_1 c_2 & 0 & \Phi_{N-2.N} \\ \Phi_{N-2.N} & \Phi_{N-1.N-1} - c_2^2 & c_1 c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{N-2} \\ k_{N-1} \\ k_N \end{pmatrix} = 0.$$

Матрица $\hat{A}$ имеет меньший ранг на поверхности

$$\Phi_{N-1.N-1} \approx c_2^2, \quad \Phi_{N.N-2} \approx -c_1 c_2, \quad k_{N-2} = k_N.$$

Продолжив эту процедуру, получим, что фазовое пространство наименьшей размерности задается связями

$$\begin{aligned} \phi_{\alpha.\beta} &\approx c_1 \epsilon_{N-\alpha.N-\beta}, & \phi_{\alpha.b} &\approx 0, & \phi_{a.b} &\approx 0, \\ \Phi_{\alpha.\beta} &\approx c_2^2 \delta_{\alpha\beta}, & \Phi_{\alpha.b} &\approx -c_2 c_1 \delta_{\alpha.b+2}, & \Phi_{a.b} &\approx (c_2^2 - c_1^2) \delta_{ab} - c_1 c_2 \delta_{a.b\pm 2}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

где $a, b = 1, \dots, N-2$ и $\alpha, \beta = N-1, N$.

Лагранжевы множители ограничены условиями

$$k_i = k_{i-2}, \quad (2.31)$$

так что построенная гамильтонова система имеет три калибровочные степени свободы.

Рассмотрим уравнения движения гамильтоновой системы общего положения. В координатах (2.13) они имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \tilde{s} \mathbf{e}_1, & \dot{\mathbf{e}}_{i-1} &= \tilde{s} k_{i-1} \mathbf{e}_i - \tilde{s} k_{i-2} \mathbf{e}_{i-2}, & \dot{\mathbf{e}}_N &= \frac{\tilde{s} k_N \mathbf{p}_N^\perp}{c_N} - \tilde{s} k_{N-1} \mathbf{e}_{N-1}, \\ \dot{\mathbf{p}}_i^\perp &= -\delta_{1.i} \tilde{s} \mathbf{p} - \tilde{s} k_{i-1} \mathbf{p}_{i-1}^\perp + \tilde{s} k_i \mathbf{p}_{i+1}^\perp - \frac{\tilde{s} k_N (\Phi_{i.N} \mathbf{e}_N - \phi_{i.N} \mathbf{p}_N^\perp)}{c_N}, & \dot{\mathbf{p}} &= 0. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Ортонормализуем векторы $\mathbf{p}_i^\perp$ с помощью следующего анзаца, являющегося модификацией предложенного в работе [23]:

$$\mathbf{v}_N \equiv \frac{\mathbf{p}_N^\perp}{c_N}, \quad \mathbf{v}_{i-1} = -\frac{1}{\sqrt{\Delta_{i-1} \Delta_i}} \begin{vmatrix} \Phi_{N.N} & \dots & \Phi_{N.i-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \Phi_{i.N} & \dots & \Phi_{i.i-1} \\ \mathbf{p}_N^\perp & \dots & \mathbf{p}_{i-1}^\perp \end{vmatrix}, \quad (2.33)$$

где $\Delta_N = c_N$, $\Delta_i = \det \Phi_{\alpha.\beta} \neq 0$, $\alpha, \beta = i, \dots, N$. Ортогональность этих векторов немедленно следует из очевидного разложения:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i &= \sum_{\alpha=i}^N A_{i.\alpha} \sqrt{\frac{\Delta_{i+1}}{\Delta_i}} \mathbf{p}_\alpha^\perp, & A_{i.i} &= 1, & \Delta_{N+1} &\equiv 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \mathbf{v}_i \mathbf{p}_\alpha^\perp &= \begin{cases} \sqrt{\frac{\Delta_i}{\Delta_{i+1}}}, & \alpha = i, \\ 0, & \alpha > i. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.34)$$

Как видно из уравнений движения, векторы $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{2N+1-i} \equiv \mathbf{v}_i^\perp)$ образуют первые $2N$ элементов исходного конфигурационного пространства, тогда как вектор $\mathbf{p}$ задает его $(2N+1)$ -й изотропный элемент.

Сравнив уравнения движения с формулами Френе (2.1), мы получим следующие выражения для внешних кривизн:

$$k_{2N} = 0, \quad \frac{k_{N+a}}{k_{N-a}} = \sqrt{\frac{\Delta_{a-1}\Delta_{a+1}}{\Delta_a^2}}, \quad a = 1, \dots, N-1. \quad (2.35)$$

СЛЕДСТВИЕ. *Траектории, отвечающие безмассовым спиновым частицам, есть пространственноподобные кривые с постоянным отношением равноудаленных от N кривизн: $k_{N+a}/k_{N-a} = \text{const}$. Первые $2N$ элементов подвижного репера $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{2N}$ являются пространственноподобными векторами, а $(2N+1)$ -й элемент является изотропным вектором, отвечающим импульсу системы.*

3. СИСТЕМА С ФИКСИРОВАННЫМИ СПИРАЛЬНОСТЯМИ: $\mathcal{L} = ck_N$

Как было показано в предыдущем разделе, имеется единственная система с действием вида (1.5), имеющая фиксированные значения спиральностей. Она определяется следующим набором характеристических констант:

$$c_0 = c_1 = \dots = c_{N-1} = 0, \quad c_N \equiv c \neq 0, \quad (3.1)$$

т.е. зависит от единственной кривизны: $\mathcal{L} = ck_N$. Полный набор связей такой системы можно представить в виде

$$\mathbf{p}\mathbf{e}_i \approx 0, \quad \mathbf{p}\mathbf{p}_i \approx 0, \quad \mathbf{p}^2 \approx 0, \quad \mathbf{p}_i\mathbf{e}_j - \mathbf{p}_j\mathbf{e}_i \approx 0, \quad \mathbf{p}_i\mathbf{p}_j - c^2\delta_{ij} \approx 0, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{e}_j\mathbf{e}_i - \delta_{ij} \approx 0, \quad \mathbf{p}_j\mathbf{e}_i \approx 0, \quad j \geq i. \quad (3.3)$$

Все связи (3.2) являются связями первого рода, связи (3.3) – второго рода, так что размерность фазового пространства системы равна

$$\mathcal{D}^{\min} = 2(D-1) + N(2D-3N-5).$$

Заметим, что при $N = N_0$ имеем

$$N_0(2D-3N_0-5) = \begin{cases} \frac{(D-2)(D-4)}{4} & \text{при четных } D, \\ \frac{(D-1)(D-5)}{4} & \text{при нечетных } D. \end{cases} \quad (3.4)$$

Собственные числа матрицы спиральности имеют совпадающие значения $m_i = c$.

Итак, рассмотренная система задает универсальную классическую модель безмассовой частицы при $N = 1$, $D = 4, 5$ [10]. При $D \geq 6$ система описывает безмассовую

частицу с N спиральностями, равными c , и нулевыми значениями остальных $N_0 - N$ спиральностей.

Как видно из (2.35), классические траектории системы обладают свойством

$$k_{N+a} = k_{N-a}, \quad k_{2N} = 0, \quad a = 1, \dots, N-1, \quad (3.5)$$

в то время как первые N кривизн k_i остаются произвольными. Таким образом, эта система имеет $N+1$ калибровочных степеней свободы, образующих, по-видимому, W_{N+2} -алгебру. Заметим, что это было проверено прямыми вычислениями для $N=1$ [14] и косвенными для $N=2$ [24] (во второй работе и было сделано приведенное предположение).

Введем комплексные координаты

$$\mathbf{z}_i = \frac{\mathbf{p}_i + \imath |c| \mathbf{e}_i}{\sqrt{2|c|}}, \quad \omega_2 = d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{x} + \imath \sum_i d\mathbf{z}_i \wedge d\bar{\mathbf{z}}_i. \quad (3.6)$$

В этих координатах гамильтониан системы задается выражением

$$\mathcal{H} = \frac{\tilde{s}}{2|c|} \left[\imath \sqrt{2} \mathbf{p}(\bar{\mathbf{z}}_1 - \mathbf{z}_1) + \imath \sum_{i=1}^{N-1} k_i (\mathbf{z}_i \bar{\mathbf{z}}_{i+1} - \mathbf{z}_{i+1} \bar{\mathbf{z}}_i) + k_N (\mathbf{z}_N \bar{\mathbf{z}}_N - |c|) \right]. \quad (3.7)$$

Связи (3.2), (3.3) принимают вид

$$\mathbf{z}_i \bar{\mathbf{z}}_j - |c| \delta_{ij} \approx 0, \quad \mathbf{p} \mathbf{z}_i \approx 0, \quad \mathbf{p} \bar{\mathbf{z}}_i \approx 0, \quad \mathbf{p}^2 \approx 0, \quad \mathbf{z}_i \mathbf{z}_j \approx 0, \quad \bar{\mathbf{z}}_i \bar{\mathbf{z}}_j \approx 0. \quad (3.8)$$

Отметим, что в координатах (3.6) уравнения движения голоморфны (мы полагаем $\tilde{s} = 1$):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \imath (\mathbf{z}_1 - \bar{\mathbf{z}}_1), \quad \dot{\mathbf{z}}_{i-1} = -\imath \delta_{1..i-1} \mathbf{p} + k_{i-1} \mathbf{z}_i - k_{i-2} \mathbf{z}_{i-2}, \\ \dot{\mathbf{z}}_N &= -\imath \delta_{1..N} \mathbf{p} + \imath k_N \mathbf{z}_N - k_{N-1} \mathbf{z}_{N-1}, \quad \dot{\mathbf{p}} = 0, \end{aligned} \quad (3.9)$$

что является косвенным подтверждением предположения о W -алгебраической природе калибровочных симметрий системы (см., например, [23]). Кроме того, уравнения движения для $\mathbf{z}_i$ можно свести к уравнению вида

$$\hat{L} = \sum_{i=0}^N \lambda_i(k_{i(\alpha)}) \frac{d^i \mathbf{z}_1}{d\tau^i} = 0,$$

что является другим указанием на W -алгебраическую природу калибровочных симметрий системы [25].

Далее найдем, какие значения принимают спиральности рассматриваемой системы после квантования. В частности, выясним, включает ли рассматриваемая система конформно-инвариантные представления группы Пуанкаре.

Чтобы провести квантование системы, положим

$$\hat{\mathbf{z}}_i = \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}_i}, \quad \hat{\mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}, \quad \hat{\mathbf{z}}_i = \mathbf{z}_i, \quad \hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p}. \quad (3.10)$$

В выбранной поляризации волновые функции имеют голоморфный вид $\Psi(\mathbf{p}, \mathbf{z}_i)$. Подействовав на волновую функцию операторами, отвечающими связям (3.8), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_i \frac{\partial \Psi(\mathbf{p}, \mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}_j} &= |c| \delta_{ij} \Psi(\mathbf{p}, \mathbf{z}), \quad \mathbf{p} \frac{\partial \Psi(\mathbf{p}, \mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}_j} = 0, \\ \mathbf{p}^2 \Psi(\mathbf{p}, \mathbf{z}) &= 0, \quad \frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{p}, \mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}_j \partial \mathbf{z}_i} = 0, \quad \mathbf{p} \frac{\partial \Psi(\mathbf{p}, \mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}_j} = 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Из требования однозначности волновой функции мы получаем условие квантования спиральностей

$$|c| = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.12)$$

с учетом которого получаем, что волновые функции имеют вид

$$\Psi(\mathbf{p}, \mathbf{z}_i) = \psi(\mathbf{p})_{A(1)A(2)\dots A(N)} z_1^{A(1)} z_2^{A(2)} \dots z_N^{A(N)}, \quad (3.13)$$

где введены обозначения $A(i) \equiv A_1^{(i)} \dots A_c^{(i)}$, $z_i^{A(i)} \equiv z_i^{A_1^{(i)}} \dots z_i^{A_c^{(i)}}$. Здесь $\psi(\mathbf{p}) \dots$ является тензором cN -го ранга, симметричным относительно перестановок индексов одного типа и антисимметричным по перестановкам индексов разных типов, симметрии задаются прямоугольной диаграммой Юнга с N строками и c столбцами:

A_1^1		A_c^1
A_1^2		A_c^2
$\vdots$		$\vdots$
A_1^N		A_c^N

Кроме того, тензор $\psi(\mathbf{p}) \dots$ должен удовлетворять условиям трансверсальности и безмассовости:

$$\mathbf{p}^2 \psi(\mathbf{p})_{A(1)B(2)\dots C(N)} = 0, \quad p^A \psi(\mathbf{p})_{\dots A \dots} = 0. \quad (3.14)$$

Таким образом, рассмотренная нами модель описывает безмассовые частицы целочисленной спиральности.

С учетом результата Зигеля [17] заключаем, что рассматриваемая модель приводит к конформно-инвариантным представлениям группы Пуанкаре лишь при

$$D = 2p, \quad N = \left[\frac{D-2}{2} \right],$$

поскольку спиральности системы принимают целые значения.

Итак, рассматриваемая нами система оказалась замечательной во многих отношениях: она является единственной в классе систем вида (1.5), которая порождает неприводимые представления группы Пуанкаре, включая конформно-инвариантные представления, и, наконец, имеет расширенную калибровочную симметрию W -алгебраического типа.

Возникает естественный вопрос: допускает ли наша модель формулировку на искривленном пространстве-времени? Очевидно, что в силу наличия вторичных связей модель не может быть переформулирована на произвольном пространстве-времени, что было показано на примере модели Плющая [12]. С другой стороны, модель Плющая допускает непротиворечивую формулировку на пространстве анти-де Ситтера (более полно, на пространствах постоянной кривизны), что представляется существенным с точки зрения теорий безмассовых полей высших спинов (см. обзор [26]).

Чтобы ответить на вопрос, наследует ли наша модель это важное свойство, сформулируем систему (1.5) на искривленном пространстве-времени. Модифицируем для этого формулы Френе:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{\tilde{s} d\tau} &= \mathbf{e}_1, & \frac{D\mathbf{e}_I}{\tilde{s} d\tau} &= k_I \mathbf{e}_{I+1} - k_{I-1} \mathbf{e}_{I-1}, & \frac{D}{d\tau} &\equiv \frac{d}{d\tau} + \hat{\Gamma}(\dot{\mathbf{x}}), \\ \mathbf{e}_I \mathbf{e}_J &= \delta_{IJ}, & \mathbf{e}_0 &= \mathbf{e}_{D+1} \equiv 0, \end{aligned} \quad (3.15)$$

где $\hat{\Gamma}_B^A \equiv \Gamma_{BC}^A \dot{x}^C$, а Γ_{BC}^A — символы Кристоффеля метрики подстилающего пространства $g_{AB}(x)$. Затем, совершив преобразования, аналогичные приведенным в разделе 2, получим гамильтонову систему

$$\begin{aligned} \omega_N &= d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{x} + \sum_{i=1}^N d\mathbf{p}_i \wedge d\mathbf{e}_i, \\ \mathcal{H} &= \tilde{s} \left[\pi \mathbf{e}_1 + \sum_{i=1}^N k_{i-1} (\phi_{i-1,i} - c_{i-1}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{k_N}{2c_N} (\Phi_{N,N} - c_N^2) + \sum_{i,j=1}^N d_{ij} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j - \delta_{ij}) \right], \end{aligned} \quad (3.16)$$

первичные связи которой заданы выражениями

$$\pi \mathbf{e}_1 \approx 0, \quad \pi \equiv \mathbf{p} - \Gamma, \quad \Gamma_A \equiv \sum_{i=1}^N \Gamma_{AB}^C p_{(i)C} e_i^B, \quad (3.17)$$

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j - \delta_{ij} \approx 0, \quad (3.18)$$

$$\mathbf{p}_N \mathbf{e}_N \approx 0, \quad \mathbf{p}_N \mathbf{e}_{i-2} \approx 0, \quad (3.19)$$

$$\phi_{i-1,i} \equiv \mathbf{p}_{i-1} \mathbf{e}_i - \mathbf{p}_i \mathbf{e}_{i-1} \approx c_{i-1}, \quad \Phi_{N,N} \equiv \mathbf{p}_N^2 - \sum_{i=1}^N (\mathbf{p}_N \mathbf{e}_i)^2 \approx c_N^2. \quad (3.20)$$

Нетрудно заметить, что алгебра функций ϕ_{ij} , Φ_{ij} , так же как и их скобки Пуассона с πe_i , πp_i , π^2 , не зависят от метрики подстилающего пространства, в то время как скобки Пуассона функций πe_i , πp_i , π^2 имеют вид

$$\begin{aligned} \{\pi e_i, \pi e_j\} &= \mathcal{R}(e_{[i}, e_{j]}), & \{\pi p_i, \pi p_j\} &= \mathcal{R}(p_{[i}, p_{j]}), \\ \{\pi e_i, \pi p_j\} &= \mathcal{R}(e_i, p_j), & \{\pi e_i, \pi^2\} &= 2\mathcal{R}(\pi, e_i), & \{\pi p_i, \pi^2\} &= 2\mathcal{R}(\pi, p_i), \end{aligned}$$

где

$$\mathcal{R}(a, b) \equiv \sum_{i=1}^N R(p_i | e_i, a, b).$$

Принимая во внимание выражение для тензора Римана пространств постоянной кривизны

$$R(a | b, c, d) = \frac{R_0}{D(D-1)} ((ac)(bd) - (ad)(bc)) \Rightarrow \mathcal{R}(a, b) = 0,$$

закключаем, что алгебра связей системы (3.16) на пространстве постоянной кривизны изоморфна алгебре связей системы на плоском пространстве (2.8).

Итак, модель безмассовой частицы с действием (1.6) допускает переформулировку на пространствах анти-де Ситтера. При этом сохраняются все ее перечисленные выше свойства: свойства классических траекторий и калибровочные симметрии, неприводимость представлений и совпадающие значения спиральностей. Более того, поскольку на пространствах анти-де Ситтера отношение неприводимых представлений к конформным преобразованиям такое же, как и на плоских пространствах [27], то остаются корректными наши выводы о конформной инвариантности рассмотренной модели.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы показали, что релятивистская система с действием (1.6) является исключительной и универсальной во многих отношениях. Во-первых, она является единственной системой, сформулированной в терминах координат исходного пространства-времени (произвольной размерности), которая порождает неприводимые представления группы Пуанкаре с ненулевым спином. Во-вторых, она описывает безмассовые частицы произвольной целой спиральности, представленные прямоугольными диаграммами Юнга. Таким образом, она включает в себя конформно-инвариантные представления с целочисленными спиральностями. В-третьих, она допускает формулировку на пространствах постоянной ненулевой кривизны, в частности на пространствах анти-де Ситтера, на которых формулируются теории полей высших спинов. И наконец, в-четвертых, рассмотренная модель обладает расширенной калибровочной W -симметрией.

Остались открытыми ряд естественных вопросов. Прежде всего, мы не установили точного соответствия между калибровочными симметриями рассмотренной системы и W_{N+2} -алгебрами, при том что точный ответ на этот вопрос существенно повлиял бы как на статус модели, так и на понимание геометрической природы W -алгебр. Мы не

описали в рамках рассматриваемой модели безмассовые поля полуцелой спиральности. Это можно было бы сделать, например, разрешением одной из связей второго рода путем спиноризации [7], аналогично процедуре, проведенной в работе [14] для безмассовой частицы при $D = 4$. Не рассмотрены способы суперсимметризации данной модели. Это было бы интересно не столько с точки зрения описания частиц полуцелого спина, сколько с супергеометрической точки зрения, а именно: каким инвариантам супергеометрии будут отвечать построенные лагранжианы и будут ли ассоциированы их калибровочные преобразования суперсимметричным расширениям W -алгебр. Не изучено отношение модели к процедуре размерной редукции и ее поведение на “границе” пространства анти-де Ситтера. Ответы на эти вопросы помогли бы лучше определить место предложенной модели в ряду лагранжевых моделей спиновых частиц. А вопрос об описании взаимодействия предложенной модели с внешними полями (высших спинов), возможно, нужно адресовать автору работы [28], в которой представлена неожиданная точка зрения на проблему взаимодействия частиц с полями высших спинов.

Благодарности. Автор считает своим долгом выразить благодарность всем, кто своими замечаниями и интересом содействовал завершению этой работы: М. Васильеву, обратившему внимание автора на присутствие в решениях рассматриваемой модели конформно-инвариантных представлений и поставившему вопрос о возможности формулировки модели на пространствах анти-де Ситтера; С. Ляховичу за обсуждение структуры спиновых частиц в высших размерностях и проблемы построения вторичных связей; участникам семинара теоретического отдела ФИАН и особенно Б. Л. Воронову и И. В. Тютину за дотошные расспросы и доброжелательную критику; А. Сегалу за массу полезных разъяснений. Отдельная благодарность О. Худавердян, оказавшему автору неоценимую поддержку постоянным вниманием к работе и инициированием изучения аспектов, связанных с классической геометрией.

Список литературы

- [1] *Ф. А. Березин, М. С. Маринов.* Письма в ЖЭТФ. 1975. Т. 21. С. 678; *F. A. Berezin, M. S. Marinov.* Ann. Phys. (N.Y.). 1977. V. 104. P. 336.
- [2] *R. Casabluoni.* Phys. Lett. B. 1976. V. 62. P. 49; *A. Barducci, R. Casabluoni, L. Lusanna.* Nucl. Phys. B. 1977. V. 124. P. 93; P. 521; *L. Brink, P. Di Vecchia, P. Howe.* Nucl. Phys. 1977. V. 118. P. 76.
- [3] *P. Howe, S. Penati, M. Pernici, P. Townsend.* Phys. Lett. B. 1988. V. 215. P. 555.
- [4] *D. M. Gitman.* Nucl. Phys. B. 1997. V. 488. P. 490.
- [5] *D. Sorokin.* Phys. Rep. 2000. V. 329. P. 1; *I. Bandos, J. Lukierski, D. Sorokin.* Phys. Rev. D. 2000. V. 61. P. 045002.
- [6] *А. А. Кириллов.* Элементы теории представлений. М.: Наука, 1972; *B. Kostant.* Quantization and unitary representations. Part I. Prequantization. In: Lect. Notes Math. V. 170. Lectures in Modern Analysis and Applications. III. Ed. C. T. Taam. Berlin: Springer, 1970. P. 87; *J. M. Souriau.* Structure des Systemes Dynamiques. Paris: Dunod, 1970.
- [7] *S. L. Lyakhovich, A. A. Sharapov, K. M. Shekhter.* Nucl. Phys. B. 1999. V. 537. P. 640; hep-th/0002247.
- [8] *A. M. Polyakov.* Nucl. Phys. B. 1986. V. 268. P. 406; Mod. Phys. Lett. A. 1988. V. 3. P. 112.

- [9] *M. S. Plyushchay*. Nucl. Phys. B. 1991. V. 362. P. 54; *Yu. A. Kuznetsov, M. S. Plyushchay*. Nucl. Phys. B. 1993. V. 389. P. 181.
- [10] *M. S. Plyushchay*. Mod. Phys. Lett. A. 1989. V. 4. P. 837; P. 2747; Phys. Lett. B. 1990. V. 243. P. 383.
- [11] *E. Ramos, J. Roca*. Nucl. Phys. B. 1996. V. 477. P. 606.
- [12] *D. Zoller*. Phys. Rev. Lett. 1990. V. 65. P. 2236.
- [13] *V. V. Nesterenko, A. Feoli, G. Scarpetta*. Class. Q. Grav. 1996. V. 13. P. 1201.
- [14] *E. Ramos, J. Roca*. Nucl. Phys. B. 1995. V. 436. P. 529.
- [15] *B. S. Skagerstam, A. Stern*. Nucl. Phys. B. 1987. V. 294. P. 636.
- [16] *W. Siegel*. Int. J. Mod. Phys. A. 1988. V. 3. P. 2707.
- [17] *W. Siegel*. Int. J. Mod. Phys. A. 1989. V. 4. P. 2015.
- [18] *А. П. Нерсисян*. ТМФ. 1998. Т. 117. № 1. С. 130; hep-th/9805009.
- [19] *A. Nersessian*. Massless particles and the geometry of curves. Classical picture. hep-th/9912081.
- [20] *A. Nersessian, E. Ramos*. Phys. Lett. B. 1998. V. 455. P. 123; Mod. Phys. Lett. A. 1999. V. 14. P. 2033; *A. Nersessian, R. Manvelyan, H. J. W. Mueller-Kirsten*. Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.). 2000. V. 88. P. 381; hep-th/9912061.
- [21] *М. М. Постников*. Лекции по геометрии. Семестр III: Гладкие многообразия. М.: Наука, 1987.
- [22] *M. V. Atre, A. P. Balachadran, T. R. Govindarajan*. Int. J. Mod. Phys. A. 1987. V. 2. P. 453.
- [23] *J.-L. Gervais, Y. Matsuo*. Commun. Math. Phys. 1993. V. 152. P. 317.
- [24] *E. Ramos, J. Roca*. Nucl. Phys. B. 1996. V. 452. P. 705.
- [25] *А. О. Радул*. Письма в ЖЭТФ. 1989. Т. 50. С. 341; Функци. анализ и его прилож. 1991. Т. 25. № 1. С. 33.
- [26] *M. Vasiliev*. Higher spin gauge theories: star-product and AdS spaces. hep-th/9910096.
- [27] *R. Metsaev*. Mod. Phys. Lett. A. 1995. V. 10. P. 1719.
- [28] *A. Segal*. Point particle in general background fields and generalized equivalence principle. hep-th/0008105.

Поступила в редакцию 28.VII.2000 г.