Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Н. Ганиходжаев, Ч. Х. Паа, Фазовые диаграммы
многокомпонентных решеточных моделей, *ТМФ*, 2006,
том 149, номер 2, 244–251

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf4231>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 16:54:26

© 2006 г.

Н. Н. Ганиходжаев^{*,†}, Ч. Х. Паа^{*}

ФАЗОВЫЕ ДИАГРАММЫ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ РЕШЕТОЧНЫХ МОДЕЛЕЙ

Рассмотрены q -компонентные модели как на целочисленной решетке $\mathbb{Z}^2$, так и на дереве Кэли второго порядка. Изучены фазовые диаграммы таких моделей.

Ключевые слова: дерево Кэли, мера Гиббса, фазовая диаграмма.

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема фазовых переходов представляет собой одно из наиболее интересных направлений современной статистической физики. Наряду с большим числом моделей, рассмотренных на целочисленных решетках и деревьях Кэли, для которых решена проблема фазовых переходов, существует ряд моделей, для которых эта проблема еще не решена.

Теория фазовых переходов при низких температурах для моделей, рассмотренных на так называемых классических решетках (на $\mathbb{Z}^d$), была развита Пироговым и Синаем [1], [2]. Основным методом в их исследованиях является контурный метод, который впервые был разработан Пайерлсом [3] при изучении модели Изинга, а позже формализован математически строго Гриффитсом [4] и Добрушиным [5]. Но этот подход еще не вполне разработан для моделей, определенных на решетках типа деревьев Кэли. Отметим работу [6], в которой для одного класса моделей с бинарным взаимодействием, определенных на дереве Кэли, введен контурный метод, применение которого позволило решить проблему фазовых переходов.

В наших предыдущих работах [7], [8] с помощью метода рекуррентных уравнений найдены точные решения для некоторых моделей с конкурирующими взаимодействиями, определенных на дереве Кэли. Этот метод, основанный на свойствах марковского случайного поля на дереве Кэли, позволяет относительно просто получить точные решения для моделей, определенных на дереве Кэли. Чтобы получить более содержательные решения для моделей, определенных на дереве Кэли, мы исследуем q -компонентную модель, определенную как на целочисленной решетке $\mathbb{Z}^2$,

^{*}Centre for Computational and Theoretical Sciences, Faculty of Science, IIUM, Kuala Lumpur, Malaysia. E-mail: nasirgani@hotmail.com, pahchinhee@hotmail.com

[†]Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан

так и на дереве Кэли, устанавливая некоторую параллель между ними. Основным методом является метод, разработанный Минлосом [9] для моделей, определенных на целочисленной решетке $\mathbb{Z}^2$.

2. q -КОМПОНЕНТНАЯ МОДЕЛЬ НА $\mathbb{Z}^2$

В этом разделе представлено обобщение результатов Минлоса для двух и трех-компонентных моделей [9] на случай q -компонентных моделей, где q – произвольное натуральное число. Мы будем следовать подходу, предложенному в работе [9]. Заметим, что приведенная ниже формула (2) уточняет соответствующую формулу из работы [9].

Рассмотрим спиновую модель с множеством возможных значений спина $\Phi = \{\nu_1, \dots, \nu_q\}$, $q \geq 2$, которую, следуя [6], будем называть q -компонентной моделью. Состояние такой системы на решетке $\mathbb{Z}^2$ определяется конфигурацией $\varphi = \{\varphi(x), x \in \mathbb{Z}^2\}$, $\varphi(x) \in \Phi$. Полная энергия H конфигурации $\varphi_\Lambda = \{\varphi(x), x \in \Lambda\}$ в конечном множестве $\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ при фиксированном граничном условии $\psi_{\Lambda'} = \{\psi(x), x \in \Lambda'\}$, где $\Lambda' = \mathbb{Z}^2 \setminus \Lambda$, имеет вид

$$H(\varphi_\Lambda \mid \psi_{\Lambda'}) = \sum_{\substack{x_1, x_2 \in \Lambda \\ |x_1 - x_2| = 1}} \epsilon(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) + \sum_{\substack{x \in \Lambda, y \in \Lambda' \\ |x - y| = 1}} \epsilon(\varphi(x), \psi(y)) + \sum_{x \in \Lambda} h(\varphi(x)). \quad (1)$$

Взаимодействия $\epsilon(\nu_i, \nu_j) = \epsilon_{ij}$, $i, j \in \{1, 2, \dots, q\}$, задаются симметричной матрицей q -го порядка, а набор $h(\nu_i) = h_i$, $i \in \{1, 2, \dots, q\}$, определяет q -мерный вектор.

Пусть $\psi_{\Lambda'}^{(i)} \equiv \nu_i$ – внешняя относительно множества Λ постоянная конфигурация для фиксированного $i \in \{1, 2, \dots, q\}$. Для каждого $i \in \{1, 2, \dots, q\}$ конфигурацию φ_Λ в конечном множестве $\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ доопределим до конфигурации на всей решетке $\mathbb{Z}^2$ с помощью i -й постоянной конфигурации и обозначим эту конфигурацию $\varphi_\Lambda^{(i)}$ и положим $\Omega_\Lambda^{(i)} = \{\varphi_\Lambda^{(i)}\}$. Граница $\Gamma(\varphi_\Lambda^{(i)})$ состоит из ребер дуальной решетки $\tilde{\mathbb{Z}}^2$, разделяющих соседние точки $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^2$ с различными значениями спина, $\varphi_\Lambda^{(i)}(x_1) \neq \varphi_\Lambda^{(i)}(x_2)$, а внутренняя граница $\Gamma(\varphi_\Lambda)$ состоит из ребер двойственной решетки $\tilde{\mathbb{Z}}^2$, разделяющих соседние точки $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^2$ с различными значениями спина, $\varphi_\Lambda(x_1) \neq \varphi_\Lambda(x_2)$.

Граница $\Gamma(\varphi_\Lambda^{(i)})$ (внутренняя граница $\Gamma(\varphi_\Lambda)$) состоит из $q(q-1)/2$ частей $\Gamma_a(\varphi_\Lambda^{(i)})$ ($\Gamma_a(\varphi_\Lambda)$), $a \in P_q = \{(r, s): r < s, r, s = 1, 2, \dots, q\}$, где для $a = (r, s) \in P_q$ Γ_{rs} – набор ребер двойственной решетки $\tilde{\mathbb{Z}}^2$, разделяющих соседние точки $x, y \in \mathbb{Z}^2$, для которых $\varphi_\Lambda^{(i)}(x) = \nu_r$ и $\varphi_\Lambda^{(i)}(y) = \nu_s$ ($\varphi_\Lambda(x) = \nu_r$ и $\varphi_\Lambda(y) = \nu_s$). Положим $P_q^{(i)} = \{(r, s): \text{или } r = i, \text{ или } s = i\}$.

Пусть $\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ – квадрат с центром в начале координат.

ТЕОРЕМА 1. Для любого множества $\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ и фиксированной i -й постоянной конфигурации $\psi_{\Lambda'}^{(i)}$ гамильтониан (1) можно переписать в виде

$$H(\varphi_\Lambda \mid \psi_{\Lambda'}^{(i)}) = \sum_{\substack{a \in P_q^{(i)}: \\ a=(k,i) \text{ или } (i,k)}} \left[(\epsilon_a - \epsilon_{kk}) |\Gamma_a(\varphi_\Lambda^{(i)})| + \frac{1}{2} (\epsilon_{kk} - \epsilon_{ii}) |\Gamma_a(\varphi_\Lambda)| \right] +$$

$$+ \sum_{a=(r,s) \notin P_q^{(i)}} \left(\epsilon_a - \frac{\epsilon_{rr} + \epsilon_{ss}}{2} \right) |\Gamma_a(\varphi_\Lambda^{(i)})| + \sum_{k=1}^q \mu_k |V_k(\varphi_\Lambda)|, \quad (2)$$

где $V_k(\varphi_\Lambda) = \{x \in \Lambda: \varphi_\Lambda(x) = \nu_k\}$ и $\mu_j = h_j + 4\epsilon_{jj}$, $j \in \{1, 2, \dots, q\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $q = 2$. Прямым вычислением (см. [9]) можно показать, что

$$H(\varphi_\Lambda | \psi_{\Lambda'}^{(1)}) = (\epsilon_{12} - \epsilon_{22}) |\Gamma(\varphi_\Lambda^{(1)})| + \frac{1}{2}(\epsilon_{22} - \epsilon_{11}) |\Gamma(\varphi_\Lambda)| + \sum_{k=1}^2 \mu_k |V_k(\varphi_\Lambda)| \quad (3)$$

и

$$H(\varphi_\Lambda | \psi_{\Lambda'}^{(2)}) = (\epsilon_{12} - \epsilon_{11}) |\Gamma(\varphi_\Lambda^{(2)})| + \frac{1}{2}(\epsilon_{11} - \epsilon_{22}) |\Gamma(\varphi_\Lambda)| + \sum_{k=1}^2 \mu_k |V_k(\varphi_\Lambda)|. \quad (4)$$

Здесь имеется только одно граничное ребро $\Gamma = \Gamma_a = \Gamma_{12}$.

Пусть $q = 3$. Используя выражения (3) и (4), легко проверить, что

$$\begin{aligned} H(\varphi_\Lambda | \psi_{\Lambda'}^{(1)}) &= (\epsilon_{12} - \epsilon_{22}) |\Gamma_{12}(\varphi_\Lambda^{(1)})| + \frac{1}{2}(\epsilon_{22} - \epsilon_{11}) |\Gamma_{12}(\varphi_\Lambda)| + \\ &+ (\epsilon_{13} - \epsilon_{33}) |\Gamma_{13}(\varphi_\Lambda^{(1)})| + \frac{1}{2}(\epsilon_{33} - \epsilon_{11}) |\Gamma_{13}(\varphi_\Lambda)| + \\ &+ (\epsilon_{23} - \epsilon_{33}) |\Gamma_{23}(\varphi_\Lambda^{(1)})| + \frac{1}{2}(\epsilon_{33} - \epsilon_{22}) |\Gamma_{23}(\varphi_\Lambda)| + \\ &+ \mu_1 |V_1(\varphi_\Lambda)| + \mu_2 |V_2(\varphi_\Lambda)| + \mu_3 |V_3(\varphi_\Lambda)|. \end{aligned}$$

Очевидно, что при фиксированном граничном условии $\psi_{\Lambda'}^{(1)}$ мы имеем $\Gamma_{23}(\varphi_\Lambda) = \Gamma_{23}(\varphi_\Lambda^{(1)})$, так что

$$\begin{aligned} H(\varphi_\Lambda | \psi_{\Lambda'}^{(1)}) &= (\epsilon_{12} - \epsilon_{22}) |\Gamma_{12}(\varphi_\Lambda^{(1)})| + \frac{1}{2}(\epsilon_{22} - \epsilon_{11}) |\Gamma_{12}(\varphi_\Lambda)| + \\ &+ (\epsilon_{13} - \epsilon_{33}) |\Gamma_{13}(\varphi_\Lambda^{(1)})| + \frac{1}{2}(\epsilon_{33} - \epsilon_{11}) |\Gamma_{13}(\varphi_\Lambda)| + \\ &+ \left(\epsilon_{23} - \frac{\epsilon_{22} + \epsilon_{33}}{2} \right) |\Gamma_{23}(\varphi_\Lambda^{(1)})| + \sum_{k=1}^3 \mu_k |V_k(\varphi_\Lambda)|. \end{aligned}$$

Продолжая таким образом, можно доказать формулу (2) для любого конечного q .

Распределение Гиббса на пространстве $\Omega_\Lambda = \Phi^\Lambda$ с граничной конфигурацией $\psi_{\Lambda'}^{(i)}$ определяется обычным способом:

$$P_{\Lambda, \beta, \mu}^{(i)}(\varphi_\Lambda | \psi_{\Lambda'}^{(i)}) = \frac{1}{Z_\Lambda(\beta, \psi_{\Lambda'}^{(i)})} e^{-\beta H(\varphi_\Lambda | \psi_{\Lambda'}^{(i)})}, \quad (5)$$

где

$$Z_\Lambda(\beta, \psi_{\Lambda'}^{(i)}) = \sum_{\varphi_\Lambda \in \Omega_\Lambda} e^{-\beta H(\varphi_\Lambda | \psi_{\Lambda'}^{(i)})}$$

– нормирующий множитель или статистическая сумма, а $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_q)$ – вектор из $\mathbb{R}^q$. Кроме того, мы предполагаем, что для любого $a = (r, s) \in P_q$ фиксированный константы $\delta_a^{(r)} = \epsilon_{rs} - \epsilon_{rr} > 0$ и $\delta_a^{(s)} = \epsilon_{rs} - \epsilon_{ss} > 0$, а параметр μ_i , $i = 1, 2, \dots, q$, может изменяться произвольным образом.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В следующем разделе для q -компонентной модели на дереве Кэли второго порядка мы аналогичным образом определим параметры μ_i , $i = 1, 2, \dots, q$. В этом случае мы будем предполагать, что параметры μ_i , $i = 1, 2, \dots, q$, могут изменяться только в некоторых подмножествах $\mathbb{R}^q$.

Если мы добавим некоторую константу b ко всем μ_i , $i = 1, 2, \dots, q$, то гамильтониан (2) увеличится на $b|\Lambda|$ и распределение $P_{\Lambda, \beta, \mu}^{(i)}$ не изменится при любом фиксированном i . Поэтому можно считать, что

$$\sum_{k=1}^q \mu_k = 0. \quad (6)$$

3. ФАЗОВЫЕ ДИАГРАММЫ ДЛЯ МОДЕЛЕЙ НА $\mathbb{Z}^2$

Заметим, что при $\beta \rightarrow \infty$ распределение $P_{\Lambda, \beta, \mu}^{(i)}$ переходит в распределение, сконцентрированное на конфигурации $(\varphi_{\Lambda}^{(i)})_{\min}$ – точке минимума гамильтониана $H_{\Lambda}^{(i)}$. Если постоянная конфигурация $\psi_{\Lambda}^{(i)}$ совпадает при каждом Λ с минимальной конфигурацией $(\varphi_{\Lambda}^{(i)})_{\min}$ гамильтониана $H_{\Lambda}^{(i)}$, она называется *основным состоянием*. Здесь $H_{\Lambda}^{(i)}(\varphi_{\Lambda})$ – энергия $H(\varphi_{\Lambda} | \psi_{\Lambda}^{(i)})$, соответствующая конфигурации $\psi_{\Lambda}^{(i)}$. Легко видеть, что конфигурация $(\psi_{\Lambda}^{(i)})_{\min}$ является основным состоянием тогда и только тогда, когда μ_i не превышает значения каждого из параметров $\mu_1, \dots, \mu_{i-1}, \mu_{i+1}, \dots, \mu_q$,

$$\mu_i \leq \min\{\mu_1, \dots, \mu_{i-1}, \mu_{i+1}, \dots, \mu_q\}. \quad (7)$$

Действительно, пусть выполняется соотношение (7). Новая конфигурация, образованная заменой значения ν_i в некоторых точках $x \in \Lambda$ на одно из значений из $\Phi \setminus \{\nu_i\}$, имеет непустую границу Γ . Так как $\delta_a^{(r)} > 0$, $\delta_a^{(s)} > 0$ и соответственно $\delta_a = (\delta_a^{(r)} + \delta_a^{(s)})/2 > 0$, то при такой замене $\sum_{k=1}^q \mu_k |V_k(\varphi_{\Lambda})|$ не убывает, а энергия новой конфигурации увеличивается. Если условие (7) нарушается и, например, $\mu_i > \mu_j$, то в квадрате $\Lambda_L = L \times L \subset \mathbb{Z}^2$ можно заменить значения конфигурации $\psi^{(i)}$ на ν_j , так что энергия новой конфигурации увеличится на величину $4(L+1)\delta_a - (\mu_i - \mu_j)L^2$, где $a = (i, j)$, если $i < j$, и $a = (j, i)$, если $j < i$, которая отрицательна при достаточно больших L .

Таким образом, из формулы (7) следует, что плоскость (6) значений параметров разделяется на $2^q - 1$ страт. Пусть $(i_1, i_2, \dots, i_q)$ – перестановка множества $(1, 2, \dots, q)$ и $r \in \{1, 2, \dots, q\}$. Имеются $\binom{q}{r}$ страт $S_{i_1, i_2, \dots, i_r}^0$ вида

$$\mu_{i_1} = \mu_{i_2} = \dots = \mu_{i_r} < \min(\mu_{i_{r+1}}, \dots, \mu_{i_q}) \quad (8)$$

при $r = 1, 2, \dots, q$.

Пусть $r = q$, т.е. все q значений совпадают. Тогда в силу (6) имеем

$$\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_q = 0.$$

В этом случае каждая конфигурация $\psi^{(i)}$, $i \in \{1, 2, \dots, q\}$, является основным состоянием. Для любого фиксированного $r \in \{2, 3, \dots, q-1\}$ в каждой страте $S_{i_1, i_2, \dots, i_r}^0$ конфигурации $\psi^{(i_1)}, \dots, \psi^{(i_r)}$ являются основными состояниями. При $r = 1$ только одна конфигурация $\psi^{(i)}$ является основным состоянием для стратегии S_i^0 , $i \in \{1, 2, \dots, q\}$.

Фазовая диаграмма выглядит следующим образом:

1) при $r = q$ найдется точка $(\mu_1^0, \mu_2^0, \dots, \mu_q^0)$, близкая к точке $(0, 0, \dots, 0)$ (страт $S_{1, 2, \dots, q}$), для которой существуют все q предельных распределений Гиббса;

2) при $r = q-1$ найдутся q таких кривых (страты $S_{i_1, i_2, \dots, i_r}$), выходящих из этой точки, что на каждой из них существуют $q-1$ различных предельных распределений Гиббса;

3) при $r = q-2$ найдутся $\binom{q}{2}$ таких двумерных поверхностей (страты $S_{i_1, i_2, \dots, i_r}$), граница которых состоит из кривых, определенных в п. 2, что на каждой из них существуют $q-2$ различных предельных распределений Гиббса;

.....
 q) при $r = 1$ найдутся q таких непересекающихся открытых подмножеств гиперплоскости (6) (страты S_i), ограниченных $(q-2)$ -мерными поверхностями, определенными в п. $q-1$, что на каждом из них существует только одно предельное распределение Гиббса.

Строгое (и более подробное) доказательство описанной фазовой диаграммы при больших β получено с использованием теории Пирогова–Синая. Оно будет рассмотрено в отдельной работе.

4. q -КОМПОНЕНТНАЯ МОДЕЛЬ НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Пусть $\Gamma^2 = (V, L)$ – дерево Кэли второго порядка, т.е. граф без циклов, из каждой вершины которого берут начало ровно три ребра, где V – набор вершин Γ^2 , а L – набор ребер Γ^2 . При фиксированном $x^0 \in V$ положим

$$\begin{aligned} W_n &= \{x \in V \mid d(x, x^0) = n\}, \\ V_n &= \bigcup_{m=0}^n W_m = \{x \in V \mid d(x, x^0) \leq n\}, \\ L_n &= \{l = \langle x, y \rangle \in L \mid x, y \in V_n\}, \end{aligned} \quad (9)$$

где расстояние $d(x, y)$, $x, y \in V$, представляет собой длину (или число ребер) кратчайшего пути, соединяющего x и y .

Рассмотрим модели, в которых спин принимает значения в множестве $\Phi = \{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_q\}$, $q \geq 2$. Гамильтониан q -компонентной модели имеет вид

$$H(\sigma) = \sum_{\langle x, y \rangle \in L} \lambda(\sigma(x), \sigma(y)) + \sum_{x \in V} h(\sigma(x)), \quad (10)$$

где $\sigma: x \in V \rightarrow \sigma(x) \in \Phi$ – конфигурация на V , $\lambda(\nu_i, \nu_j) = \lambda_{ij}$, $i, j = 1, 2, \dots, q$, – симметричная матрица q -го порядка и $h(\nu_i) = h_i$, $i = 1, 2, \dots, q$, – q -мерный вектор.

Пусть Ω – множество всех конфигураций на V , т.е. $\Omega = \Phi^V$, и для произвольного подмножества $\Lambda \subset V$ полная энергия конфигурации $\sigma_\Lambda = \{\sigma(x), x \in \Lambda\}$ с граничным условием $\omega_{\Lambda'} = \{\omega(x), x \in V \setminus \Lambda\}$, т.е. фиксированной на $\Lambda' = V \setminus \Lambda$ конфигурации, определяется следующим образом:

$$H(\sigma_\Lambda \mid \omega_{\Lambda'}) = \sum_{\langle x, y \rangle: x \in \Lambda, y \in \Lambda} \lambda(\sigma(x), \sigma(y)) + \sum_{\langle x, y \rangle: x \in \Lambda, y \in \Lambda'} \lambda(\sigma(x), \omega(y)) + \sum_{x \in \Lambda} h(\sigma(x)). \quad (11)$$

Пусть $\omega_{\Lambda'}^{(i)} \equiv \nu_i$, $i = 1, 2, \dots, q$, – i -я постоянная вне Λ конфигурация. Ниже мы будем рассматривать граничные условия только такого типа. Для каждого $i \in \{1, 2, \dots, q\}$ конфигурацию σ_Λ в конечном множестве $\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ доопределим до конфигурации на всем дереве V с помощью i -й постоянной конфигурации и обозначим эту конфигурацию $\sigma_\Lambda^{(i)}$ и положим $\Omega_\Lambda^{(i)} = \{\sigma_\Lambda^{(i)}\}$.

Для краткости обозначим конфигурацию σ_{V_n} как σ_n и $\omega_{V \setminus V_n}$ как ω_n .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Ребро $l = \langle x, y \rangle \in L_{n+1}$ называется *граничным ребром* конфигурации $\sigma_n^{(i)}$, если $\sigma_n^{(i)}(x) \neq \sigma_n^{(i)}(y)$. Набор всех граничных ребер конфигурации $\sigma_n^{(i)}$ называется *границей* $\partial(\sigma_n^{(i)}) = \Gamma$ этой конфигурации. Граница состоит из $q(q-1)/2$ различных частей, причем некоторые из них могут быть пустыми множествами,

$$\Gamma_a(\sigma_n^{(i)}), \quad a \in P_q = \{(r, s): r, s = 1, 2, \dots, q, \quad r < s\},$$

где при $a = \{r, s\}$ Γ_{rs} представляет собой набор ребер $l = \langle x, y \rangle \in L_{n+1}$ таких, что $\sigma_n^{(i)}(x) = \nu_r$ и $\sigma_n^{(i)}(y) = \nu_s$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что ребро $l \in \Gamma$ является *внутренним*, если $l \in L_n$. Набор всех внутренних ребер называется *внутренней границей* $\partial(\sigma_n) = \Gamma(\sigma_n)$. Она также состоит из $q(q-1)/2$ различных частей $\Gamma(\sigma_n) \equiv \Gamma(\sigma_n^{(i)}) \cap L_n$.

Положим $P_q^{(i)} = \{(r, s): r = i \text{ или } s = i\}$ и $\tilde{P}_q^{(i)} = P_q \setminus P_q^{(i)}$. Очевидно,

$$P_q^{(i)} = \{(1, i), \dots, (i, i-1), (i, i+1), \dots, (i, q)\}, \quad i = 1, 2, \dots, q.$$

Пусть $V_n^{(j)}(\sigma)$ – набор всех точек $x \in V_n$, для которых $\sigma(x) = \nu_j$, где $j = 1, 2, \dots, q$.

ТЕОРЕМА 2. Для любого положительного целого n и фиксированной i -й постоянной конфигурации $\omega_n^{(i)} \equiv \omega_{V \setminus V_n}^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, q$, гамильтониан (11) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} H(\sigma_n \mid \omega_n^{(i)}) = & \sum_{\substack{a \in P_q^{(i)}: \\ a = (k, i) \text{ или } (i, k)}} \left[(\lambda_a - \lambda_{kk}) |\Gamma_a(\sigma_n^{(i)})| + \frac{1}{2} (\lambda_{kk} - \lambda_{ii}) |\Gamma_a(\sigma_n)| \right] + \\ & + \sum_{\substack{a = (r, s) \in \tilde{P}_q^{(i)} \\ r, s \neq i}} \left(\lambda_a - \frac{\lambda_{rr} + \lambda_{ss}}{2} \right) |\Gamma_a(\sigma_n^{(i)})| + \sum_{k=1}^q \mu_k |V_n^{(k)}(\sigma)|, \end{aligned} \quad (12)$$

где $\mu_k = h_k + 3\lambda_{kk}$, $k = 1, 2, \dots, q$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Выражения (2) и (12) имеют единственное различие, а именно: если в первом случае $\mu_i = h_i + 4\epsilon_{ii}$, то во втором $\mu_i = h_i + 3\lambda_{ii}$. Во втором случае, как и в первом, легко видеть, что $\omega^{(i)} \equiv \nu_i$ является основным состоянием, если μ_i не превышает значения каждого из параметров $\mu_1, \dots, \mu_{i-1}, \mu_{i+1}, \dots, \mu_q$, т.е.

$$\mu_i \leq \min_{j=1,2,\dots,q, j \neq i} \mu_j. \quad (13)$$

Действительно, пусть (13) выполнено. Конфигурация, полученная заменой значения ν_i в некоторых точках $x \in V_n$ на одно из значений из $\Phi \setminus \{\nu_i\}$, имеет непустую границу Γ . Так как $\delta_a > 0$ и при такой замене сумма $\sum_{k=1}^q \mu_k |V_n^{(k)}|$ не убывает, энергия новой конфигурации увеличится.

Заметим, что для q -компонентной модели на $\mathbb{Z}^2$ условие (7) является также достаточным условием, т.е. если $\omega^{(i)}$ – основное состояние, то неравенство (7) выполнено (см. выше). Доказательство аналогичного утверждения для q -компонентной модели на дереве Кэли в общем случае представляет собой достаточно сложную задачу. Ниже мы рассмотрим модель (11) при условии $h(\nu_1) = \dots = h(\nu_q) = h$, являющуюся моделью с однородным внешним магнитным полем.

Для простоты сначала рассмотрим случай $q = 2$. Пусть $\delta_{12}^{(1)} = \lambda_{12} - \lambda_{11}$, $\delta_{12}^{(2)} = \lambda_{12} - \lambda_{22}$, $\delta_{12} = (\delta_{12}^{(1)} + \delta_{12}^{(2)})/2$ – фиксированные положительные числа. Положим

$$A_2 = \left\{ (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2 : |\mu_1 - \mu_2| < \delta_{12} \right\}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для двухкомпонентной модели в однородном внешнем магнитном поле постоянная конфигурация $\omega^{(1)}$ ($\omega^{(2)}$) является основным состоянием тогда и только тогда, когда при $(\mu_1, \mu_2) \in A_2$ выполняется неравенство $\mu_1 \leq \mu_2$ ($\mu_2 \leq \mu_1$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуется доказать лишь достаточность этого условия. Действительно, если условие $\mu_1 \leq \mu_2$ нарушается, то в конечном множестве $\Lambda \subset V$ можно изменить значения конфигурации $\omega^{(1)}$ на ν_2 и получить увеличение энергии на величину

$$\begin{aligned} I_\Lambda &= (\lambda_{12} - \lambda_{22}) |\Gamma_{12}(\sigma_n^{(1)})| + \frac{1}{2} (\lambda_{22} - \lambda_{11}) |\Gamma_{12}(\sigma_n)| - (\mu_1 - \mu_2) |\Lambda| = \\ &= (\lambda_{12} - \lambda_{22}) |\Gamma_{12}(\sigma_n^{(1)})| - (\lambda_{11} - \lambda_{22}) \left[\frac{1}{2} |\Gamma_{12}(\sigma_n)| + |\Lambda| \right], \end{aligned}$$

поскольку $\mu_1 - \mu_2 = (\lambda_{11} + 3h) - (\lambda_{22} + 3h) = \lambda_{11} - \lambda_{22}$, где n – положительное целое число такое, что $V_n \supset \Lambda$ и $\Gamma_{12}(\sigma_n^{(1)}) = \Gamma_{12}(\sigma_n)$.

Если конечное множество $\Lambda \subset V$ является связной компонентой дерева Кэли, то легко показать, что $|\Lambda| = |\Gamma_{12}(\sigma_n)| - 2$. Тогда

$$I_\Lambda = (\lambda_{12} - \lambda_{22}) |\Gamma_{12}(\sigma_\Lambda^{(1)})| - (\lambda_{11} - \lambda_{22}) \left[\frac{3}{2} |\Gamma_{12}(\sigma_\Lambda)| - 2 \right].$$

Поскольку $(\mu_1, \mu_2) \in A_2$, значение I_Λ должно быть отрицательным. Это противоречие завершает доказательство.

Положим

$$A_q = \bigcap_{\substack{a \in P_q \\ a=(r,s)}} \left\{ (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_q) \in \mathbb{R}^q : |\mu_r - \mu_s| < \delta_{rs} \right\}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для q -компонентной модели в однородном внешнем магнитном поле постоянная конфигурация $\omega^{(i)}$ является основным состоянием тогда и только тогда, когда для $\mu_1, \dots, \mu_q \in A_q$ выполняется неравенство

$$\mu_i \leq \min_{j=1,2,\dots,q, j \neq i} \mu_j.$$

5. ФАЗОВЫЕ ДИАГРАММЫ ДЛЯ МОДЕЛЕЙ НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Из приведенного выше рассмотрения следует, что для всех $\mu = \{\mu_1, \dots, \mu_q\} \in A_q$ фазовая диаграмма для q -компонентных моделей на дереве Кэли второго порядка выглядит как фазовая диаграмма для модели на $\mathbb{Z}^2$, только все соответствующие страты рассматриваются в множестве A_q . Строгое и более подробное доказательство описываемой фазовой диаграммы будет представлено в отдельной работе. Заметим, что рассмотренные в [6] модели на дереве Кэли удовлетворяют условию предложения 2.

Благодарности. Один из авторов (Ч. Х. Паа) благодарит Faculty of Science, International Islamic University Malaysia, за гостеприимство. Данное исследование частично поддержано Фондом SAGA Академии наук Малайзии (грант № Р 77с) и грантами Ф-1.1.2, Ф-2.1.56 Республики Узбекистан.

Список литературы

- [1] С. А. Пирогов, Я. Г. Синай, *ТМФ*, **25**:3 (1975), 358–359.
- [2] С. А. Пирогов, Я. Г. Синай, *ТМФ*, **26**:1 (1976), 61–76.
- [3] R. Peierls, *Proc. Camb. Philos. Soc.*, **32** (1936), 477–481.
- [4] R. B. Griffiths, *Phys. Rev. A*, **136**:2 (1964), 437–439.
- [5] Р. Л. Добрушин, *Теор. вероятн. и ее примен.*, **10** (1965), 209–230.
- [6] U. A. Rozikov, *Lett. Math. Phys.*, **71**:5 (2005), 27–38.
- [7] Н. Н. Ганиходжаев, *ТМФ*, **130**:3 (2002), 493–499.
- [8] N. N. Ganikhodjaev, C. H. Pahl, M. R. B. Wahiddin, *J. Phys. A*, **36** (2003), 4283–4289.
- [9] R. A. Minlos, *Introduction to Mathematical Statistical Physics*, University Lecture Series, **19**, AMS, Providence, RI, 2000.

Поступила в редакцию 26.12.2005