Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Башкиров, Энтропия Реньи как статистическая энтропия для сложных систем, *ТМФ*, 2006, том 149, номер 2, 299–317

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf4235>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 15:40:40

ЭНТРОПИЯ РЕНЬИ КАК СТАТИСТИЧЕСКАЯ ЭНТРОПИЯ ДЛЯ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

Для описания сложных систем предлагается использовать энтропию Реньи, зависящую от параметра q ($0 < q \leq 1$) и совпадающую с энтропией Гиббса–Шеннона при $q = 1$. Принцип максимума энтропии Реньи позволяет получить распределение Реньи, переходящее в каноническое распределение Гиббса при $q = 1$. Термодинамическая энтропия сложной системы определяется как энтропия Реньи для распределения Реньи. В отличие от обычной энтропии, основанной на энтропии Гиббса–Шеннона, эта энтропия возрастает с увеличением отклонения распределения от распределения Гиббса (с ростом параметра $\eta = 1 - q$) и достигает своего максимума при максимально возможном значении $\eta_{\max}$, при этом распределение Реньи становится степенным распределением. Величину η можно рассматривать как параметр порядка. При $\eta = 0$ производная энтропии системы по η испытывает скачок, т.е. имеет место своего рода фазовый переход в более упорядоченное состояние. В этом фазовом состоянии эволюция к дальнейшей упорядоченности системы сопровождается ростом энтропии, что, согласно второму закону термодинамики, означает предпочтительность естественной эволюции в направлении самоорганизации.

Ключевые слова: энтропия Реньи, сложные системы, самоорганизация, фазовый переход, степенное распределение Ципфа–Парето, второй закон термодинамики, направление эволюции.

1. ВВЕДЕНИЕ

Привлечение информационного подхода к статистической механике позволило дать новое обоснование равновесных распределений Гиббса [1] и построить неравновесную статистическую термодинамику систем, выведенных из состояния теплового равновесия [2]. В основе этого подхода лежит принцип условного максимума информационной энтропии Гиббса–Шеннона при различных дополнительных ограничениях. При этом под информационной энтропией Гиббса–Шеннона подразумевается, по существу, статистическая энтропия Гиббса, хорошо известная в статистической механике.

*Институт динамики геосфер РАН, Москва, Россия

Дальнейшее развитие информационного подхода к описанию существенно неравновесных систем, в которых может происходить самоорганизация структур, привело к поиску альтернативных форм информационных энтропий. Назовем среди них энтропию Реньи [3], [4] и ее линеаризованную форму – энтропию Хаврда–Чарвата–Тсаллиса [5], [6], которые успешно использовались при изучении различных физических систем. В частности, энтропия Реньи применялась к адронным системам [7], дробной диффузии [8], многофрактальным системам [9], турбулентности [10], анализу землетрясений [11] и др.

Исходное определение статистической энтропии для равновероятного распределения системы по W состояниям задается формулой Больцмана

$$S_W^{(B)} = \ln W. \quad (1)$$

Здесь и далее энтропия записывается в виде безразмерной величины без учета постоянной Больцмана k_B . Кроме того, используется натуральный логарифм вместо логарифма по основанию 2, принятого в теории информации.

Такое определение энтропии справедливо не только для физических систем, но и для значительно более широкого класса социальных, биологических, коммуникационных и других систем, изучающихся статистическими методами. Единственное, но очень важное ограничение справедливости этого выражения состоит в условии равновероятности всех W состояний системы (в статистической механике подобные системы описываются микроканоническим ансамблем), согласно которому вероятности состояний $p_i = p_W = 1/W$ (для всех $i = 1, 2, \dots, W$), что позволяет переписать формулу Больцмана (1) в виде

$$S_W^{(B)} = -\ln p_W. \quad (2)$$

Если вероятности p_i различны, то можно ввести ансамбль микроканонических подсистем таких, что для каждой i -й подсистемы все W_i ее состояний имеют равные вероятности p_i , и энтропия Больцмана данной подсистемы есть $S_i^{(B)} = -\ln p_i$. Простое усреднение энтропий Больцмана $S_i^{(B)}$ ансамбля подсистем приводит к энтропии Гиббса–Шеннона

$$S^{(G)} = \langle S_i^{(B)} \rangle_p \equiv -\sum_i^W p_i \ln p_i. \quad (3)$$

Именно такой вывод выражения для $S^{(G)}$ часто приводится в учебниках (см., например, [12], [13]).

Согласно принципу максимума энтропии [1] равновесное распределение вероятностей $p = \{p_i\}$ должно обеспечивать максимальность энтропии Гиббса–Шеннона $S^{(G)}(p) = -\sum_i p_i \ln p_i$ при следующих дополнительных условиях: распределение должно удовлетворять условию нормировки $\sum_i p_i = 1$ и обеспечивать правильную величину заданного заранее среднего значения энергии

$$U = \langle H \rangle_p \equiv \sum_i^W H_i p_i, \quad (4)$$

где $H = \{H_i\}$ – гамильтониан системы.

Таким образом, распределение $\{p_i\}$ определяется требованием максимальности функционала

$$L_G(p) = - \sum_i^W p_i \ln p_i - \alpha_0 \sum_i^W p_i - \beta_0 \sum_i^W H_i p_i, \quad (5)$$

где α_0 и β_0 – множители Лагранжа. Таким распределением оказывается каноническое распределение Гиббса

$$p_i^{(G)} = Z_G^{-1} e^{-\beta_0 H_i}, \quad (6)$$

в котором параметр β_0 определяется из условия соответствия термостатистике Гиббса классической термодинамике: $\beta_0 = 1/(k_B T_0)$, где T_0 – термодинамическая температура. Подстановка распределения Гиббса в информационную энтропию Гиббса–Шеннона $S^{(G)}$ дает термодинамическую энтропию $\tilde{S}^{(G)} = k_B S^{(G)}(p^{(G)})$.

Однако при изучении сложных физических систем и явлений (например, фрактальных и самоорганизующихся структур, турбулентности), а также различных социальных и биологических систем обнаруживается, что распределение Гиббса не обеспечивает согласия с наблюдаемыми явлениями. В частности, оно не совместимо со степенным распределением, характерным для подобных систем [14]. Можно ввести в принцип максимальности энтропии дополнительные условия для искомого распределения, например, потребовать, чтобы средние величины $\langle X^{(m)} \rangle_p$ для некоторых физических параметров $X^{(m)}$ системы принимали предписанные значения. Это приводит к обобщенному распределению Гиббса с дополнительными членами в показателе экспоненты (6), но не меняет экспоненциальную форму распределения.

Монтролл и Шлезингер [15] исследовали эту проблему и нашли, что принцип максимальности энтропии для энтропии Гиббса–Шеннона может привести к степенному распределению лишь при очень искусственном условии, которое, как они сами отметили, “не может считаться подходящим для использования в качестве одного из дополнительных условий”.

Таким образом, степенные распределения, столь характерные для сложных систем, оказываются вне рамок принципа максимальности энтропии Гиббса–Шеннона, на котором в настоящее время основывается как равновесная, так и неравновесная статистическая термодинамика (см., например, [2]).

В разделе 2 приводится “физическое обоснование” иной формы энтропии, а именно энтропии Реньи. Ее аксиоматическому обоснованию посвящен раздел 3. В разделе 4 из условия максимальности энтропии Реньи выводится распределение Реньи, которое детально исследуется для модельного степенного гамильтониана (приближения идеального газа). Подстановка этого распределения в определение энтропии Реньи дает термодинамическую энтропию в термостатистике Реньи. На базе этой энтропии в разделе 5 найдена физическая температура, а в разделе 6 показано, что переход от обычной термостатистики Гиббса к термостатистике Реньи носит характер фазового перехода упорядочения с параметром порядка $\eta = 1 - q$. В разделе 7 показано, что, по крайней мере в случае степенного гамильтониана, термодинамическая энтропия Реньи максимальна при наибольшем возможном значении параметра порядка η (при этом распределение Реньи становится степенным распределением),

в то время как обычная энтропия максимальна при $\eta = 0$ и убывает с ростом η . Отсюда следует очень важный вывод о том, что если в качестве статистического определения энтропии выбрать не выражение Гиббса–Шеннона, а более общую форму Реньи, то эволюция системы в более упорядоченные состояния (самоорганизация), сопровождаемая ростом термодинамической энтропии, в соответствии со вторым началом термодинамики окажется предпочтительнее деградации.

2. СВОБОДНАЯ ЭНЕРГИЯ И ЭНТРОПИЯ РЕНЬИ

При обосновании степенных распределений принцип максимальности энтропии сам по себе не вызывает сомнений, так как он является своего рода “принципом максимальной честности”, согласно которому искомое распределение должно лишь обеспечивать правильные значения средних величин, а в остальном должно быть максимально неопределенным. В противном случае мы рискуем внести ложную информацию в описание системы.

В этом случае остается лишь поставить вопрос о выборе формы информационной энтропии. Поиск направления пути модификации энтропии Гиббса–Шеннона начнем с рассмотрения экстремальных свойств равновесных состояний в термодинамике.

Прямое вычисление средней энергии системы дает внутреннюю энергию (4), ее экстремум характеризует равновесное состояние покоя механической системы, но не термодинамической системы, обменивающейся энергией с термостатом. Равновесное состояние последней характеризуется экстремумом свободной энергии F . Ее можно вывести без привлечения термодинамических соотношений непосредственно из гамильтониана системы H с помощью производящей функции [16] для случайной величины H_i (энергии i -го состояния системы)

$$\Phi_H(\lambda) = \sum_i^W e^{\lambda H_i}, \quad (7)$$

где λ – произвольная постоянная. Тогда кумулянтная производящая функция

$$\Psi_H(\lambda) = \ln \Phi_H(\lambda) \quad (8)$$

становится свободной энергией Гельмгольца F , если умножить ее на $1/\lambda$ и положить $\lambda = -1/(k_B T_0)$. Введение множителя $1/\lambda$ обеспечивает предельный переход свободной энергии F во внутреннюю энергию U , представляющую собой простое среднее значение гамильтониана. Действительно, при $\lambda \rightarrow \infty$ ($T_0 \rightarrow 0$) с помощью правила Лопиталя получаем

$$F(T_0)|_{T_0 \rightarrow 0} = \lim_{T_0 \rightarrow 0} \left[-k_B T_0 \ln \sum_i e^{-H_i/(k_B T_0)} \right] = \sum_i p_i^{(G)} H_i = U.$$

Вернемся к проблеме вида энтропии для открытых сложных систем. Для этих систем характерен обмен как энергией, так и энтропией с окружающей средой. В качестве иллюстрации приведем описание Кадомцева [17] самоорганизованной структуры в плазме сферического тлеющего разряда: “Плазменный шар превращает часть

хорошо организованной электрической энергии в тепло, которое рассеивается затем в окружающем пространстве. Внутри шара все время рождается энтропия, которая вытекает затем вместе с теплом в окружающее пространство. Если “запереть” поток энтропии, то и плазменный шар “умрет”. Из плазменного шара все время нужно удалять “шлак” из вновь рождаемой энтропии”.

На интенсивный обмен информационной энтропией с окружающей средой как на наиболее характерное свойство самоорганизующихся систем указывает и Хакен [12].

В этой связи может оказаться плодотворным введение понятия энтропийного термостата (*энтростата*, или *информационного термостата*) и рассмотрение взаимодействия с ним как одного из условий самоорганизации сложной системы.

В результате такого взаимодействия система не может достичь состояния термодинамического равновесия, которое характеризуется максимумом энтропии Гиббса–Шеннона (3), полученной простым усреднением энтропии Больцмана. Необходимо найти другую функцию, экстремум которой может характеризовать стационарное состояние, возникающее из-за взаимодействия с энтростатом.

Можно попробовать построить своего рода “свободную энтропию” на базе энтропии Больцмана тем же способом, какой был продемонстрирован выше при выводе свободной энергии для системы, взаимодействующей с термостатом. Производящая функция вводится как

$$\Phi_S(\lambda) = \sum_i e^{\lambda S_i^{(B)}}. \quad (9)$$

Тогда кумулянтная производящая функция принимает вид

$$\Psi_S(\lambda) = \ln \Phi_S(\lambda) = \ln \sum_i p_i^{-\lambda}. \quad (10)$$

Для построения на базе этого выражения обобщенной энтропии необходимо домножить его на зависящий от λ множитель, который обеспечит предельный переход новой энтропии в энтропию Гиббса–Шеннона. Таким множителем является $1/(1 + \lambda)$. Действительно, новое λ -семейство энтропий

$$S(\lambda) = \frac{1}{1 + \lambda} \ln \sum_i p_i^{-\lambda} \quad (11)$$

включает в себя энтропию Гиббса–Шеннона как частный случай, если $\lambda \rightarrow -1$.

Итак, оказалось, что искомая “свободная энтропия” совпала с известной энтропией Реньи [3], [4]. Ее принято записывать с параметром $q = -\lambda$ в виде

$$S_q^{(R)}(p) = \frac{1}{1 - q} \ln \sum_i p_i^q. \quad (12)$$

Реньи ввел эту энтропию на основе чисто формальных рассуждений [4]. Он искал наиболее общий класс энтропий, удовлетворяющих требованию аддитивности для статистически независимых систем и получаемых в форме обобщенных средних Колмогорова–Нагумо [18]

$$\langle x \rangle_\phi = \phi^{-1} \left(\sum_i p_i \phi(x_i) \right), \quad (13)$$

где $\phi(x)$ – произвольная непрерывная и строго монотонная функция, $\phi^{-1}(x)$ – обратная ей и $x_i = S_i^{(B)}$.

Реньи доказал, что постулат аддитивности энтропии существенно ограничивает класс возможных функций $\phi(x)$ в соотношении (13). Реально возможны лишь два типа функций: $\phi(x) = cx + d$ и $\phi(x) = ce^{(1-q)x}$ (c и d – произвольные постоянные, $q > 0$). Для линейной функции $\phi(x)$ обобщенное среднее Колмогорова–Нагумо становится обычным линейным средним и формула (13) приводит к энтропии Гиббса–Шеннона как к усредненной энтропии Больцмана в общепринятом смысле.

С другой стороны, экспоненциальная функция Колмогорова–Нагумо $\phi(x)$ приводит к энтропии Реньи (12). С физической точки зрения такой выбор $\phi(x)$ кажется случайным, если не связать его с установленным выше фактом, что такая же экспоненциальная функция энтропии Больцмана приводит к энтропии Реньи как своего рода “свободной энтропии” системы. Кроме того, этот факт свидетельствует в пользу того, что энтропия Реньи, полученная таким же образом, что и свободная энергия, будет экстремальна в стационарном состоянии сложной системы, интенсивно обменивающейся энтропией с окружающей средой. Это утверждение будет обосновано в следующем разделе.

Различные свойства энтропии Реньи рассмотрены в книгах [3], [19], [20]. Она положительна ($S^{(R)} \geq 0$), выпукла вверх (вогнута) при $q \leq 1$ и переходит в энтропию Гиббса–Шеннона в результате предельного перехода $\lim_{q \rightarrow 1} S^{(R)} = S^G$ и в энтропию Больцмана (1) при любых q в случае равновероятности распределения p .

В случае $|\sum_i p_i^q - 1| \ll 1$ (что вследствие нормировки распределения $\{p_i\}$ соответствует условию $|1 - q| \ll 1$) можно ограничиться линейным членом разложения логарифма в $S^{(R)}(p)$ по этой разности, тогда $S^{(R)}(p)$ переходит в энтропию Тсаллиса [6]

$$S^{(T)}(p) = \frac{1}{1-q} \left(\sum_i^W p_i^q - 1 \right). \quad (14)$$

Линеаризация логарифма приводит к неэкстенсивности энтропии Тсаллиса, т.е. в случае двух статистически независимых систем, обладающих W_1 - и W_2 -состояниями, соответственно, полная энтропия $S(W_1 W_2) \neq S(W_1) + S(W_2)$. Это свойство провозглашается Тсаллисом и его последователями как важное достоинство энтропии Тсаллиса при исследовании различных неэкстенсивных систем (см. веб-сайт [21]). Вышеприведенное ограничение $|1 - q| \ll 1$ при этом не учитывается. В результате энтропия Тсаллиса оказывается несовместной с энтропией Больцмана (1), так как последняя была выведена именно из условия экстенсивности $S(W_1 W_2) = S(W_1) + S(W_2)$.

3. АКСИОМАТИКА ИНФОРМАЦИОННОЙ ЭНТРОПИИ

Приведенные в предыдущих разделах физические аргументы могут показаться недостаточно убедительными для пересмотра традиционной формы информационной энтропии Гиббса–Шеннона.

Наиболее строгий подход к обоснованию новой информационной энтропии основывается на построении ее аксиоматики.

Аксиоматическое обоснование энтропии Гиббса–Шеннона было впервые предложено Шенноном [22]. Его аксиомы получили дальнейшее развитие в работе Хинчина [23], который предложил следующую систему аксиом.

1. Энтропия $S(p)$ является функцией только вероятностей p_i и должна принимать максимальное значение в случае однородного распределения вероятностей $p_i = 1/W$, $i = 1, 2, \dots, W$, другими словами, $S(1/W, \dots, 1/W) \geq S(p')$, где p' – любое другое распределение.

2. Пусть сложная система Σ состоит из главной подсистемы Σ^I и вспомогательной подсистемы Σ^{II} . Совместная вероятность состояния системы Σ имеет вид

$$p_{ij} = Q(j|i)p_i^I, \quad (15)$$

где $Q(j|i)$ – условная вероятность обнаружить подсистему Σ^{II} в состоянии j , если главная подсистема Σ^I находится в состоянии i . Тогда

$$S(p) = S(p^I) + S(p^I|p^{II}), \quad (16)$$

где $S(p^I|p^{II}) = \sum_i p_i^I S(Q|i)$ – условная энтропия, а $S(Q|i)$ – частная условная энтропия подсистемы Σ^{II} при условии, что подсистема Σ^I находится в i -м состоянии.

3. Энтропия $S(p)$ остается неизменной при добавлении к набору состояний нового состояния, имеющего нулевую вероятность: $S(p_1, \dots, p_W) = S(p_1, \dots, p_W, 0)$.

На основе этих аксиом Хинчин доказал теорему единственности энтропии Гиббса–Шеннона.

При доказательстве Хинчин добавил ко второй из своих аксиом два дополнительных предположения. Он предположил, что все G состояний составной системы Σ равновероятны, т.е. $p_{ij} = 1/G$ для всех i и j , откуда получил, что

$$S(p) = \ln G. \quad (17)$$

Кроме того, он предположил, что каждому i -му состоянию главной подсистемы Σ^I соответствуют G_i^{II} ($\sum_i G_i^{II} = G$) равновероятных состояний подсистемы Σ^{II} . Именно это предположение вызывает наибольшее сомнение. Действительно, распределение по состояниям подсистемы Σ^{II} , взаимодействующей с главной подсистемой Σ^I , будет скорее каноническим, чем равновероятным. Тем не менее, положив $Q(j|i) = 1/G_i^{II}$ для $i = 1, \dots, W$ и $j \in G_i^{II}$, Хинчин получил

$$S(Q|i) = \ln G_i^{II}, \quad G_i^{II} = G p_i^I, \quad S(p^I|p^{II}) = \ln G + \sum_i p_i^I \ln p_i^I. \quad (18)$$

Подстановка (17) и (18) в (16) приводит к энтропии главной подсистемы Σ^I в виде $S(p^I) = -\sum_i^W p_i^I \ln p_i^I$, т.е. в форме энтропии Гиббса–Шеннона.

В последние годы было сделано несколько попыток модификации второй аксиомы Хинчина с целью построения аксиоматического обоснования других форм энтропии.

В частности, Абе [24] предложил такую замену второй аксиомы Хинчина, которая приводит к энтропии Тсаллиса. Введя параметр $q > 0$, он сформулировал эту аксиому в виде

$$S_q(p) = S_q(p^I) + S_q(p^I|p^{II}) + (1 - q)S_q(p^I)S_q(p^I|p^{II}), \quad (19)$$

где

$$S_q(p^I|p^{II}) = \sum_i P_i^I(q) S(Q|i), \quad (20)$$

а $P_i^I(q)$ есть так называемое эскортное распределение $P_i(q) = p_i^q / \sum_j p_j^q$ [19], [20] для подсистемы Σ^I .

На основе этой аксиомы и двух других аксиом Хинчина Абе доказал теорему единственности энтропии Тсаллиса.

Другую модификацию второй аксиомы Хинчина, приводящую к энтропии Реньи, предложили Джизба и Аримицу [25]:

$$S_q(p) = S_q(p^I) + S_q(p^I|p^{II}) \quad (21)$$

с условной энтропией в виде

$$S_q(p^I|p^{II}) = \phi^{-1} \left(\sum_i P_i^I(q) \phi(S(Q|i)) \right), \quad (22)$$

где $q > 0$, $\phi(x)$ – функция Колмогорова–Нагумо.

Джизба и Аримицу выбрали функцию Колмогорова–Нагумо ϕ в экспоненциальной форме, как это было сделано в оригинальном авторском выводе энтропии Реньи. В результате они получили аксиоматическое обоснование энтропии Реньи, что и следовало ожидать при таком выборе функции Колмогорова–Нагумо.

Следует отметить, что все три варианта второй аксиомы основаны на различных формах условной энтропии. Каждый вариант выглядит как своего рода прокрустово ложе и подбирается авторами в таком виде, чтобы обеспечить выбор желаемой формы информационной энтропии и исключить другие формы. Более того, *a priori* не видно какого-либо критерия, позволяющего предпочесть одну из них.

С другой стороны, все эти варианты не удовлетворяют формальному понятию аксиомы, так как не основываются на первых принципах, правилах или утверждениях, которые могут считаться общепринятыми в силу их очевидности.

Ниже предлагается другой подход к выбору и обоснованию формы информационной энтропии, основанный на системе аксиом Шора и Джонсона [26], соответствующих формальному понятию аксиомы.

Шор и Джонсон рассматривали процедуру преобразования исходного распределения $u = \{u_i\}$ в распределение $p = \{p_i\}$ при появлении новой информации. Предполагается, что эта процедура представляет собой максимизацию некоей формы $U(u, p)$ при ограничении, соответствующем новой информации. Примером такого ограничения может служить условие (4), учитывающее информацию об известном значении средней энергии системы. При этом принцип максимальности энтропии появляется как частный случай, когда исходное распределение однородно (все вероятности равны друг другу).

Конкретная формулировка задачи выглядит следующим образом. Пусть система имеет W возможных состояний с неизвестным распределением $\{p_i\}$. Исходное распределение $\{u_i\}$ представляет собой оценку распределения $\{p_i\}$ без учета дополнительной информации, налагающей определенные ограничения на распределение.

В результате учета этой информации исходное распределение $\{u_i\}$ переходит в $\{p_i\}$. Предполагается, что $\{p_i\}$ зависит только от исходного распределения $\{u_i\}$ и ограничения I , что символически записывается в виде

$$p = I_o u, \quad (23)$$

где I_o – “оператор преобразования” исходного распределения.

Шор и Джонсон сформулировали пять аксиом для этого оператора [26].

1. Единственность: результат преобразования должен быть однозначным.
2. Инвариантность: для непрерывных распределений выбор системы координат не должен влиять на результат преобразования.
3. Результат не должен зависеть от того, рассматривается ли независимая информация, относящаяся отдельно к каждой независимой подсистеме, в терминах распределений вероятностей этих подсистем или в терминах общего распределения вероятностей.
4. Результат не должен зависеть от того, рассматриваются ли непересекающиеся подмножества состояний системы в терминах отдельных условных распределений вероятностей или в терминах общего распределения.
5. При отсутствии новой информации исходное распределение должно оставаться неизменным.

Эти аксиомы кажутся вполне разумными. Они апеллируют к достаточно общим и очевидным свойствам и этим выгодно отличаются от вышеупомянутых аксиом для информационной энтропии.

На основе этих аксиом была доказана (см. работу [27]) следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Процедура преобразования удовлетворяет пяти перечисленным аксиомам, если и только если она эквивалентна требованию максимальной $U_\eta(u, p)$ при ограничении I , где*

$$U_\eta(u, p) = \left(\sum_i^W \left(\frac{p_i}{u_i} \right)^{-\eta} p_i \right)^{1/\eta}, \quad \eta < 1. \quad (24)$$

В частном случае однородного исходного распределения $u_i = 1/W$ (для всех i) $U_\eta(u, p)$ принимает вид

$$U_\eta(p) = \left(\sum_i^W p_i^{1-\eta} \right)^{1/\eta}. \quad (25)$$

Кроме того, можно рассматривать экстремум не самой $U_\eta(p)$, а любой достаточно гладкой монотонной функции от $U_\eta(p)$. Тогда требование теоремы можно представить как максимизацию любой монотонной функции $F(U_\eta(p))$ при ограничении I .

Наиболее очевидным выбором такой монотонной функции является $F(U_\eta(p)) = \ln U_\eta(p)$, и мы сразу узнаем энтропию Реньи $S_q^{(R)}$ ($q = 1 - \eta$), переходящую в энтропию Гиббса–Шеннона $S^{(G)}$ при $q \rightarrow 1$. При отсутствии дополнительной информации, когда преобразование I_o является тождественным, энтропия Реньи при любых q переходит в энтропию Больцмана.

Таким образом, система аксиом Шора–Джонсона убедительно обосновывает как саму форму энтропии Реньи, так и принцип максимальности энтропии Реньи для распределения, учитывающего информацию, связанную с введением ограничений I . Тем самым подтверждается высказанное ранее предположение об экстремальности энтропии Реньи как “свободной энтропии”.

С другой стороны, возможен и иной выбор монотонной функции F , также обеспечивающий переход к предельному случаю $S^{(G)}$ при $q \rightarrow 1$. Это $F(U_\eta(p)) = (1/\eta)\{[U_\eta(p)]^\eta - 1\}$, что приводит к энтропии Тсаллиса. В этом отношении приведенные выше аксиомы и теорему можно рассматривать как альтернативное обоснование энтропии Тсаллиса. Здесь следует отметить, что условие аддитивности энтропии независимых подсистем требует отказа от такого выбора монотонной функции F , поскольку энтропия Тсаллиса неаддитивна.

4. ПРИНЦИП МАКСИМАЛЬНОСТИ ЭНТРОПИИ РЕНЬИ

Если в принцип максимальности энтропии Джейнса вместо энтропии Гиббса–Шеннона подставить энтропию Реньи, то равновесное распределение следует искать из условия максимума функционала

$$L_R(p) = \frac{1}{1-q} \ln \sum_i^W p_i^q - \alpha \sum_i^W p_i - \beta \sum_i^W H_i p_i, \quad (26)$$

где α и β – множители Лагранжа. Следует отметить, что $L_R(p)$ переходит в $L_G(p)$ в пределе $q \rightarrow 1$.

Приравняв нулю функциональную производную $L_R(p)$, находим

$$\frac{\delta L_R(p)}{\delta p_i} = \frac{q}{1-q} \frac{p_i^{q-1}}{\sum_j p_j^q} - \alpha - \beta H_i = 0. \quad (27)$$

Для исключения параметра α умножим это уравнение на p_i и просуммируем по i . Тогда с учетом условия нормировки $\sum_i p_i = 1$ получаем

$$\alpha = \frac{q}{1-q} - \beta U, \quad (28)$$

$$p_i = \left(\left(1 - \beta \frac{q-1}{q} \Delta H_i \right) \sum_j^W p_j^q \right)^{1/(q-1)}, \quad \Delta H_i = H_i - U. \quad (29)$$

Воспользовавшись еще раз условием $\sum_i p_i = 1$, находим

$$\sum_j^W p_j^q = \left(\sum_i^W \left(1 - \beta \frac{q-1}{q} \Delta H_i \right)^{1/(q-1)} \right)^{-(q-1)}$$

и получаем распределение Реньи [28]

$$p_i = p_i^{(R)} = \frac{1}{Z_q^{(R)}} \left(1 - \beta \frac{q-1}{q} \Delta H_i \right)^{1/(q-1)}, \quad (30)$$

$$Z_q^{(R)} = \sum_i^W \left(1 - \beta \frac{q-1}{q} \Delta H_i \right)^{1/(q-1)}. \quad (31)$$

При применении принципа максимальности энтропии к энтропии Тсаллиса необходимо учитывать, что в последней (третьей) версии так называемой неэкстенсивной термостатистики Тсаллиса [29] все средние вычисляются с эскортным распределением $P_i = p_i^q / \sum_i p_i^q$, что противоречит основным принципам вероятностного описания. Действительно, при $q > 1$ ($q < 1$) относительный вклад больших (меньших) p_i возрастает, в результате чего эскортное распределение не дает истинных средних значений динамических переменных. Тем не менее дополнительное условие, фиксирующее среднюю энергию, в термостатистике Тсаллиса записывается в виде $U = \langle H \rangle_{\text{es}} \equiv \sum_i H_i P_i$, после чего эскортное распределение находится в виде

$$P_i^{(T)} = Z_T^{-1} (1 - \beta^* (1 - q') \Delta H_i)^{q'/(1-q')}, \quad (32)$$

где $\beta^* = \beta / \sum_i p_i^q$, а β является множителем Лагранжа.

Следует отметить, что распределение Реньи (30) и эскортное распределение Тсаллиса (32) совпадают, если положить $q' = 1/q$. Действительно, при этом

$$1 - q' = \frac{q - 1}{q}, \quad \frac{q'}{1 - q'} = \frac{1}{q - 1}, \quad (33)$$

а β^* определяется тем же дополнительным условием (4) для принципа максимальности энтропии, что и β . Таким образом, не всегда обоснованная линеаризация логарифмической функции в энтропии Реньи и сомнительное использование эскортного распределения в формализме Тсаллиса приводят к тому же распределению Реньи.

Следовательно, многочисленные работы (см. [21]), подтверждающие соответствие эскортного распределения Тсаллиса (в котором q' рассматривается как свободный параметр) наблюдаемым распределениям в сложных физических, биологических, социальных и других системах, свидетельствуют скорее в пользу более обоснованной энтропии Реньи, чем неэкстенсивной энтропии Тсаллиса.

Когда $q \rightarrow 1$, распределение $\{p_i^{(R)}\}$ переходит в каноническое распределение Гиббса, а $\beta \rightarrow \beta_0 = 1/(k_B T_0)$. Однако этого недостаточно для однозначного определения β , так как, вообще говоря, этот параметр может быть произвольной функцией $\beta(q)$, переходящей в β_0 в пределе $q \rightarrow 1$.

Для определения явного вида $\beta(q)$ вернемся к дополнительному ограничению, фиксирующему среднее значение энергии, и подставим в него распределение Реньи (30). Тем самым приходим к интегральному уравнению для β

$$U = \sum_i^W H_i p_i^{(R)}, \quad (34)$$

в котором U считается заданной известной величиной.

Это уравнение было решено для частного случая степенной зависимости гамильтониана от переменной системы x [32]:

$$H(x) = Cx^\kappa. \quad (35)$$

Такая форма гамильтониана соответствует модели идеального газа и может оказаться полезной при построении термостатистики сложных систем. Более того, во

многих социальных, биологических и гуманитарных науках в качестве переменной системы x может быть выбран (с $\kappa = 1$) своего рода гамильтониан (например, численность населения страны, усилие по произношению и пониманию слова, банковский капитал, число научных публикаций автора, размер животного и т.д.).

Для степенного гамильтониана условие сходимости суммы в уравнении (34) в предельном случае $W \rightarrow \infty$ приводит к неравенству

$$q > q_{\min} = \frac{1}{1 + \kappa}. \quad (36)$$

В результате решения уравнения (34) параметр β был найден в работе [32] в виде

$$\beta = \frac{1}{\kappa U}. \quad (37)$$

Независимость этого выражения от q означает, что оно справедливо, в частности, и при $q = 1$, когда $p^{(R)}$ переходит в распределение Гиббса. Следовательно, для всех q

$$\beta = \beta_0 \equiv \frac{1}{k_B T_0}. \quad (38)$$

Когда $H = p^2/(2m)$ (т.е. при $\kappa = 2$), из (37) и (38) находим, что $U = k_B T_0/2$, как и следовало ожидать для одномерного идеального газа.

С помощью соотношения (37) можно исключить множитель Лагранжа β из распределения Реньи (30), в результате чего получаем

$$p_i^{(R)} = Z^{-1} \left(1 - \frac{q-1}{\kappa q} (C_u x_i^\kappa - 1) \right)^{1/(q-1)}, \quad H_i = C x_i^\kappa, \quad C_u = \frac{C}{U}. \quad (39)$$

Теперь для однозначного определения распределения Реньи осталось только найти значение параметра Реньи q . Эта задача будет рассмотрена в следующих разделах.

5. ТЕМПЕРАТУРА

Для определения термодинамической температуры воспользуемся соотношением Клаузиуса между приращениями теплоты Q и термодинамической энтропии $\tilde{S}^{(R)}$, в качестве которой берется (умноженная на k_B) энтропия Реньи для распределения Реньи:

$$\delta \tilde{S}^{(R)} = \frac{\delta Q}{T}. \quad (40)$$

Рассмотрим процесс, при котором происходят изменения гамильтониана H , зависящего от внешних параметров $a_1, a_2, \dots, a_K$ и от состояния системы, описываемой распределением Реньи. Тогда приращение внутренней энергии системы (34) принимает вид

$$\delta U = \left\langle \sum_k \frac{\partial H}{\partial a_k} \delta a_k \right\rangle + \frac{\sum_i H_i \delta \bar{p}_i}{\sum_i \bar{p}_i} - \frac{U}{\sum_i \bar{p}_i} \sum_i \delta \bar{p}_i = -\delta A + \frac{1}{\sum_i \bar{p}_i} \sum_i \Delta H_i \delta \bar{p}_i, \quad (41)$$

где введены ненормированное распределение Реньи

$$\bar{p}_i = \left(1 - \beta \frac{q-1}{q} \Delta H_i\right)^{1/(q-1)} \quad (42)$$

и обозначение $\delta A = -\langle \sum_k (\partial H / \partial a_k) \delta a_k \rangle$ для работы, совершаемой системой.

Таким образом, для приращения тепла имеем

$$\delta Q = \delta U + \delta A = \frac{\sum_i \Delta H_i \delta \bar{p}_i}{\sum_i \bar{p}_i}. \quad (43)$$

Аналогичным образом найдем приращение энтропии:

$$\delta \tilde{S}^{(R)} = \frac{k_B q}{1-q} \frac{\sum_i \bar{p}_i^{q-1} \delta \bar{p}_i}{\sum_i \bar{p}_i^q} - \frac{k_B q}{1-q} \frac{\sum_i \delta \bar{p}_i}{\sum_i \bar{p}_i} = k_B \beta \frac{\sum_i \Delta H_i \delta \bar{p}_i}{\sum_i \bar{p}_i}. \quad (44)$$

Из сопоставления (43) и (44) видно, что равенство (40) выполняется при любых значениях q , если положить $T = 1/(k_B \beta)$.

Нетрудно убедиться, что к этому же значению температуры приводит и принятое в статистической физике стандартное термодинамическое соотношение

$$T = \left(\frac{\partial \tilde{S}^{(R)}}{\partial U} \right)_{\{a_k\}}^{-1} = \frac{1}{k_B \beta}. \quad (45)$$

Выше было показано (см. (38)), что для степенного гамильтониана параметр Лагранжа $\beta = \beta_0 = 1/(k_B T_0)$ не зависит от q . Теперь можно утверждать, что и в общем случае β не зависит от q , благодаря чему физическая температура в термостатистике Реньи совпадает с обычной термодинамической температурой T_0 .

Тем самым подтверждено нулевое начало термодинамики для сложных систем, взаимодействующих с энтроостатом: система, находящаяся в контакте с термостатом с температурой T_0 , имеет такую же температуру независимо от контакта с энтроостатом.

6. ПЕРЕХОД ОТ ТЕРМОСТАТИСТИКИ ГИББСА К ТЕРМОСТАТИСТИКЕ РЕНЬИ КАК ФАЗОВЫЙ ПЕРЕХОД

Наличие термостатистик Гиббса и Реньи, каждая из которых обеспечивает адекватное описание широкого класса систем, требует четкой формулировки условий перехода от одной из них к другой.

Действительно, термостатистика Реньи является более общей и включает в себя термостатистику Гиббса как частный случай, соответствующий значению $q = 1$ параметра Реньи. Переход от распределения Гиббса, описывающего состояние динамического хаоса [20], к степенным распределениям Реньи, характерным для упорядоченных самоорганизованных систем [14], соответствует возрастанию “параметра порядка” $\eta = 1 - q$ от нулевого значения при $q = 1$ до $\eta_{\max} = 1 - q_{\min}$. При этом энтропия Гиббса–Шеннона переходит в энтропию Реньи.

Согласно теории Ландау производная энтропии по параметру порядка испытывает скачок в точке фазового перехода. В частности, если параметр порядка представляет собой приращение температуры, то этот скачок соответствует скачку теплоемкости, характерному для фазовых переходов второго рода.

Здесь мы имеем дело с переходом от термостатистики Гиббса к термостатистике Реньи, соответствующей ненулевым значениям параметра порядка η . Рассмотрим изменение энтропии при этом переходе.

Подставив распределение Реньи (30) в определение энтропии Реньи (12), после несложных преобразований получаем

$$\tilde{S}^{(R)} = S_{\eta}^{(R)}(p_{\eta}^{(R)}) = k_B \ln \sum_i^W \left(1 + \beta \frac{\eta}{1 - \eta} \Delta H_i \right)^{-1/\eta} = k_B \ln Z_{\eta}^{(R)}, \quad (46)$$

где, как и ранее, введена постоянная Больцмана k_B .

При $\eta \rightarrow 0$ ($q \rightarrow 1$) энтропия переходит в обычную термодинамическую энтропию термостатики Гиббса

$$\tilde{S}^{(G)} = S^{(G)}(p^{(G)}) = k_B \ln \sum_i^W e^{-\beta \Delta H_i}. \quad (47)$$

Теперь нетрудо вычислить предельное значение при $\eta \rightarrow 0$ производной по η разности энтропий $\Delta S = \tilde{S}^{(R)} - \tilde{S}^{(G)}$:

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \left(\frac{d\Delta S}{d\eta} \right) = \frac{k_B}{2} \beta^2 \sum_i^W p_i^{(G)} (\Delta H_i)^2. \quad (48)$$

Согласно теории флуктуаций для равновесного ансамбля Гиббса

$$\sum_i^W p_i^{(G)} (\Delta H_i)^2 = \frac{1}{k_B \beta^2} \frac{dU}{dT} = \frac{1}{k_B \beta^2} C_V, \quad (49)$$

откуда

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \left(\frac{d\Delta S}{d\eta} \right) = \frac{1}{2} C_V, \quad (50)$$

где C_V – теплоемкость при постоянном объеме.

Таким образом, производная по параметру порядка от приращения энтропии испытывает скачок (равный $C_V/2$) при $\eta = 0$. Это позволяет считать переход к термостатистике Реньи своеобразным фазовым переходом в более организованное состояние. Назовем его энтропийным фазовым переходом.

В результате энтропийного фазового перехода система переходит в более упорядоченное состояние с параметром порядка $\eta \neq 0$. В отличие от обычного фазового перехода, условия реализации которого определяются только температурой перехода, условия реализации энтропийного перехода, по-видимому, определяются по-своему для каждой конкретной системы. Например, порог возникновения турбулентности (см. [30]) как упорядоченной структуры определяется критическим числом Рейнольдса, а появление ячеек Бенара при тепловой конвекции – критическим числом Рэлея (см. [20]).

Социальные, экономические и биологические системы реализуются, как правило, в упорядоченной самоорганизованной форме, в связи с чем для них характерны именно степенные и близкие к ним распределения, но не распределение Гиббса.

В следующем разделе будет рассмотрен вопрос о величине параметра порядка в различных системах.

7. НАИБОЛЕЕ ВЕРОЯТНОЕ ЗНАЧЕНИЕ ПАРАМЕТРА РЕНЬИ

Пример расчета значения параметра q для физической негиббсовой системы был предложен Вилком и Влодаржином [31]. Они рассмотрели флуктуации не только энергии, но и температуры малой подсистемы большой равновесной системы, в отличие от традиционного подхода Гиббса, в котором температура считается константой, равной температуре термостата. Этот подход приводит (см. [32]) к распределению Реньи с параметром q , выраженным через теплоемкость C_V малой подсистемы:

$$q = \frac{C_V - k_B}{C_V} \simeq 1 - O\left(\frac{1}{N}\right). \quad (51)$$

Подход Вилка и Влодаржика был далее развит Беком и Коэном [33], которые предложили для него удачное название “суперстатистики”. В рамках суперстатистики параметр q определяется физическими свойствами системы, которая может обмениваться энергией и теплом с термостатом.

В общем случае, когда мы не имеем информации относительно природы стохастического процесса взаимодействия системы с окружением, параметр q рассматривается как свободный параметр. Это позволяет обобщить принцип максимальности энтропии и дополнить его условием максимума энтропии Реньи $\tilde{S}^{(R)}$ в пространстве распределений Реньи с различными значениями q .

Действительно, максимум энтропии Реньи с любым значением q обеспечивается распределением Реньи (39). Следующий шаг состоит в подстановке распределения Реньи $p^{(R)}(q, \kappa)$ в определение энтропии Реньи (12) и варьировании параметра q .

На рис. 1а изображен график $S^{(R)}(p^{(R)}(q, \kappa))$ как функции q, κ для степенного гамильтониана. Видно, что $S^{(R)}(p^{(R)}(q, \kappa))$ достигает своего максимального значения при минимально возможной величине $q = q_{\min}$. При $q < q_{\min}$ ряд (34) расходится, и, следовательно, распределение Реньи не может определять среднее значение энергии $U = \langle H \rangle_p$, что нарушает дополнительное ограничение принципа максимальности энтропии. Таким образом, максимум максимум энтропия Реньи имеет место при $q = q_{\min}$, откуда следует, что именно это значение параметра Реньи является предпочтительным, если отсутствует какая-либо дополнительная информация о свойствах рассматриваемого стохастического процесса. При этом параметр порядка η достигает своей максимальной величины $\eta_{\max} = 1 - q_{\min}$.

Для сравнения аналогичная процедура применена и к энтропии Гиббса–Шеннона $S^{(G)}(p)$. Подставляя в нее распределение Реньи $p = p^{(R)}(q, \kappa)$, получаем зависящую от q функцию $S^{(G)}(p^{(R)}(q, \kappa))$, изображенную на рис. 1б. Как и следовало ожидать, энтропия Гиббса–Шеннона $S^{(G)}(p^{(R)}(q, \kappa))$ принимает свое максимальное значение

Рис. 1. Энтропии $S^{(R)}(p^{(R)}(q, \kappa))$ (а) и $S^{(G)}(p^{(R)}(q, \kappa))$ (б) для степенного гамильтониана с показателем κ в диапазоне $3 > \kappa > 0.5$. Убыванию q от $q = 1$ до $q = q_{\min}$ соответствует возрастание параметра порядка от нуля до $\eta_{\max} = 1 - q_{\min}$.

при $q = 1$, когда $p^{(R)}(q, \kappa)$ становится каноническим распределением Гиббса, а параметр порядка η обращается в нуль.

Таким образом, в термостатистике Реньи в соответствии со вторым началом термодинамики (принципом возрастания энтропии) эволюция систем в упорядоченной фазе с параметром порядка $\eta > 0$ ($q < 1$) идет в направлении самоорганизации, т.е. роста $\eta \rightarrow \eta_{\max}$. Необоснованное применение энтропии Гиббса–Шеннона (т.е. частного случая энтропии Реньи с $\eta = 0$) к подобным системам предсказывает противоположное направление эволюции к состоянию “тепловой смерти”, $\eta \rightarrow 0$.

Распределение Реньи для системы со степенным гамильтонианом при максимальном значении параметра становится степенным распределением во всем диапазоне значений x . Действительно, подстановка $q = q_{\min}$ в выражение (39) приводит к соотношению

$$p = Z^{-1} x^{-(1+\kappa)}. \quad (52)$$

Такое распределение характерно для самоорганизующихся систем [14].

Например, в случае ударного разрушения, где случайной переменной является масса m осколков, а энергия $H \sim m^{2/3}$ ($\kappa = 2/3$), степенное распределение осколков по массам согласно (52) имеет вид $p(m) \sim m^{-5/3}$, что совпадает как с теоретическими результатами [34], так с экспериментальными наблюдениями [35]. В другом частном случае $\kappa = 1$ степенное распределение принимает вид $p \sim x^{-2}$. Это так называемый закон Ципфа–Парето, хорошо известный в социологии, биологии и гуманитарных науках. Такой же показатель степенного распределения был найден для энергетического спектра частиц в атмосферных каскадах космических лучей [36] и для распределения пользователей сайтов Интернета [37].

Необходимо отметить, что согласно неравенству (36) $q > q_{\min}$, т. е. $q = q_{\min} + \epsilon$, где ϵ – положительная инфинитезимальная величина. Ясно, что в реальных физических

Рис. 2. Распределение Реньи (ненормированное) для степенного гамильтониана $H \sim x^\kappa$ при $\kappa = 1$ (а) и $\kappa = 2/3$ (б) и для различных значений ϵ .

системах ϵ должна быть некой конечной величиной, много меньшей единицы. Учет конечности ϵ приводит к распределению Реньи (39) в виде

$$p^R(x) = Z^{-1}(C_u x)^{-(\kappa+1)(1+\epsilon(\kappa+1)/\kappa)} [1 - \epsilon(\kappa+1)^2(1 - C_u x^{-\kappa})]^{-(\kappa+1)/\kappa(1+\epsilon(\kappa+1)/\kappa)}. \quad (53)$$

Для достаточно больших x всеми членами, содержащими ϵ , можно пренебречь, и это распределение переходит в степенное.

С другой стороны, при достаточно малых $x \ll 1$ в выражении в квадратных скобках достаточно учитывать только член $\epsilon(\kappa+1)^2 C_u x^{-\kappa}$, откуда следует, что

$$p^R(x)|_{x \ll 1} \sim (\epsilon(\kappa+1)^2)^{-(\kappa+1)/\kappa}. \quad (54)$$

Таким образом, асимптотикой распределения Реньи при малых x является постоянная, определяемая значением ϵ . Графики распределения Реньи во всем диапазоне x изображены на рис. 2 для частных случаев $\epsilon = 10^{-6}$, $\epsilon = 10^{-5}$ и $\epsilon = 10^{-4}$.

Можно предположить, что в приведенных примерах чисто степенного распределения $p \sim x^{-(\kappa+1)}$ горизонтальный участок распределения Реньи при малых x не был обнаружен или считается несущественным из-за малости ϵ .

Поскольку методы однозначного теоретического определения ϵ отсутствуют, этот параметр можно рассматривать как свободный. Его можно оценить в тех случаях, когда экспериментальные данные свидетельствуют о наличии горизонтальной головной части, предшествующей степенному распределению. Например, для распределения вероятностей соединений в сети Интернета [38] со степенным показателем порядка -2.5 параметр ϵ может быть оценен: $\epsilon \sim 10^{-4}$.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для учета обмена информационной энтропией между сложной системой и окружающей средой, характерного для процессов самоорганизации, вводится понятие энтростата (энтропийного термостата). Показано, что для системы, взаимодействующей с энтростатом, экстремальными свойствами обладает не энтропия Гиббса–Шеннона, а более общая энтропия Реньи. Она выводится путем такого же кумулянтного усреднения энтропии Больцмана $S_i^{(B)} = -\ln p_i$, как и свободная энергия

Гельмгольца для системы в термостате, в форме кумулянтного среднего от гамильтониана системы. Эта форма информационной энтропии и ее экстремальность подтверждаются аксиоматикой и теоремой Шора–Джонсона.

Принцип максимума энтропии Реньи приводит к распределению Реньи, зависящему, как и энтропия Реньи, от параметра $q \leq 1$. В пределе $q \rightarrow 1$ энтропия и распределение Реньи переходят в энтропию и распределение Гиббса.

Зависящая от q термодинамическая энтропия в термостатистике Реньи определяется как энтропия Реньи для распределения Реньи. Максимум максиморум этой энтропии достигается при наименьшем $q = q_{\min}$, т.е. при наибольшем возможном значении параметра порядка $\eta = 1 - q$. Распределение Реньи при таком η переходит в степенное распределение, характерное для сложных систем.

Переход от обычной термостатистики Гиббса к термостатистике Реньи носит характер фазового перехода упорядочения с параметром порядка η . Как только система перейдет в это новое фазовое состояние термостатистики Реньи, в ней будет спонтанно развиваться самоорганизация более упорядоченного состояния, сопровождаемая ростом термодинамической энтропии.

Такое поведение энтропии устраняет противоречие между вторым законом термодинамики и эволюцией системы в сторону самоорганизации.

Благодарности. Пользуюсь возможностью поблагодарить А. В. Витязева за многолетнюю поддержку и плодотворные обсуждения поднятых здесь вопросов.

Настоящая работа посвящается памяти моего учителя Дмитрия Николаевича Зубарева. Здесь уместно отметить, что именно Дмитрий Николаевич при последней нашей встрече посоветовал мне обратить внимание на энтропию Реньи.

Список литературы

- [1] E. T. Jaynes, *Phys. Rev.*, **106** (1957), 620; **108** (1957), 171.
- [2] Д. Н. Зубарев, *Неравновесная статистическая термодинамика*, Наука, М., 1972; Д. Н. Зубарев, В. Г. Морозов, Г. Репке, *Статистическая механика неравновесных процессов*, Физматлит, М., 2002.
- [3] A. Renyi, *Probability theory*, North-Holland, Amsterdam, 1970.
- [4] *Selected papers by Alfred Renyi*, v. 2, ed. P. Turan, Akademiai Kiado, Budapest, 1976.
- [5] J. H. Havrda, F. Charvat, *Kybernetika*, **3** (1967), 30.
- [6] C. Tsallis, *J. Stat. Phys.*, **52** (1988), 479.
- [7] A. Bialas, W. Czyz, *Phys. Rev. D*, **61** (2000), 074021.
- [8] C. Essex, C. Schultzky, A. Franz, K. H. Hoffmann, *Physica A*, **284** (2000), 299.
- [9] T. C. Halsey, M. H. Jensen, L. P. Kadanoff et al., *Phys. Rev. A*, **33** (1986), 1141.
- [10] T. Arimitsu, N. Arimitsu, *Physica A*, **305** (2002), 218.
- [11] M. B. Geilikman, T. V. Golubeva, V. F. Pisarenko, *Earth Planet. Sci. Lett.*, **99** (1990), 127.
- [12] Г. Хакен, *Информация и самоорганизация*, Мир, М., 1991.
- [13] Дж. Николис, *Динамика иерархических систем*, Мир, М., 1989.
- [14] P. Bak, *How Nature Works. The Science of Self-Organized Criticality*, Springer, Berlin, 1996.
- [15] E. W. Montroll, M. F. Shlesinger, *J. Stat. Phys.*, **32** (1983), 209.
- [16] Р. Балеску, *Равновесная и неравновесная статистическая механика*, т. 1, Мир, М., 1978.
- [17] Б. Б. Кадомцев, *Динамика и информация*, Редакция УФН, М., 1997.

- [18] A. N. Kolmogorov, *Atti Accad. Naz. Lincei. Rend.*, **12** (1930), 388; М. Nagumo, *Japan J. Math.*, **7** (1930), 71.
- [19] C. Beck, F. Schlögl, *Thermodynamics of Chaotic Systems*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.
- [20] Ю. Л. Климонтович, *Статистическая теория открытых систем*, ТОО “Янус”, М., 1995.
- [21] <http://tsallis.cat.cbpf.br/biblio.htm>.
- [22] C. E. Shannon, *Bell Syst. Techn. J.*, **27** (1948), 379, 623.
- [23] А. И. Хинчин, *УМН*, **8** (1953), 3; А. И. Khinchin, *Mathematical Foundations of Information Theory*, Dover, N. Y., 1957.
- [24] S. Abe, *Phys. Lett. A*, **271** (2000), 74.
- [25] P. Jizba, T. Arimitsu, *AIP Conf. Proc.*, **597** (2001), 341; [cond-mat/0108184](#).
- [26] J. E. Shore, R. W. Johnson, *IEEE Trans. Inform. Theory*, **IT-26** (1980), 26; R. W. Johnson, J. E. Shore, *IEEE Trans. Inform. Theory*, **IT-29** (1983), 942.
- [27] J. Uffink, *Stud. Hist. Philos. Mod. Phys. B*, **26** (1995), 223.
- [28] A. G. Bashkirov, *Physica A*, **340** (2004), 153; *Phys. Rev. Lett.*, **93** (2004), 130601.
- [29] C. Tsallis, R. S. Mendes, A. R. Plastino, *Physica A*, **261** (1998), 534.
- [30] Д. Н. Зубарев, В. Г. Морозов, О. В. Трошкин, *ТМФ*, **92** (1992), 293.
- [31] G. Wilk, Z. Wlodarczyk, *Phys. Rev. Lett.*, **84** (2000), 2770.
- [32] А. Г. Башкиров, А. Д. Суханов, *ЖЭТФ*, **122** (2002), 513.
- [33] C. Beck, *Phys. Rev. Lett.*, **87** (2001), 180601; C. Beck, E. G. D. Cohen, *Physica A*, **322** (2003), 267.
- [34] A. G. Bashkirov, A. V. Vityazev, *Planet. Space Sci.*, **44** (1996), 909.
- [35] A. Fujiwara, G. Kamimoto, A. Tsukamoto, *Icarus*, **31** (1977), 277.
- [36] M. Rybczynski, Z. Wlodarczyk, G. Wilk, *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)*, **97** (2001), 81.
- [37] L. A. Adamic, B. A. Hubermann, *Glottometrics*, **3** (2002), 143.
- [38] G. Wilk, Z. Wlodarczyk, *Acta Phys. Polon. B*, **35** (2004), 871; [cond-mat/0212056](#).

Поступила в редакцию 12.01.2006,
после доработки 16.06.2006